

Р. ТЕННО, Х. ОЙТ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДВУХШАГОВОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЧАСТИЧНО НАБЛЮДАЕМЫМ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССОМ

(Представил Н. Алумяэ)

Рассматривается частично наблюдаемый случайный процесс $(x, y) = (x_t, y_t : t = 1, 2)$, определяемый уравнениями

$$x_t = u_t \beta_t^1 + \beta_t^0, \quad y_t = x_t + h_t,$$

где y — наблюдаемый, x — ненаблюдаемый компонент процесса; $\beta = (\beta_t : t = 1, 2)$ — авторегрессионный (первого порядка) случайный процесс, $h = (h_t : t = 1, 2)$ — независимый, невырожденный гауссовый процесс. В [1] решена задача определения управлений u_1^* , $u_2^*(y_1)$, минимизирующих функционал

$$J = M\{(x_1 - x^0)^2 + (x_2 - x^0)^2\}.$$

Здесь исследованы асимптотические свойства оптимального управления u_1^* при стремлении к бесконечности некоторых параметров задачи. Определены условия, когда оптимальное управление аппроксимируется сепарированным управлением. Полученные результаты предлагается использовать при исследовании многошаговых управляемых процессов [2].

1. Задача управления

Пусть частично наблюдаемый управляемый случайный процесс $(\beta, x, y) = (\beta_t, x_t, y_t : t = 1, 2)$ задан уравнениями

$$\beta_t = \mu + \Phi(\beta_{t-1} - \mu) + \alpha_t, \quad \beta_0 = \tilde{\beta}, \quad (1)$$

$$x_t = u_t \beta_t^1 + \beta_t^0, \quad (2)$$

$$y_t = x_t + h_t, \quad (3)$$

где (β, x) — ненаблюдаемый, y — наблюдаемый компонент процесса; x_t — состояние, u_t — управление, $\beta_t = (\beta_t^0, \beta_t^1)^T$ — вектор параметров управляемого объекта; μ — среднее, Φ — диагональная матрица параметров авторегрессии процесса β . Предполагается, что ошибки наблюдения h_t , $t = 1, 2$, импульсы обновления α_t , $t = 1, 2$ и начальное условие $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1)^T$ уравнения (1) независимы попарно и во времени и распределены по невырожденному нормальному закону

$$h_t \sim IN(0, r), \quad \alpha_t \sim IN(0, D), \quad \tilde{\beta} \sim N(\tilde{b}, \tilde{P}).$$

Ставится задача оптимального управления

$$J = M\{(x_1 - x^0)^2 + (x_2 - x^0)^2\} \rightarrow \inf_{u_1, u_2(y_1)}, \quad (4)$$

где M — математическое ожидание, x^0 — эталонная величина. Класс допустимых управлений для $u_2(y_1)$ задан непрерывными функциями.

2. Асимптотические свойства оптимального и сепарированного управления

Задача управления (4) решена в [1]. Доказано, что оптимальное управление u_1^* на первом шаге (далее индекс времени $t = 1$ не указывается) удовлетворяет условиям

$$S_u + R_u = 0, \quad S_{uu} + R_{uu} \geq 0, \quad (5)$$

где S_u , R_u и S_{uu} , R_{uu} — первая и вторая производные от функций $S(u)$, $R(u)$ соответственно. Согласно [1],

$$S = (a_0 + ua_1 - x^0)^2 + G_0 + u^2 G_1, \quad (6)$$

если $T_1 = 0$, то

$$R = P_0 + [(c_0 - x^0)^2 + T_0^2] / (1 + c_1^T K_1^{-1} c_1), \quad (7)$$

если $T_1 \neq 0$, то

$$R = P_0 + (T_0/T_1)^2 \{1 - 2\sqrt{\pi} [L \operatorname{Im} \omega(z) + (Y - L^2/Y) \operatorname{Re} \omega(z)/2]\} P_1. \quad (8)$$

