EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 32. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1983, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 32
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1983, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1983.3.02 УДК 517.1 : 517.52 : 531.52

Р. РЫЫМ

ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ В ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ФУНКЦИЙ

(Представил Я. Эйнасто)

В [1] при проектировании уравнений Навье—Стокса в фурье-базис был введен ряд конечномерных пространств. В настоящей работе рассматриваются обобщения этих пространств на бесконечный случай.

В первых трех разделах изучаются разложения пространств периодических функций на ортогональные подпространства соленоидальных векторов и градиентов и выясняется, в каких пространствах соленоидальных функций краевые условия выделяют замкнутые подпространства. Так как рассмотрение проводится на языке «ортогональных базисов», то одновременно указываются и способы построения базисов в этих пространствах.

В четвертом разделе устанавливается связь построенных пространств с различными пространствами Соболева. Это, с одной стороны, дает возможность указать гладкие (дифференцируемые в классическом смысле) множества, всюду плотные в пространствах, первоначально построенных как линейные оболочки ортогональных базисов, а с другой — установить связь построенных пространств с пространствами, обычно рассматриваемыми в теоретической гидродинамике [2–4], и тем самым перенести ранее полученные строгие математические результаты на динамические системы работы [1].

В настоящей статье будем рассматривать комплексные вектор-функции $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{e}^1u^1(\mathbf{x})+\mathbf{e}^2u^2(\mathbf{x})$$

($\mathbf{e}^\alpha$, $\alpha=1, 2$ — орты в направлениях координатных осей) действительного аргумента

$$\mathbf{x}=\mathbf{e}^1x^1+\mathbf{e}^2x^2$$

в области

$$\Omega=\{0<x^1<a^{-1},\ 0<x^2<1\}, \tag{1}$$

где $0<a\leqslant 1$ — заданная постоянная. Через Γ обозначаем контур области Ω, $\Omega+\Gamma=\overline{\Omega}$, а через Γ_1 — замкнутое многообразие, состоящее из верхней и нижней границ Ω:

$$\Gamma_1=\{0\leqslant x^1\leqslant a^{-1},\ x^2=0\}\cup\{0\leqslant x^1\leqslant a^{-1},\ x^2=1\}.$$

1. Разложение пространств периодических функций на подпространства соленоидальных векторов и градиентов

Система функций

$$\mathbf{f}^\alpha_{mn}=\mathbf{e}^\alpha f_{mn}=\mathbf{e}^\alpha\sqrt{a}\exp(i\mathbf{k}_{mn}\mathbf{x}),\quad \alpha=1,\ 2;\ m,\ n=0,\ \pm1,\ \ldots, \tag{2}$$
$$\mathbf{k}_{mn}=\mathbf{e}^12\pi am+\mathbf{e}^22\pi n$$

является базисом в пространстве $L_2(\Omega)$ с нормой и скалярным произведением

$$\|\mathbf{u}\|_{L_2}=\sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}, \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v})=\int_\Omega \mathbf{u}\overline{\mathbf{v}}\, dx.$$

Образуем в множестве функций из $L_2(\Omega)$ гильбертовы пространства H^q, $q \geqslant 0$ следующим образом

$$\mathbf{u} \in H^q: \begin{cases} \mathbf{u}=\sum\limits_{\alpha, m, n} u_{mn}^\alpha \mathbf{f}_{mn}^\alpha, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_q=\sum\limits_{\alpha, m, n} u_{mn}^\alpha \overline{v_{mn}^\alpha}(1+\mathbf{k}_{mn}^2)^q, \\ \|\mathbf{u}\|_q=\sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_q}. \end{cases} \tag{3}$$

По определению, система (2) является в каждом H^q ортогональным базисом

$$(\mathbf{f}_{mn}^\alpha, \mathbf{f}_{kl}^\beta)_q=\delta^{\alpha\beta}\delta_{mk}\delta_{nl}(1+\mathbf{k}_{mn}^2)^q,$$

