

Г. РЕЗНИК, Т. СООМЕРЕ

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЛН РОССБИ

(Представил И. Эник)

1. Предлагается численный метод расчета эволюции спектра слабовзаимодействующих нелинейных волн Россби в баротропном океане на  $\beta$ -плоскости, основанный на использовании кинетического уравнения [1, 2]. После некоторых преобразований (подробнее см. [3]) это уравнение может быть приведено к виду [3]:

$$\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\pi}{8|k|} \int_0^\pi C [2CF_1F_2 + (D - C)FF_2 + (-D - C)FF_1] / \sqrt{B^2 + A} d\varphi', \quad (1)$$

где  $F = \frac{1}{2} (\kappa^2 + 1) \vec{F}(\vec{\kappa}, T)$  — спектральная плотность полной энергии,  $T = \varepsilon^2 t$  — «медленное» время,  $t$  — безразмерное время,  $\varepsilon \ll 1$  — малый параметр, характеризующий степень нелинейности в уравнении вихря [4],  $\vec{\kappa} = (k, l) = (\kappa \cos \varphi, \kappa \sin \varphi)$  — волновой вектор,

$$F_i = F(k_i, l_i), \quad i = 1, 2; \quad C = \kappa_0^2 \kappa^2 \sin 2\varphi'; \quad D = \kappa_0 \kappa (3\kappa^2 - \kappa_0^2) \sin \varphi'; \quad (2)$$

$$k_1 = \frac{1}{2} [\kappa_0 \cos(\varphi + \varphi') - k], \quad l_1 = \frac{1}{2} [\kappa_0 \sin(\varphi + \varphi') - l]; \quad (2a)$$

$$k_2 = -k_1 - k, \quad l_2 = -l_1 - l; \quad \kappa_0^2 = -B + \sqrt{B^2 + A}; \quad (2b)$$

$$B = 4 + (\kappa^2 + 2) \cos 2\varphi' - 2(\kappa^2 + 1) \sin 2\varphi' \operatorname{tg} \varphi, \quad A = 3(\kappa^4 + 4\kappa^2). \quad (2b)$$

Уравнение (1) — нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, зависящее от параметров  $k$  и  $l$ . Задача заключается в расчете функции  $\vec{F}(\vec{\kappa}, T)$  по известному в начальный момент  $T = 0$  распределению  $F(\vec{\kappa}, 0) = F_0(\vec{\kappa})$ .

2. Численная схема для решения (1) построена на основе метода дискретных ординат (см., напр. [5, 6]), согласно которому интеграл в (1) заменяется квадратурной формулой, после чего уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\pi}{8|k|} \sum_{v=1}^M K_v C_v [2C_v F_{1v} F_{2v} + (D_v - C_v) F F_{2v} + (-D_v - C_v) F F_{1v}] / \sqrt{B_v^2 + A}. \quad (3)$$

Здесь отрезок  $[0, \pi]$  разбит на  $M + 1$  интервалов точками  $\varphi'_v$ ;  $K_v$  — веса квадратурной формулы, индекс  $v$  показывает, что значение функции берется при  $\varphi' = \varphi'_v$ . Далее выбирается сетка  $(k_j, l_i)$ ,  $1 \leq i \leq N_i$ ,

$1 \leq j \leq N_j$  на  $k, l$ -плоскости и уравнение (3) записывается в каждом узле  $\vec{\kappa}_{ij} = (k_j, l_i)$ ; в результате получаем

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial T} = \frac{\pi}{8|k_j|} \sum_{v=1}^M (P_{vij} F_{1vij} F_{2vij} + R_{vij} F_{ij} F_{2vij} + S_{vij} F_{ij} F_{1vij}), \quad (4)$$

где индекс  $i, j$  показывает, что значение функции берется при

$$\begin{aligned} \vec{\kappa} = \vec{\kappa}_{ij} &\equiv (k_j, l_i); & P_v &= 2C_v^2 K_v / \sqrt{B_v^2 + A}; \\ & & R_v &= (D_v - C_v) C_v K_v / \sqrt{B_v^2 + A}; \\ & & S_v &= -(D_v + C_v) C_v K_v / \sqrt{B_v^2 + A}. \end{aligned} \quad (4a)$$

Для того чтобы превратить совокупность уравнений (4) в замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, величины  $F_{\alpha vij}$  выражают через  $F_{ij}$  с помощью интерполяционной формулы

$$F_{\alpha vij} = \sum_{\beta, \gamma} q_{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}; \quad \alpha = 1, 2; \quad 1 \leq \beta \leq N_i; \quad 1 \leq \gamma \leq N_j, \quad (5)$$

где  $q_{\alpha\beta\gamma}$  — интерполяционные веса.