Здесь a, c — оценки (прогнозы) параметров β_1, β_2 , определяемые до момента поступления наблюдений по формулам

$$a = \mu + \Phi(\bar{b} - \mu), \quad c = \mu + \Phi(a - \mu);$$

G, K — ковариации оценок a, c

$$G = D + \Phi P \Phi, \quad K = D + \Phi G \Phi;$$

функции T, P, Y, L, ω определены следующим образом:

$$T = \Phi G v / \sqrt{v^T G v}, \quad v^T = (1, u);$$

$$P = K - T T^T; \quad 2Y^2 = P_1/T_1^2;$$

$$\sqrt{2} L = (c_0 - x^0)/T_0 + \sqrt{2} X, \quad \sqrt{2} X = -c_1/T_1;$$

$$\omega(z) = e^{-z^2} (1 + 2(\pi)^{-1/2} i \int_0^z e^{t^2} dt), \quad z = X + iY.$$

Индексами 0 и 1 обозначены соответственно первая и вторая координаты рассматриваемого вектора: a, c, T, μ (или диагональный элемент матрицы G, P, K, Φ, D).

Если случайный процесс β^1 детерминирован или процесс β независим во времени, то задачи управления и прогноза возмущений β_i^0 или β_i , $t = 1, 2$ разделяются, так как $R_u = 0$. Поэтому оптимальным оказывается сепарированное управление

$$u^0 = -a_1(a_0 - x^0)/(a_1^2 + G_1),$$

определяемое из условий $S_u = 0, S_{uu} > 0$. В общем случае $R_u \neq 0$, в связи с чем возникает вопрос: при каких условиях задача оптимального управления разделяется асимптотически в том смысле, что существует малый параметр $\varepsilon > 0$ такой, что $u_\varepsilon^* \rightarrow b$ и $u_\varepsilon^0 \rightarrow b$ при $\varepsilon \rightarrow 0$? Здесь b — некоторая константа. В случае неразделимости интересуемся асимптотическим поведением оптимального и сепарированного управления. Чтобы найти ответы на эти вопросы, определим скорости роста

функций S_u, R_u при увеличении одного или нескольких параметров из множества $\{x^0, \Phi_i, D_i, \tilde{b}_i, \tilde{P}_i : i = 1, 2\}$, задаваемого постановкой задачи. Воспользуемся стандартным обозначением $\delta_n = O(Q_n)$, где $\{\delta_n : n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность реальных чисел, $\{Q_n : n = 1, 2, \dots\}$ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел такая, что соотношения δ_n/Q_n ограничено. В Приложении показано, что при любом ограниченном управлении

$$S_u(u, Q_n) = O(Q_n^p), \quad (9)$$

причем

1) если $D_{0,n} = O(Q_n^2)$, то $p = 0$;

2) если $|x_n^0| = O(Q_n)$ или $|\Phi_{0,n}| = O(Q_n)$, или $|\tilde{b}_{0,n}| = O(Q_n)$, $\tilde{P}_{0,n} = O(Q_n^2)$, то $p = 1$;

3) если $|\Phi_{1,n}| = O(Q_n)$ или $D_{1,n} = O(Q_n^2)$, или $D_{i,n} = O(Q_n^2)$, $i = 0, 1$, или $|\tilde{b}_{1,n}| = O(Q_n)$, $\tilde{P}_{1,n} = O(Q_n^2)$, или $|\tilde{b}_{i,n}| = O(Q_n)$, $\tilde{P}_{i,n} = O(Q_n^2)$, $i = 0, 1$, то $p = 2$.

Там же показано, что

$$R_u(u, Q_n) = O(Q_n^q) \quad (10)$$

и доказаны леммы 1 и 2.

Лемма 1. 1) Если $|\Phi_{1,n}| = O(Q_n)$ или $|\tilde{b}_{1,n}| = O(Q_n)$, $\tilde{P}_{1,n} = O(Q_n^2)$, то $q = -1$.

2) Если $|x_n^0| = O(Q_n)$ или $|\tilde{b}_{i,n}| = O(Q_n)$, $\tilde{P}_{i,n} = O(Q_n^2)$, $i = 0, 1$, то $q = 2$.

3) Пусть $Y > 3$. Если $D_{1,n} = O(Q_n^2)$, то $q = -2$. Если $D_{i,n} = O(Q_n^2)$, $i = 0, 1$, то $q = 2$.