а коэффициенты $u_{mn}{}^\alpha$ вектора $u \in H^q (q \geqslant 0)$ вычисляются по формуле

$$u_{mn}^\alpha=(\mathbf{u}, \mathbf{f}_{mn}^\alpha)=\int \mathbf{u}\overline{\mathbf{f}_{mn}^\alpha}\, dx.$$

Определение (3) можно распространить на отрицательные q, в этом случае $H^{-|q|}$ является пространством обобщенных функций, сопряженным с $H^{|q|}$. Справедливы вложения

$$H^q \subset H^r \subset H^0=L_2(\Omega) \subset H^{-r} \subset H^{-q}, \qquad q>r>0,$$

причем каждое пространство вложено в последующее плотно и непрерывно.

Заменим (2) новым базисом

$$\begin{gathered} \mathbf{g}_{mn}=(\mathbf{k}_{mn}/|\mathbf{k}_{mn}|) f_{mn}, \qquad m \text{ или } n \neq 0, \\ \mathbf{s}^0=\mathbf{e}^2\sqrt{a}=\mathbf{f}_{00}^2, \\ \mathbf{s}_{mn}=\mathbf{e}_{mn} f_{mn}, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_{00}=\alpha_{00}\mathbf{e}^1=\mathbf{e}^1, \\ \mathbf{e}_{mn}=\mathbf{e}^1\alpha_{mn}+\mathbf{e}^2\beta_{mn}=(\mathbf{e}^1 n-\mathbf{e}^2 am)/\sqrt{a^2m^2+n^2}. \end{gathered} \tag{5}$$

Легко проверить следующее: а) переход от системы (2) к системе (4) однозначен и обратим; б) система (4) принадлежит пространству H^q и является там ортогональной. Таким образом, (4) действительно является ортогональным базисом в каждом H^q. Скалярное произведение в H^q можно с использованием базиса (4) вычислить по формуле

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_q= & (\mathbf{u}, \mathbf{s}^0)\overline{(\mathbf{v}, \mathbf{s}^0)}+(\mathbf{u}, \mathbf{s}_{00})\overline{(\mathbf{v}, \mathbf{s}_{00})}+ \\ & +\sum_{m,n}{}' [(\mathbf{u}, \mathbf{s}_{mn})\overline{(\mathbf{v}, \mathbf{s}_{mn})}+(\mathbf{u}, \mathbf{g}_{mn})\overline{(\mathbf{v}, \mathbf{g}_{mn})}](1+\mathbf{k}_{mn}^2)^q, \end{aligned} \tag{6}$$

где штрих у Σ означает, что в этой сумме отсутствует слагаемое с $m=n=0$.

Векторы $\mathbf{g}_{mn}$ являются несоленоидальными градиентами

$$\mathbf{g}_{mn} = -i \operatorname{grad} f_{mn}/|\mathbf{k}_{mn}|, \qquad (7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{g}_{mn} = i|\mathbf{k}_{mn}| f_{mn},$$

а $\mathbf{s}^0$, $\mathbf{s}_{mn}$ — соленоидальными векторами

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{s}^0 = 0, \\ &\operatorname{div} \mathbf{s}_{mn} = i(\mathbf{e}_{mn}\mathbf{k}_{mn}) f_{mn} = 0. \end{aligned} \qquad (8)$$

Следовательно, H^q можно разложить на ортогональные (в метрике H^q) подпространства

$$H^q = S^q \oplus G^q \qquad (9)$$

соленоидальных векторов

$$S^q = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} = \mathbf{s}^0 u^0 + \sum_{m,n} \mathbf{s}_{mn} u_{mn}\} \qquad (10)$$

и градиентов

$$G^q = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} = \sum_{m,n}' \mathbf{g}_{mn} v_{mn}\}. \qquad (11)$$

Коэффициенты u^0, u_{mn} вектора $\mathbf{u} \in S^q$ и коэффициенты v_{mn} вектора $\mathbf{v} \in G^q$ вычисляются по формулам

$$u^0 = (\mathbf{u}, \mathbf{s}^0), \quad u_{mn} = (\mathbf{u}, \mathbf{s}_{mn}), \quad v_{mn} = (\mathbf{v}, \mathbf{g}_{mn}),$$