Здесь мы сталкиваемся с определенными трудностями. Очевидно, что в реальных численных расчетах величины  $N_i$  и  $N_j$  должны быть конечными, и соответственно конечной будет и рассматриваемая область  $k, l$ -плоскости. Однако нетрудно показать, что в любой ограниченной

области  $\Omega$  значений  $\vec{\kappa}$  всегда найдется вектор  $\vec{\kappa}$  такой, что по крайней мере один из векторов  $\vec{\kappa}_1 = (\hat{k}_1, \hat{l}_1)$ ,  $\vec{\kappa}_2 = (\hat{k}_2, \hat{l}_2)$ , задаваемых равенствами (2a—b), лежит вне области  $\Omega$ . Соответственно система (4), (5) оказывается незамкнутой. Принятый здесь способ замыкания состоит в том, что значения  $F(\vec{\kappa})$ , отвечающие таким волновым векторам, приравниваются нулю, т. е.

$$F(\vec{\kappa}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{\kappa} \notin \Omega. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что система (4)—(6) замкнута в области  $\Omega$ . Условие (6) физически эквивалентно введению бесконечно быстрой диссипации вне области  $\Omega$  и в этом смысле разностный аналог (4)—(6) отличается от своего «прототипа» (т. е. от уравнения (1)). Тем не менее при определенных условиях это отличие, по-видимому, будет слабо влиять на точность расчета, что вытекает из следующих соображений.

Нетрудно показать [1] существование у (1) двух интегралов сохранения — энергии и энтропии соответственно

$$E = \int F \kappa \, d\kappa \, d\varphi = \text{const}, \quad (7)$$

$$\mathcal{E} = \int (\kappa^2 + 1) F \kappa \, d\kappa \, d\varphi = \text{const}. \quad (7a)$$

Физически естественно рассматривать состояния с конечными энергией и энтропией. Тогда, поскольку  $F \geq 0$ , из (7a) следует, что

$$F \kappa^4 = o(1), \quad \kappa \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Такое быстрое убывание  $F$  и (как это легко проверяется)  $\partial F / \partial T$  при  $\kappa \rightarrow \infty$  свидетельствует о том, что гармоники с очень большими волновыми числами не играют существенной роли в энергетическом балансе. Отсюда следует возможность проведения расчетов не на всей плоскости

$k, l$ , а только на ее конечной части  $\Omega$ , например, в пределах круга  $0 \leq x \leq x_0$ , где  $x_0$  достаточно велико, в предположении, что вне круга функция  $F$  тождественно равна нулю. Граничное значение  $x_0$  определяется для каждого конкретного случая экспериментально на основании серий расчетов с различными  $x_0$ ; приемлемым считается такое значение  $x_0$ , увеличение которого не приводит к существенному изменению результатов расчета. Полные энергия и энтропия при таких расчетах должны убывать со временем, поскольку в системе появляется диссипация. Это убывание, однако, будет весьма слабым при достаточно больших  $x_0$ , и таким образом, по поведению характеристик  $E$  и  $\mathcal{E}$  мы можем судить о правильности работы численной схемы. Такой контроль весьма полезен, так как сложность уравнения (1) не позволила получить априорные оценки точности численной аппроксимации.

Для упрощения расчетов использовались и другие свойства уравнения (1). Нетрудно показать, что  $F(k, l) \equiv F(-k, -l)$ , откуда следует, что достаточно знать распределение  $F(k, l)$  лишь на полуплоскости  $k, l$  вместо полной плоскости. Более того (см. [3]), если в начальный момент  $F(k, l, 0) = F(-k, l, 0)$ , то это остается справедливым во все моменты времени, и для таких спектров достаточно ограничиться четвертью плоскости  $k, l$ .

3. Основная трудность при разработке численной схемы заключалась в правильном подборе трех основных элементов: квадратурной формулы для интеграла в (3), способа интерполяции (5) и подходящей численной схемы для решения системы (4), (5), (6). Эти факторы решающе влияют на эффективность и устойчивость схемы.