4) Пусть $|X_n| > 3,9$ или $Y_n > 3$ для каждого $n = 1, 2, \dots$. Если $D_{0,n} = O(Q_n^2)$ или $|\tilde{b}_{0,n}| = O(Q_n)$, $\tilde{P}_{0,n} = O(Q_n^2)$, то $q = 6$. Если $|\Phi_{0,n}| = O(Q_n)$, то $q = 8$.

Лемма 2. Пусть последовательность возмущений β^0 независима. Тогда

1) если $|\Phi_{1,n}| = O(Q_n)$ или $|\tilde{b}_{1,n}| = O(Q_n)$, $\tilde{P}_{1,n} = O(Q_n^2)$ или $|\tilde{b}_{i,n}| = O(Q_n)$, $\tilde{P}_{i,n} = O(Q_n^2)$, $i = 0, 1$, то $q = -2$;

2) пусть $Y > 3$. Если $D_{i,n} = O(Q_n^2)$, $i = 0, 1$, то $q = 0$;

3) пусть $|X_n| > 3,9$ или $Y_n > 3$ для каждого $n = 1, 2, \dots$. Если $D_{0,n} = O(Q_n^2)$, то $q = 2$.

В силу (9) и (10) при всех $Q > 0$ выполняется

$$S_u(u, Q) = Q^p \tilde{S}_u(u, Q), \quad R_u(u, Q) = Q^q \tilde{R}_u(u, Q),$$

где $\tilde{S}_u(u, \cdot)$, $\tilde{R}_u(\cdot, \cdot)$ — ограниченные функции по Q и (u, Q) соответственно. Таким образом, оптимальное управление u_ε^* и сепарированное управление u_ε^0 определяются соответственно из условий

$$\tilde{S}_u(u_\varepsilon, Q) + \varepsilon \tilde{R}_u(u_\varepsilon, Q) = 0, \quad \tilde{S}_{uu} + \varepsilon \tilde{R}_{uu} > 0; \quad (11)$$

$$\tilde{S}_u(u_\varepsilon, Q) = 0, \quad \tilde{S}_{uu} > 0, \quad (12)$$

где $\varepsilon = Q^{q-p}$; \tilde{S}_{uu} , \tilde{R}_{uu} — производные от функций \tilde{S}_u , \tilde{R}_u . В силу лемм 1 и 2 условие $p > q$ выполняется, если к бесконечности стремятся или параметры \tilde{b}_1 , \tilde{P}_1 , или параметр Φ_1 , или D_1 . Данное условие выполняется и в том случае, если процесс возмущений β^0 независим и параметры D_i или \tilde{b}_i , \tilde{P}_i , $i = 0, 1$ стремятся к бесконечности.

Докажем утверждение.

Утверждение 1. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$. Если выполняются условия, при которых $p > q$, то $u_\varepsilon^0 \rightarrow 0$ и $u_\varepsilon^* \rightarrow 0$.

Доказательство. Согласно [1], в принятых условиях как оптимальное управление u_ε^* , так и сепарированное управление u_ε^0 существует при всех $\varepsilon > 0$. Пусть $\{\delta_n\}$ произвольная, сходящаяся к нулю последовательность. Рассмотрим уравнение

$$\tilde{S}_u(u_\varepsilon, \varrho) = \delta_n$$

и обозначим решение этого уравнения через $u_\varepsilon(\delta_n)$. Очевидно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_\varepsilon(\delta_n) = u_\varepsilon^0 = 0.$$

Так как $\tilde{R}_u(u_\varepsilon, \varrho)$ — ограниченная функция, то отсюда вытекает, что $u_\varepsilon^* \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Утверждение доказано.

Перечислим условия (согласно леммам 1 и 2, они соответствуют случаю $p < q$).

(А.1) К бесконечности стремится или параметр x^0 , или параметры \tilde{b}_0 , \tilde{P}_0 , или

(А.2) параметр Φ_0 , или

(А.3) один параметр из множества $\{x^0, \Phi_0, \tilde{b}_0\}$.

Очевидно, что

$$R(u, \varrho) = \varrho^m \tilde{R}(u, \varrho),$$

где $\tilde{R}(u, \varrho)$ — ограниченная функция. В условиях (А.1), (А.2) $m > 0$. Перечислим гипотезы.