а скалярные произведения и нормы в этих пространствах, согласованные с (7), имеют вид

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S^q : (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{S^q} = (\mathbf{u}, \mathbf{s}^0)\,\overline{(\mathbf{v}, \mathbf{s}^0)} + \sum_{m,n} (\mathbf{u}, \mathbf{s}_{mn})\,\overline{(\mathbf{v}, \mathbf{s}_{mn})}\,(1 + \mathbf{k}_{mn}^2)^q,$$

$$\|\mathbf{u}\|_{S^q} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{S^q}};$$

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G^q : (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{G^q} = \sum_{m,n}' (\mathbf{u}, \mathbf{g}_{mn})\,\overline{(\mathbf{v}, \mathbf{g}_{mn})}\,(1 + \mathbf{k}_{mn}^2)^q,$$

$$\|\mathbf{u}\|_{G^q} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{G^q}}.$$

Идея разложения (9) с использованием дифференциальных свойств базиса (4) заимствована из квантовой электродинамики [5]. Заметим, что в случае $q = 0$ разложение (9) отличается от разложений $L_2(\Omega)$, обычно рассматриваемых в теории поля [6, 7].

2. Пространства соленоидальных векторов, принимающих нулевые значения на боковых границах области

Рассмотрим в S^q векторы, превращающиеся в нуль на Γ_1

$$[\mathbf{s}^0 u^0 + \sum_{m,n} \mathbf{s}_{mn} u_{mn}]_{x^2=0,\, x^2=1} = 0 \quad \forall x^1.$$

Принимая во внимание определение $\mathbf{s}^0$, $\mathbf{s}_{mn}$, запишем это равенство в виде

$$\sqrt{a}\,[\mathbf{e}^2 u^0 + \sum_m \exp(i2\pi a m x^1) \sum_n (\mathbf{e}^1 \alpha_{mn} + \mathbf{e}^2 \beta_{mn}) u_{mn}] = 0.$$

Учитывая линейную независимость функций $\exp(i2\pi a m x^1)$ и взаимную ортогональность $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, получим условия, которым должны удовлетворять коэффициенты u^0, u_{mn}:

$$u^0=0, \quad \sum_n \alpha_{mn} u_{mn}=0, \quad \sum_n \beta_{mn} u_{mn}=0 \quad \forall m.$$

Если ввести функционалы $\mathfrak{l}^0$, $\mathfrak{a}_m$, $\mathfrak{b}_m$, $m=0, \pm 1, \ldots$,

$$\begin{gathered} \langle \mathfrak{l}^0, \mathfrak{u}\rangle = (\mathfrak{u}, \mathfrak{s}^0), \\ \langle \mathfrak{a}_m, \mathfrak{u}\rangle = \sum_n \alpha_{mn} (\mathfrak{u}, \mathfrak{s}_{mn}), \qquad \langle \mathfrak{b}_m, \mathfrak{u}\rangle = \sum_n \beta_{mn} (\mathfrak{u}, \mathfrak{s}_{mn}), \end{gathered} \tag{12}$$

то эти условия можно записать так:

$$\langle \mathfrak{l}^0, \mathfrak{u}\rangle = 0, \quad \langle \mathfrak{a}_m, \mathfrak{u}\rangle = 0, \quad \langle \mathfrak{b}_m, \mathfrak{u}\rangle = 0 \quad \forall m. \tag{13}$$

Особый интерес представляют те пространства S^q, в которых уравнения (13) выделяют замкнутые подпространства. Как известно [8], для этого необходимо и достаточно, чтобы функционалы $\mathfrak{l}^0$, $\mathfrak{a}_m$, $\mathfrak{b}_m$ были ограничены в совокупности.

