EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 32. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1983, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 32
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1983, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1983.3.12 УДК 62—501.12

*Ю. НУРГЕС*

# МОДИФИКАЦИЯ ЧАСТИЧНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЕМ ЛАГЕРРА

*Ü. NURGES.* DISKREETSE SÜSTEEMI OSALISE REALISATSIOONI MODIFITSEERIMINE LAGUERRE'I TEISENDUSEGA

*Ü. NURGES.* MODIFICATION OF PARTIAL REALIZATION OF DISCRETE-TIME SYSTEMS BY LAGUERRE EXPANSION

*(Представил Н. Алумяэ)*

Рассмотрим дискретную динамическую систему

$$x(t+1)=Fx(t)+Gu(t), \tag{1}$$

$$y(t)=Hx(t), \quad t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{2}$$

где $x$ — $n$-вектор состояния, $u$ — $m$-вектор управляющих воздействий, $y$ — $p$-вектор выходных переменных. Матрицы $F$, $G$, $H$ имеют размерность $n\times n$, $n\times m$ и $p\times m$ соответственно.

Задача реализации заключается в отыскании тройки матриц $(F, G, H)$ по заданным марковским параметрам системы $M(i)$, $i=1,2,\ldots$

$$M(i)=HF^{i-1}G, \tag{3}$$

т. е. в определении модели состояния системы (1), (2) по ее вход-выход соотношению. При конечном числе марковских параметров $M(i)$, $i=1,\ldots,N$ решается задача частичной реализации [1]. Если $N\geqslant 2n$, то решения обеих задач совпадают. А если $N<2n$, частичная реализация дает некоторую аппроксимацию системы.

Полноценным представлением устойчивой динамической системы (1), (2) является ее лагеррова модель [2]:

$$z_{k+1}=Az_k+Bu_k, \tag{4}$$

$$y_k=Cz_k+Du_k, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{5}$$

где $u_k$ и $y_k$ — векторы коэффициентов разложения переменных $u(t)$ и $y(t)$ по разностным многочленам Лагерра $\Psi_k(t)$

$$\Psi_k(t)=\sqrt{1-\xi^2}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}\binom{t+k-j}{k}\xi^{t+k-2j},$$

$\xi\in[0,1)$, $\binom{k}{j}$ — биномиальный коэффициент,

$$u_k = \sum_{t=0}^{\infty} u(t)\Psi_k(t),$$

$$y_k = \sum_{t=0}^{\infty} y(t)\Psi_k(t),$$

а

$$z_k = (I - \xi F)x_k - \xi G u_k,$$

$$A = (F - \xi I)(I - \xi F)^{-1}, \tag{6}$$

$$B = (1 - \xi^2)(I - \xi F)^{-1}G, \tag{7}$$

$$C = H(I - \xi F)^{-1}, \tag{8}$$

$$D = H(I - \xi F)^{-1}G. \tag{9}$$

Марковские параметры лагерровой модели (4), (5)

$$M_0 = D, \tag{10}$$

$$M_i = CA^{i-1}B, \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

легко определить по весовой функции системы $h(t)$ [2]

$$M_i = [m_i(\alpha\beta)], \quad \alpha = 1, \ldots, p, \quad \beta = 1, \ldots, m,$$

$$m_i = \Psi_0^{-1}(0)(h_i - \xi h_{i-1}),$$

$$h_i = \sum_{t=0}^{\infty} h(t)\Psi_i(t).$$

Оказывается, что можно комбинировать марковские параметры системы $M(i)$ и ее лагерровые модели $M_j$ для решения задач реализации.

Обозначим

$$\overline{M}_i = H(I - \xi F)^{i-1}G.$$

Тогда на основании определения (3)

$$\overline{M}_i = \sum_{j=0}^{i-1} (-\xi)^j \binom{i-1}{j} M(j), \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

а из формул (6)—(11), учитывая перестановочность матриц $F - \xi I$ и $I - \xi F$, получим

$$M_0 = \xi \overline{M}_0,$$

$$M_i = \xi^{-i} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (1 - \xi^2)^{j+1} \binom{i-1}{j} \overline{M}_{-j-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Матрицы $\overline{M}_i$, $i = -L, -L+1, \ldots, 0, 1, \ldots$ представляют собой марковские параметры системы $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$, где

$$\overline{A} = I - \xi F, \tag{12}$$

$$\overline{B} = (I - \xi F)^{-L-1}G, \tag{13}$$

$$\overline{C} = H. \tag{14}$$

Тройку матриц $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ можно определить решением задачи частичной реализации порядка $N$ по последовательности $\overline{M}_{-L}, \ldots, \overline{M}_0, \ldots$ $\ldots, \overline{M}_{N-L-1}$, а систему $(F, G, H)$ — из соотношений (12)—(14)

$$F = \xi^{-1}(I - \bar{A}),$$
$$G = \bar{A}^{L+1}\bar{B},$$
$$H = \bar{C}.$$

Полученная частичная реализация системы (1), (2) имеет следующие отличия от обыкновенной частичной реализации порядка $N$:

а) точно реализуется $N - L - 1$ марковских параметров системы и $L + 1$ параметров ее лагерровой модели;

б) свойства частичной реализации можно варьировать с выбором числа $L$ и постоянной $\xi$.

Отметим некоторые частные случаи модифицированной частичной реализации:

1. Если $L = 1$, то получаем обыкновенную частичную реализацию порядка $N$.

2. Если $L = N$, то получаемая частичная реализация совпадает с частичной реализацией порядка $N$, определенной по лагерровой модели системы [2].

3. Если $L = 0$, $\xi = 1$, то получаем частичную реализацию без статической ошибки, так как

$$M_0 = H(I - F)^{-1}G = \sum_{i=1}^{\infty} M(i) = S(\infty),$$

где $S(\infty)$ — матрица конечных значений переходных характеристик системы (1), (2).

Итак, предложенная модифицированная частичная реализация включает как обыкновенную частичную реализацию, так и частичную реализацию по лагерровой модели, а также их всевозможные комбинации. Последнее обстоятельство является особенно ценным тогда, когда обыкновенная частичная реализация не удовлетворяет предъявляемым требованиям (напр., оказывается неустойчивой).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Tether, A. J.* IEEE Trans. Automat. Contr., **15**, № 4, 427 (1970).
2. *Нургес Ю., Яаксоо Ю.* Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **30**, № 3, 209—219 (1981).

*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
21/XII 1982