(Г.1) Функция $\tilde{R}(u, \varrho)$ строго возрастает на интервале $(-\infty, l(\varrho))$ и строго убывает на интервале $(l(\varrho), \infty)$ для каждого $\varrho > \varrho_0$.

(Г.2) Функция $\tilde{R}(u, \varrho)$ строго убывает на интервале $(-\infty, 0)$ и строго возрастает на интервале $(0, \infty)$ для каждого $\varrho > \varrho_1$.

Здесь ϱ_i — положительная константа, $l(\varrho)$ — ограниченная функция. В случае выполнения условия (А.1) или (А.2) гипотезы (Г.1) или (Г.2) соответственно подтверждаются численным экспериментом. Докажем утверждение.

Утверждение 2. Пусть $1/\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \rightarrow \infty$. Тогда

1) если выполняются условия (А.1) и (Г.1), то $|u_\varepsilon^*| \rightarrow \infty$, а если (А.2) и (Г.2) — $u_\varepsilon^* \rightarrow 0$;

2) если выполняется условие (А.3), то $|u_\varepsilon^0| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Если выполняется условие (А.1), то согласно (Г.1), $\tilde{R}(u, \varrho) \rightarrow \min$ при $u \rightarrow \infty$ или $u \rightarrow -\infty$. Так как функция $\tilde{S}_u(u_\varepsilon, \varrho)$ ограничена в силу решаемости задачи (11) и ограниченности предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \tilde{S}_u(u_\varepsilon, \varrho) = B,$$

то из (11) можно видеть, что $|u_\varepsilon^*| \rightarrow \infty$.

Если выполняется условие (А.2), то согласно (Г.2), $\tilde{R}(u, \varrho) \rightarrow \min$ при $u \rightarrow 0$. Так как функция $\tilde{S}_u(u_\varepsilon, \varrho)$ ограничена, то отсюда вытекает, что $u_\varepsilon^* \rightarrow 0$.

Если выполняется условие (А.3), то $|u_\varepsilon^0| \rightarrow \infty$, что доказывается аналогично утверждению 1 при помощи стремящейся к бесконечности последовательности $\{\delta_n\}$.

3. Обсуждение результатов

Интерпретируем полученные выше результаты в трех случаях:

1. Пусть $p > q$. Тогда по мере уменьшения параметра ε как оптимальное, так и сепарированное управление стремятся к нулю. Поэтому, если ε достаточно мал, то оптимальное управление аппроксимируется сепарированным управлением. Это соблюдается в том случае, если случайный процесс β^1 существенно нестационарный, т. е. $|\Phi_1| > 1$, или существенно недетерминированный (непредсказуемый), т. е. величина дисперсии D_1 достаточно большая, или если $M\{\beta_1^2\}$ — неопределенность начальных условий процесса β^1 — достаточно большая. А также в том случае, если процесс возмущений β^0 независим и дисперсии D_i , $i = 0, 1$ или $M\{\beta^2\}$ — неопределенность начальных условий случайного процесса β — достаточно большие.

2. Пусть $p < q$. Тогда возможны два случая:

а) по мере роста параметра ε как оптимальное, так и сепарированное управление стремятся к бесконечности или

б) оптимальное управление стремится к нулю, а сепарированное — к бесконечности.

Таким образом, если нашей целью является максимизация (минимизация) ненаблюдаемого выходного процесса x или если $M\{\beta_0^2\}$ — неопределенность начальных условий процесса β^0 — большая, то оптимальное управление аппроксимируется сепарированным управлением и не аппроксимируется, если процесс возмущений β^0 существенно нестационарный.

3. Пусть $p = q$. Тогда задача управления не имеет малого (большого) параметра $\varepsilon = 1$; точность аппроксимации оптимального управления сепарированным не зависит от условий задачи, при которых $p = q$. Таким, например, являются влияние параметров \tilde{b}, \tilde{P} и, если процесс возмущений β^0 зависим, влияние ковариаций D_i , $i = 0, 1$ процесса обновления.