Т е о р е м а 1. *Система функционалов* $\{\mathfrak{l}^0, \mathfrak{a}_m, \mathfrak{b}_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ *ограничена в пространствах* S^q *при* $q > 1/2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\mathfrak{l}^0$ ограничен в S^0, а $S^q \subset S^0$ при $q>0$, то необходимо проверить ограниченность $\mathfrak{a}_m$, $\mathfrak{b}_m$. Используя неравенство Коши—Буняковского, получим оценки

$$|\langle \mathfrak{a}_m, \mathfrak{u}\rangle| \leqslant [\sum_n \alpha_{mn}^2/(1+\mathfrak{k}_{mn}^2)^q \sum_n |(\mathfrak{u}, \mathfrak{s}_{mn})|^2 (1+\mathfrak{k}_{mn}^2)^q]^{1/2} \leqslant c_q \|\mathfrak{u}\|_{S^q},$$

$$|\langle \mathfrak{b}_m, \mathfrak{u}\rangle| \leqslant [\sum_n \beta_{mn}^2/(1+\mathfrak{k}_{mn}^2)^q \sum_n |(\mathfrak{u}, \mathfrak{s}_{mn})|^2 (1+\mathfrak{k}_{mn}^2)^q]^{1/2} \leqslant d_q \|\mathfrak{u}\|_{S^q}$$

(в случае $m=0$ имеем $b_0 \equiv 0$, и второе неравенство отпадает). Принимая во внимание определение α_{mn}, β_{mn} (см. (5)), имеем

$$\left.\begin{aligned} c_q^2 &= \sum_n n^2 (a^2m^2+n^2)^{-1} (1+\mathfrak{k}_{mn}^2)^{-q} \\ d_q^2 &= \sum_n a^2m^2 (a^2m^2+n^2)^{-1} (1+\mathfrak{k}_{mn}^2)^{-q} \end{aligned}\right\} \leqslant \sum_n (1+\mathfrak{k}_{mn}^2)^{-q} \leqslant$$
$$\leqslant 1 + 2^{1-2q} \pi^{-2q} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2q}.$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} < \infty, \quad \text{если} \quad \alpha > 1, \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} = \infty, \quad \text{если} \quad \alpha \leqslant 1,$$

то c_q, d_q ограничены при $q>1/2$, не зависящей от m постоянной. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. *Так как* S^q — *гильбертовы пространства, то при* $q > 1/2$ *существуют единственные элементы* $\mathfrak{a}_m^{(q)}$, $\mathfrak{b}_m^{(q)}$ *такие, что*

$$\langle \mathfrak{a}_m, \mathfrak{u}\rangle = (\mathfrak{u}, \mathfrak{a}_m^{(q)})_{S^q}, \quad \langle \mathfrak{b}_m, \mathfrak{u}\rangle = (\mathfrak{u}, \mathfrak{b}_m^{(q)})_{S^q} \quad \forall \mathfrak{u} \in S^q.$$

Эти элементы имеют вид

$$\mathfrak{a}_m^{(q)} = \sum_n \mathfrak{s}_{mn}(\mathrm{x}) \alpha_{mn}/(1+\mathfrak{k}_{mn}^2)^q, \quad \mathfrak{b}_m^{(q)} = \sum_n \mathfrak{s}_{mn}(\mathrm{x}) \beta_{mn}/(1+\mathfrak{k}_{mn}^2)^q \tag{14}$$

и являются взаимно ортогональными (а также ортогональными вектору $\mathfrak{s}^0$) как в S^q, так и в $L_2(\Omega)$.

З а м е ч а н и е. Легко проверить, что $\mathfrak{b}_m$ ограничены в S^q уже при $q > -1/2$.

Определим пространства U^q, $q > 1/2$, следующим образом

$$\mathbf{u} \in U^q: \begin{cases} \mathbf{u} \in S^q, \\ \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{b}_m, \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \forall m, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{s}^0) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Изложенное показывает, что U^q является подпространством S^q и состоит из соленоидальных периодических функций, принимающих на Γ_1 нулевые значения. Если разложить S^q на ортогональные (в метрике S_q или H^q) подпространства

$$S^q = U^q \oplus W^q,$$

то, как вытекает из следствия 1, функции $\{\mathbf{s}^0, \mathbf{a}_m^{(q)}, \mathbf{b}_m^{(q)}\}_{m=-\infty}^{\infty}$ образуют базис в W^q.