В качестве возможных квадратурных формул рассматривались: формула Симпсона  $\int_a^b f(x) dx \approx I_S$ , формула (см. [7])

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_Q = \frac{3}{8} h (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + \dots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n); \quad h = (b - a)/n; \quad f_i = f(a + ih),$$

линейная комбинация этих формул

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_S + 0,8(I_S - I_Q)$$

и формула Гаусса. Последняя оказалась наиболее экономичной в смысле точности и скорости вычислений, и в окончательном варианте программы для ЭВМ используется формула Гаусса с 24 узлами. Судя по результатам пробных расчетов, использование этой формулы гарантирует вычисления значений интеграла с погрешностью не более 5% для всех узлов сетки.

Рассматривались также следующие способы интерполяции:

1) простейшая — когда  $F(k, l)$  полагается равным значению  $F$  в ближайшей точке сетки; 2) интерполяция со сглаживанием — когда значение  $F$  в точке  $(k, l)$ , лежащей внутри прямоугольника, образованного 4 узлами сетки  $(k_i, l_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , представляется в виде линейной комбинации значений  $F_i = F(k_i, l_i)$  с весами, обратно пропорциональными расстояниям от точки  $(k, l)$  до узлов  $(k_i, l_i)$ ; 3) функция  $F$  аппроксимируется плоскостью, проведенной через 3 ближайших к точке интерполяции узла сетки; 4) «двойная» линейная интерполяция, при которой

$$F(k, l) = F_A + (F_B - F_A)(k - k_1)/(k_2 - k_1); \quad F_A = F_1 + (F_2 - F_1)l; \\ F_B = F_3 + (F_4 - F_3)l, \quad (9)$$

где  $\bar{l} = (l - l_1)/(l_2 - l_1)$ ; а  $k_i, l_i, F_i, i = 1, 2, 3, 4$  определены выше; 5) функция  $F$  аппроксимируется поверхностью 2-го порядка, построенной по 6 ближайшим к точке  $(k, l)$  узлами сетки; 6) «двойная» кубическая интерполяция (обобщение соотношений (9)).

При исследовании варианты 1, 2 и 6 сразу были отвергнуты, так как 1 и 2 давали очень большие ошибки, а 6, хотя и обеспечивал самую высокую точность, требовал слишком много времени (в 5—6 раз больше, чем варианты 3 и 4). Вариант 5 был несколько точнее, чем варианты 3 и 4, но времени для счета требовал примерно в два раза больше, чем варианты 3 и 4. Наконец, вариант 4 показывал несколько лучшие результаты, чем вариант 3, и обеспечивал точность интерполяции в рассмотренных нами примерах (см. ниже) 1—2%. Интерполяция в расчетах проводилась способом 4.

Для численного решения системы дифференциальных уравнений использовался метод Адамса в основном 2-го порядка (метод Рунге—Кутта оказался слишком медленным, а метод Эйлера — неточным). Построенная схема оказалась чувствительной к величине шага по времени. Так, при недостаточно малом шаге начиная с некоторого момента появляются отрицательные значения  $F$ , количество которых постепенно увеличивается. Возникновение их связано, по-видимому, и с ошибками вычислений. Если в какой-то момент число отрицательных значений превышает 0,5% общего числа узлов, то в дальнейшем оно начинает лавинообразно нарастать и схема становится неустойчивой. Для предотвращения этого явления начиная с момента, когда число отрицательных значений  $F$  достигает 0,5% общего числа узлов, счет проводится с меньшим шагом по времени, и схема снова становится устойчивой. В таблице приведены для нескольких начальных состояний первоначальная величина шага по времени  $\Delta T_0$ , общее время счета  $T_{\max}$ , количество шагов по времени, средний шаг по времени и примерное общее время счета в часах на ЭВМ ЕС-1022. Как уже было сказано, расчеты проводились для круговой области  $\Omega$  радиуса  $\kappa_0$  (во всех рассмотренных примерах  $\kappa_0 = 4$ ), однако для удобства вычислений использовалась прямоугольная сетка, покрывающая квадрат со стороной  $2\kappa_0$ , «закрывающий» в себе круг  $\Omega$ . Произведения в верхней строке таблицы характеризуют параметры этой сетки, причем первая цифра обозначает число узлов по оси  $l$ , а вторая — по оси  $k$ . Сетка  $97 \times 114$  имеет переменный шаг вдоль оси  $l$  при  $k$  близком к нулю. Видно, что средний шаг может быть в пять раз меньше исходного; это различие уменьшается с увеличением разрешения:

4. В заключение приведем результаты одного из вариантов расчета, когда в качестве начального распределения бралась функция  $F_0 =$

Основные параметры расчетов эволюции спектра энергии

Начальное состояние	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$
Величина шага	$49 \times 49$	$49 \times 49$	$97 \times 114$	$49 \times 49$	$97 \times 97$	$97 \times 114$
$\Delta T_0$	0,02	0,005	0,01	0,1	0,2	0,1
$T_{\max}$	11,0	2,60	3,00	18,25	18,0	15,0
Количество шагов по времени	1113	1100	383	1101	395	336
Средний шаг по времени	0,01	0,0024	0,008	0,017	0,045	0,045
Время счета	~65	~65	~90	~65	~90	~80

$F_1 = A_1 \kappa e^{-\kappa^2}$ ;  $F_2 = F_3 = A_2 \kappa \sin^4 \varphi e^{-\kappa^2}$ ;  $F_4 = F_5 = F_6 = A_3 \kappa \cos^4 \varphi e^{-\kappa^2}$ ;  $A_1, A_2, A_3$  — нормировочные константы, подобранные так, чтобы полная энергия  $\iint F dkd l = 1$ .

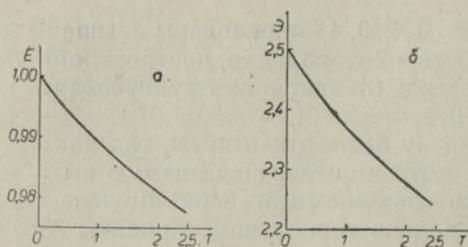


Рис. 1. Изменение полной энергии  $E$  (а) и энтропии  $\mathcal{E}$  (б) со временем.

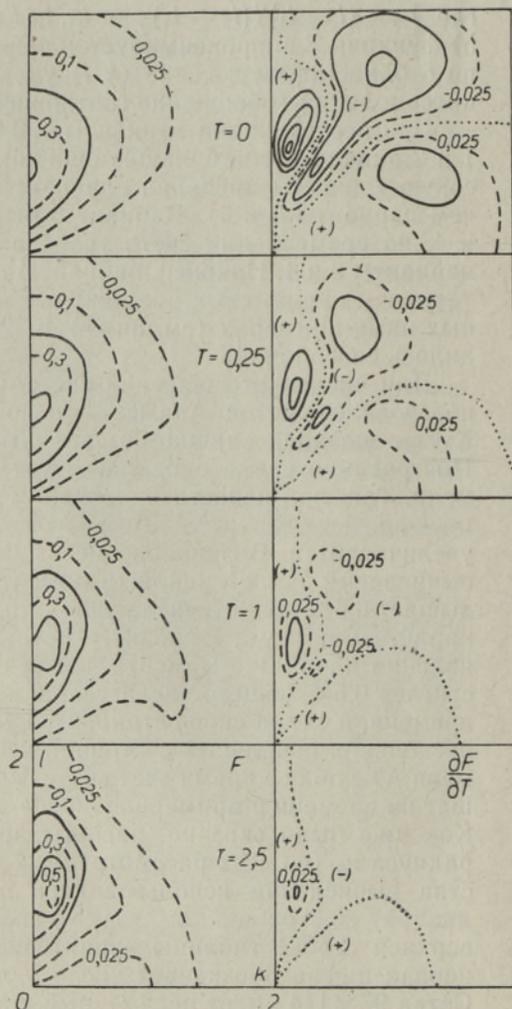


Рис. 2. Эволюция спектра  $F$  (слева) и его временной производной  $\partial F/\partial T$  (справа);  $T$  — безразмерное время.

$= \kappa \sin^4 \varphi \exp(-\kappa^2)$ . Счет велся на сетке  $49 \times 49$  при  $\kappa_0 = 4$ . На рис. 1 изображено поведение полной энергии (а) и энтропии (б) во времени. Как и следовало ожидать, обе эти величины со временем убывают, причем энтропия быстрее, чем энергия. Это нетрудно понять, если вспомнить [8], что поток энергии направлен к малым волновым числам, а поток энтропии — к большим, и соответственно вязкость сильнее влияет на энтрофию, чем на энергию.