Авторы выражают благодарность Т. Тобиасу за полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство лемм 1 и 2

1. Доказываем следующие утверждения:

Лемма 3. Пусть $Y > 3$. Если $|X_n| = O(q_n^{-1})$, то $\operatorname{Re} \omega(z_n) = O(1)$, $\operatorname{Im} \omega(z_n) = O(q_n^{-1})$. Пусть $|X_n| > 3,9$ или $Y_n > 3$ для каждого $n = 1, 2, \dots$. Если $|X_n| = O(q_n)$ и $Y_n = O(q_n)$, то $\operatorname{Re} \omega(z_n) = O(q_n^{-1})$, $\operatorname{Im} \omega(z_n) = O(q_n^{-1})$.

Доказательство. Пусть $|X| > 3,9$ или $Y > 3$. Тогда, согласно [3], в этой области функция $\omega(z)$ ограничена и аппроксимируется с большой точностью ($|\varepsilon| < 2 \cdot 10^{-6}$) при помощи полинома Эрмита третьего порядка

$$\omega(z) = iz \sum_{j=1}^3 H_j / (z^2 - w_j) + \varepsilon, \quad (\text{П. 1})$$

где w_j, H_j — нули и весовые множители полинома. Используя (П.1), убеждаемся в том, что

$$\operatorname{Re} \omega(z) \approx \sum_{j=1}^3 H_j (EX - F_j Y) / (E^2 + F_j^2),$$

$$\operatorname{Im} \omega(z) \approx \sum_{j=1}^3 H_j (F_j X + EY) / (E^2 + F_j^2),$$

где $F_j = X^2 - Y^2 - \omega_j$, $E = 2XY$.

Если $Y > 3$ и $|X_n| = O(Q_n^{-1})$, то $F_j = O(1)$, $E = O(Q_n^{-1})$. Поэтому

$$\operatorname{Re} \omega(z_n) = O(1); \quad \operatorname{Im} \omega(z_n) = O(Q_n^{-1}).$$

Второе утверждение леммы доказывается аналогичным образом.

2. Дифференцируем по u функцию (6)

$$0,5S_u = (a_0 + ua_1 - x^0) a_1 + uG_1 \quad (\text{П. 2})$$

и функцию (8). После несложных, но громоздких преобразований получим

$$0,5R_u = \Lambda_1 + 2\sqrt{\pi} (\Lambda_2 \operatorname{Im} \omega(z) + \Lambda_3 \operatorname{Re} \omega(z)), \quad (\text{П. 3})$$

где $\Lambda_i = \lambda_i T_0^2 / u$. Коэффициенты λ_i определены следующим образом:

$$\lambda_1 = 1 - 2Y^2 - Q[2LX(1 - 2Y^2) + (Y^2 - L^2)(2Y^2 + 1)],$$

$$\lambda_2 = Y^2(L + X) - Q\{0,5X(4Y^2 + 1)(L^2 - Y^2) + L[2Y^2(X^2 - Y^2 - 1) - 1]\},$$

$$\lambda_3 = Y\{Y^2 - LX - Q[(Y^2 - L^2)(X^2 - Y^2 - 1 - 0,25/Y^2) + L(X(4Y^2 + 1) - 1)]\}.$$

Здесь $Q = (r + G_0)/(r + G_0 + u^2 G_1)$.

Если $\Phi_0 = 0$, то функция (8) упрощается. Поэтому

$$R_u = (\mu_0 - x^0)^2 Q \{2Y^2 + 1 - \sqrt{\pi} [X(4Y^2 + 1) \operatorname{Im} \omega(z) + (2Y(Y^2 - X^2 + 1) + 0,5/Y) \operatorname{Re} \omega(z)]\} / u. \quad (\text{П. 4})$$