Знание базиса в ортогональном дополнении W^q позволяет легко построить базисы и в U^q. Это можно сделать, построив базисы в последовательности конечномерных пространств $U(M, N) \subset U(M+1, N+1) \subset \ldots \subset U^q$:

$$\mathbf{u} \in U(M, N) = S(M, N) \cap U^q: \begin{cases} \mathbf{u} \in S(M, N), \\ \sum\limits_{n=-N}^{N} \alpha_{mn} u_{mn} = 0, \\ \sum\limits_{n=-N}^{N} \beta_{mn} u_{mn} = 0, \end{cases} \tag{16}$$

где

$$S(M, N) = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} = \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-N}^{N} \mathbf{s}_{mn} u_{mn}\} \subset S^q. \tag{17}$$

То, что построенная таким образом система будет базисом в U^q, вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Множество* $\bigcup\limits_{M,N} U(M, N)$ *плотно в пространстве* U^q, *если* $q > 1/2$.

Доказательство. Так как $U(M, N) \subset U^q \subset S^q$, то достаточно показать, что произвольный вектор $\mathbf{w} \subset S^q$, ортогональный ко всем подпространствам $U(M, N)$, принадлежит ортогональному дополнению

$$W^q = S^q \setminus U^q.$$

Условие $\mathbf{w} \perp U(M, N)$ означает

$$\sum_{|m| \leqslant M} \sum_{|n| \leqslant N} w_{mn} \overline{u_{mn}} (1 + \mathrm{k}_{mn}^2)^q = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in U(M, N).$$

Сравнивая это равенство с условиями $\sum\limits_{|n| \leqslant N} \alpha_{mn} \overline{u_{mn}} = \sum\limits_{|n| \leqslant N} \beta_{mn} \overline{u_{mn}} = 0$ $\forall |m| \leqslant M$, , заключаем, что коэффициенты w_{mn} имеют при $|m| \leqslant M$, $|n| \leqslant N$ вид

$$w_{mn} = (p_m \alpha_{mn} + r_m \beta_{mn}) / (1 + \mathrm{k}_{mn}^2)^q, \tag{18}$$

где p_m, r_m — некоторые постоянные. Но поскольку $\mathbf{w}$ ортогонален каждому $U(M, N)$ и M, N могут быть сколь угодно большими, (18) имеет место при произвольных m, n. Итак,

$$\mathbf{w} = \sum_{m, n} \mathbf{s}_{mn} (p_m \alpha_{mn} + r_m \beta_{mn}) / (1 + \mathrm{k}_{mn}^2)^q =$$

$$= \sum_m (p_m \mathbf{a}_m^{(q)} + r_m \mathbf{b}_m^{(q)}) \in W^q.$$

Лемма доказана.

3. Пространства соленоидальных векторов, принимающих нулевые значения на границе области

Рассматривая в S^q векторы

$$\mathbf{u} = \mathbf{s}^0 u^0 + \sum_{m,n} \mathbf{s}_{mn} u_{mn},$$

принимающие нулевые значения на Г, получим для $\mathbf{u}$ условия

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{l}^0, \mathbf{u}\rangle = 0, \quad \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{u}\rangle = 0, \quad \langle \mathbf{b}_m, \mathbf{u}\rangle = 0 \quad \forall m, \\ &\langle \mathbf{l}^1, \mathbf{u}\rangle = 0, \quad \langle \mathbf{c}_n, \mathbf{u}\rangle = 0, \quad \langle \mathbf{d}_n, \mathbf{u}\rangle = 0 \quad \forall n, \end{aligned} \tag{19}$$