На рис. 2 показана временная эволюция спектра  $F$  и его производной  $\partial F/\partial T$ ; в каждой клетке изображена область  $0 \leq k \leq 2$ ;  $0 \leq l \leq 2$ . Основные изолинии (сплошные линии) проведены через каждые 0,2 (слева) и 0,05 (справа). Пунктиром отмечены линии  $\partial F/\partial T = 0$ . Области притока и оттока энергии обозначены символами (+) и (-) соответственно. В начальный момент линии  $\partial F/\partial T = 0$  делят всю область на три части: области притока энергии (I и II), прилегающие к осям  $l$  и  $k$  соответственно, и область оттока энергии (III). Со временем (и довольно быстро) область I сосредоточивается в окрестности оси  $l$ , а область II уменьшается в размере и «прижимается» к оси  $k$  и началу координат; соответственно область оттока III увеличивается. Максимальные значения  $\partial F/\partial T$  в области I существенно превышают аналогичные значения в области II, т. е. в основном энергия переходит из области III в область I. Такой перенос приводит к сильной концентрации энергии вблизи

оси  $l$ , т. е. волновые векторы наиболее энергонесущих спектральных компонент стремятся повернуться в меридиональном направлении (см. также [8]). Это, по-видимому, объясняет тот факт, что скорость переноса энергии монотонно уменьшается со временем, поскольку волны с близкими по направлению волновыми векторами взаимодействуют слабо и в случае коллинеарных волновых векторов взаимодействие вообще отсутствует. Существенно, что временная эволюция других начальных состояний качественно похожа на описанную выше. Причины такого поведения спектров требуют дальнейшего исследования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лонге-Хиггинс М. С., Гилл А. Э. В кн.: Нелинейная теория распространения волн. М., «Мир», 1970, 161—187.
2. Кенион К. В кн.: Нелинейная теория распространения волн. М., «Мир», 1970, 188—197.
3. Резник Г. М., Козлов О. В. Изв. АН СССР, Физ. атмосф. и океана, 1981, 17, № 6, 632—638.
4. Каменкович В. М., Резник Г. М. В кн.: Физика океана, т. 2. Гидродинамика океана. М., «Наука», 1978, 300—358.
5. Марчук Г. И., Лебедев В. И. Численные методы в теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1981.
6. Golberg, M. A. In: Solution Methods for Integral Equations (ed. by M. A. Golberg). New York—London, Plenum Press, 1979, 1—58.
7. Võhandu, L., Tamme, E., Luhi, L. Arvutusmeetodid. I kd., Tln., «Valgus», 1971.
8. Rhines, P. B. J. Fluid Mech., 1975, 69, pt. 3, 417—443.

Институт океанологии им. П. П. Ширшова  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
31/I 1983

Институт термофизики и электрофизики  
Академии наук Эстонской ССР

G. REZNIK, T. SOOMERE

#### UHEST KINEETILISE VÖRRANDI LAHENDAMISE MEETODIST ROSSBY LAINETE PUHUL

Töös on tuletatud meetod nõrgalt interakteeruvate mittelineaarsete Rossby lainete spektri evolutsiooni numbriliseks uurimiseks barotroopses ookeanis  $\beta$ -tasandil kineetilise võrrandi baasil. Meetod tugineb kvadratuuride meetodile ning Adamsi valemitel. Detailselt on valgustatud arvutuste optimeerimise küsimusi. On esitatud arvutuste tulemused peaaegu tsonaalse algspektri  $F_0 = \kappa \sin^4 \varphi \exp(-\kappa^2)$  puhul.

G. REZNIK, T. SOOMERE

#### ON A METHOD FOR SOLVING KINETIC EQUATION FOR ROSSBY WAVES

The spectral evolution of weakly interacting nonlinear Rossby waves in a barotropic ocean on the  $\beta$ -plane described by the kinetic equation, is investigated. A numerical method for computing the evolution of the spectrum is constructed, using the quadrature method and the Adams formulae. The problem of optimizing the computation scheme is analyzed in detail. The evolution of the almost zonal initial spectrum  $F_0 = \kappa \sin^4 \varphi \exp(-\kappa^2)$  is discussed.