Условия	$a_{i,n}$	$G_{i,n}$	$S_{u,n}$	$T_{i,n}$	$P_{1,n}$	X_n	Y_n	Q_n	$\frac{R_{u,n}}{\Phi_0=0}$	L_n	$\Lambda_{1,n}$	$\Lambda_{2,n}$	$\Lambda_{3,n}$	$R_{u,n}$
$ \Phi_{0,n} = O(Q_n)$	1 2 0 0		1 2 -1	2 0	0 1	1 1	0 -	- 1	8 9	9 8				
$ \Phi_{1,n} = O(Q_n)$	0 0 1 2		2 -1 2	4 0	0 0	-2 -2	-2 1	-2 -1	-1 -1					
$D_{0,n} = O(Q_n^2)$	0 2 0 0		0 1 -1	0 1	1 1	0 2	2 1	6 7	7 6					
$D_{1,n} = O(Q_n^2)$	0 0 0 2		2 -1 1	2 -1	0 -2	-2 1	-2 -1	-2 -2						
$D_{i,n} = O(Q_n^2)$, $i=0,1$	0 2 0 2		2 1 1	2 -1	0 0	0 -1	2 1	2 2						
$ \tilde{\Phi}_{0,n} = O(Q_n)$	1 2 0 0		1 1 -1	0 1	1 1	0 -	- 1	6 7	7 6					
$ \tilde{\Phi}_{1,n} = O(Q_n)$	0 0 1 2		2 -1 1	2 0	0 0	-2 -2	1 -2	-1 -1						
$ \tilde{\Phi}_{i,n} = O(Q_n)$, $P_{i,n} = O(Q_n^2)$, $i=0,1$	1 2 1 2		2 1 1	2 0	0 0	0 -2	0 2	2 2	2 2					
$ x_n^0 = O(Q_n)$	0 0 0 0		1 0 0	0 0	0 0	0 0	2 1	2 2	2 2					

3. При помощи выражений (П.2)—(П.4) и утверждений леммы 3 можно показать, что при любом ограниченном управлении

$$S_u(u, q_n) = O(q_n^p)$$

и что при ненулевых управлениях

$$R_u(u, q_n) = O(q_n^q),$$

где p и q в зависимости от изменяемых параметров выражены по таблице.

Если $u = 0$, то $T_1 = 0$ и, согласно (7), $R_u(0, q_n) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tenno P. Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 32, № 1, 11—17 (1983).
2. Methods and applications in adaptive control. Proc. Intern. Symp. Bochum, 1980 (ed. by H. Unbehauen). Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1980.
3. Справочник по специальным функциям (под ред. М. Абрамовича, И. Стигана). М., «Наука», 1979.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
30/XII 1982

R. TENNO, H. OIT

OSALISELT VAADELDAVA JUHUSLIKU PROTSESSI OPTIMAALJUHTIMISÜLESANDE LAHENDI OMADUSI

On uuritud ühe mittesepareeruva juhtimisülesande lahendi asümptootilisi omadusi, kui ülesande mõningad parameetrid lähenevad lõpmatusale, ning leitud tingimused, mille puhul separeeritud juhtimine aproksimeerib optimaalset.

R. TENNO, H. OIT

LARGE PARAMETER PROPERTIES OF TWO-STEP OPTIMAL CONTROL OF THE PARTIALLY OBSERVABLE STOCHASTIC PROCESS

It is assumed that a partially observable stochastic process $(\beta_t, x_t, y_t : t=1, 2)$ is described by the equations (1)—(3), where (y_t) is an observable process; (β_t) , (x_t) are an unobservable process; α_t and h_t are independent nonsingular Gaussian variables. Let $(u_1^*, u_2^*(y_1))$ be a sequence of optimal controls which minimize a functional (4), and let $u_1^0, u_2^0(y_1)$ be (separated) controls which minimize the functions

$$J_1 = M(x_1 - x^0)^2, \quad J_2 = M(x_2 - x^0)^2,$$

respectively. It is known that $u_2^*(y_1) = u_2^0(y_1)$. For the first step we have shown the following large parameter properties of the optimal control u_1^* and separated control u_1^0 : Let $1/q > 0$ and $q \rightarrow \infty$.

- a) If $M\tilde{\beta}_1 = q$, $\text{cov } \tilde{\beta}_1 = q^2$ or $\Phi_1 = q$ or $D_1 = q^2$, then $u_1^*(q) \rightarrow 0$ and $u_1^0(q) \rightarrow 0$.
- b) If $x^0 = q$ or $M\tilde{\beta}_0 = q$, $\text{cov } \tilde{\beta}_0 = q^2$, then $|u_1^*(q)| \rightarrow \infty$ and $|u_1^0(q)| \rightarrow \infty$.
- c) If $\Phi_0 = q$, then $u_1^*(q) \rightarrow 0$ and $|u_1^0(q)| \rightarrow \infty$.