где первая группа уравнений совпадает с (13), а вторая группа обусловлена условиями $\mathbf{u}|_{x^1=0} = \mathbf{u}|_{x^1=a^{-1}} = 0$. Новые функционалы $\mathbf{l}^1$, $\mathbf{c}_n$, $\mathbf{d}_n$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{l}^1, \mathbf{u}\rangle = (\mathbf{u}, \mathbf{s}_{00}), \\ &\langle \mathbf{c}_n, \mathbf{u}\rangle = \sum_m \alpha_{mn} (\mathbf{u}, \mathbf{s}_{mn}), \\ &\langle \mathbf{d}_n, \mathbf{u}\rangle = \sum_m \beta_{mn} (\mathbf{u}, \mathbf{s}_{mn}). \end{aligned}$$

Теорема 2. *Функционалы* $\mathbf{l}^1$, $\mathbf{c}_n$, $\mathbf{d}_n$ *ограничены в совокупности в пространствах* S^q *при* $q > 1/2$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Из теорем 1 и 2 следует, что условия (19) определяют при $q > 1/2$ подпространство $V^q \subset S^q$:

$$\mathbf{u} \in V^q : \begin{cases} \mathbf{u} \in S^q, \\ \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{b}_m, \mathbf{u}\rangle = 0 \quad \forall m, \\ \langle \mathbf{c}_n, \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{d}_n, \mathbf{u}\rangle = 0 \quad \forall n, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{s}^0) = (\mathbf{u}, \mathbf{s}_{00}) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Существуют единственные элементы $\mathbf{c}_n^{(q)}$, $\mathbf{d}_n^{(q)}$ такие, что

$$\langle \mathbf{c}_n, \mathbf{u}\rangle = (\mathbf{u}, \mathbf{c}_n^{(q)})_{S^q}, \quad \langle \mathbf{d}_n, \mathbf{u}\rangle = (\mathbf{u}, \mathbf{d}_n^{(q)})_{S^q} \quad \forall \mathbf{u} \in S^q, \quad q > 1/2.$$

Эти элементы имеют вид

$$\mathbf{c}_n^{(q)} = \sum_m \mathbf{s}_{mn}(\mathbf{x}) \alpha_{mn} / (1 + \mathrm{k}_{mn}^2)^q, \quad \mathbf{d}_n^{(q)} = \sum_m \mathbf{s}_{mn}(\mathbf{x}) \beta_{mn} / (1 + \mathrm{k}_{mn}^2)^q. \tag{21}$$

Они взаимно ортогональны (а также ортогональны $\mathbf{s}_{00}$) как в S^q, так и в $L_2(\Omega)$. Вместе с тем $\mathbf{s}_{00}$, $\mathbf{c}_n^{(q)}$, $\mathbf{d}_n^{(q)}$ не ортогональны всем функциям $\mathbf{s}_0$, $\mathbf{a}_m^{(q)}$, $\mathbf{b}_m^{(q)}$, поэтому система $\{\mathbf{s}^0, \mathbf{s}_{00}, \mathbf{a}_m^{(q)}, \mathbf{b}_m^{(q)}, \mathbf{c}_n^{(q)}, \mathbf{d}_n^{(q)}\}$ является фундаментальной в пространстве

$$T^q = S^q \backslash V^q,$$

но не образует там ортогонального базиса. Справедлива

Лемма 2. *Множество* $\bigcup_{M,N} V(M, N)$, *где*

$$V(M,N)=V^q\cap S(M,N):\begin{cases}\mathbf{u}\in S(M,N),\\ \sum\limits_{|n|\leqslant N}\alpha_{mn}u_{mn}=\sum\limits_{|n|\leqslant N}\beta_{mn}u_{mn}=0,\\ \sum\limits_{|m|\leqslant M}\alpha_{mn}u_{mn}=\sum\limits_{|m|\leqslant M}\beta_{mn}u_{mn}=0,\\ (\mathbf{u},\mathbf{s}_{00})=0,\end{cases}\tag{22}$$

плотно в V^q *при* $q>1/2$.

Доказательство не отличается от доказательства леммы 1.

4. Связь построенных пространств с пространствами Соболева

Пространства Соболева определяем обычным образом как замыкания гладких (необходимое число раз дифференцируемых) многообразий в метрике

$$((\mathbf{u},\mathbf{v}))_p=\sum_{0\leqslant\alpha_1+\alpha_2\leqslant p}(D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\mathbf{u},D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\mathbf{v}),\quad |||\mathbf{u}|||_p=\sqrt{((\mathbf{u},\mathbf{u}))_p},\tag{23}$$

где

$$D_i=\partial/\partial x^i.$$

Введем обозначения: $[A]_{|||\cdot|||_p}$ — замыкание множества A в метрике (23), $[A]_B$ — замыкание множества A в метрике пространства B, $A\sim B$ — эквивалентность этих пространств в смысле эквивалентности норм, $C^p{}_{per}$ — множество p раз непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ комплексных функций, периодических вместе с производными до $p-1$ порядка включительно:

$$D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\mathbf{u}\,|_{x^1=0}=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\mathbf{u}\,|_{x^1=a^{-1}},$$

$$D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\mathbf{u}\,|_{x^2=0}=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\mathbf{u}\,|_{x^2=1}.$$

$$0\leqslant\alpha_1+\alpha_2\leqslant p-1$$

Известно следующее утверждение:

Теорема 3. *Справедливы равенства*

$$H^1=[C^1_{per}]_{|||\cdot|||_1}=[C^\infty_{per}]_{|||\cdot|||_1}.\tag{24}$$

Кроме того,

$$H^p\sim[C^p_{per}]_{|||\cdot|||_p}=[C^\infty_{per}]_{|||\cdot|||_p}.\tag{25}$$

Следствие 2. *Так как следующие вложения плотны*

$$C^\infty_{per}\subset C^p_{per}\subset H^p\subset H^q,\quad p>q,$$

то C^∞_{per}, C^p_{per} *являются плотными множествами в* H^q *с произвольным* q, *если только* $p>q$ ($p\geqslant1$ *при* $q<1$).

Значение этой теоремы для дальнейшего изложения состоит в том, что она указывает гладкие множества, всюду плотные в H^q.

Теорема 4. *Справедливы равенства*

$$S^q=[\mathcal{S}^p]_{H^q}=[\mathcal{S}^\infty]_{H^q},\tag{26}$$

$$G^q=[\mathcal{G}^p]_{H^q}=[\mathcal{G}^\infty]_{H^q},\tag{27}$$

где

$$\mathfrak{S}^p=\{\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}\in C^p_{per},\ \operatorname{div}\mathbf{u}=0\} \tag{28}$$

— линейное многообразие соленоидальных векторов,

$$\mathfrak{G}^p=\{\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}\in C^p_{per},\ \mathbf{u}=\operatorname{grad}\varphi\} \tag{29}$$

— линейное многообразие градиентов из множества C^p_{per}, а целое число p удовлетворяет условию $p\geqslant\max(1,q)$.

Доказательство. Так как $\mathbf{s}^0$, $\mathbf{s}_{mn}\in\mathfrak{S}^\infty\subset\mathfrak{S}^p$, $\mathbf{g}_{mn}\in\mathfrak{G}^\infty\subset\mathfrak{G}^p$ и $S^q=[\{\mathbf{s}^0,\mathbf{s}_{mn}\}]_{H^q}$, $G^q=[\{\mathbf{g}_{mn}\}]_{H^q}$, то справедливы вложения

$$S^q\subset[\mathfrak{S}^\infty]_{H^q}\subset[\mathfrak{S}^p]_{H^q},$$

$$G^q\subset[\mathfrak{G}^\infty]_{H^q}\subset[\mathfrak{G}^p]_{H^q},$$

если только $p\geqslant q$ ($p\geqslant 1$ при $q<1$). Теорема будет доказана, если мы докажем обратные вложения

$$[\mathfrak{S}^p]_{H^q}\subset S^q,\qquad [\mathfrak{G}^p]_{H^q}\subset G^q, \tag{30}$$

$$[\mathfrak{S}^\infty]_{H^q}\subset S^q,\qquad [\mathfrak{G}^\infty]_{H^q}\subset G^q. \tag{31}$$

Для этого рассмотрим произвольные элементы $\mathbf{u}\in\mathfrak{S}^p$, $\mathbf{v}\in\mathfrak{G}^p$. Так как $\mathfrak{S}^p$, $\mathfrak{G}^p\subset C^p_{per}$, а для C^p_{per} на основании теоремы 3 справедливо вложение $C^p_{per}\subset H^q$, $p\geqslant\max(1,q)$, то справедливы также вложения

$$\mathfrak{S}^p,\ \mathfrak{G}^p\subset H^q,\quad p\geqslant\max(1,q).$$

Но любой вектор из $\mathfrak{S}^p$ является периодическим и соленоидальным, а значит, и ортогональным каждому периодическому градиенту $\mathbf{g}_{mn}$ (см. (7)). Аналогично, произвольный элемент $\mathfrak{G}^p$ ортогонален всем векторам $\mathbf{s}^0$, $\mathbf{s}_{mn}$. Следовательно,

$$\mathfrak{S}^p\subset S^q,\quad \mathfrak{G}^p\subset G^q,\quad p\geqslant\max(1,q).$$

Принимая во внимание замкнутость S^q, G^q, получим вложения (30). Вложения (31) следуют из (30), если учесть, что $\mathfrak{S}^\infty\subset\mathfrak{S}^p$, $\mathfrak{G}^\infty\subset\mathfrak{G}^p$. Теорема доказана.

Следствие. 3. *Из* (24)—(27) *получим*

$$\begin{aligned} &S^p\sim[\mathfrak{S}^p]_{|||\cdot|||_p}=[\mathfrak{S}^\infty]_{|||\cdot|||_p},\qquad S^1=[\mathfrak{S}^1]_{|||\cdot|||_1}=[\mathfrak{S}^\infty]_{|||\cdot|||_1},\\ &G^p\sim[\mathfrak{G}^p]_{|||\cdot|||_p}=[\mathfrak{G}^\infty]_{|||\cdot|||_p},\qquad G^1=[\mathfrak{G}^1]_{|||\cdot|||_1}=[\mathfrak{G}^\infty]_{|||\cdot|||_1}.\end{aligned} \tag{32}$$

Теорема 5. *Справедливы равенства*

$$U^q=[\mathfrak{U}^p]_{H^q}=[\mathfrak{U}^\infty]_{H^q}, \tag{33}$$

$$V^q=[\mathfrak{V}^p]_{H^q}=[\mathfrak{V}^\infty]_{H^q}, \tag{34}$$

где

$$\mathfrak{U}^p=\mathfrak{S}^p\cap\{\mathbf{u}\,|_{\Gamma_1}=0\}, \tag{35}$$

$$\mathfrak{V}^p=\mathfrak{S}^p\cap\{\mathbf{u}\,|_{\Gamma}=0\}, \tag{36}$$

а целое число p удовлетворяет условию $p\geqslant\max(1,q)$.

Доказательство. Так как $U(M,N)$, $V(M,N)$ (см. (16), (22)) состоят из бесконечно дифференцируемых функций, принимающих нулевые значения на Γ_1 и Γ соответственно, то

$$U(M,N)\subset\mathfrak{U}^\infty\subset\mathfrak{U}^p,\qquad V(M,N)\subset\mathfrak{V}^\infty\subset\mathfrak{V}^p.$$

В то же время известно (леммы 1 и 2), что $\bigcup_{M,N} U(M,N) \subset U^q$, $\bigcup_{M,N} V(M,N) \subset V^q$ плотно. Поэтому теорема будет доказана, если мы сможем показать, что имеют место вложения

$$\begin{array}{ll} \text{а)}\ \mathfrak{U}^p \subset U^q, & \\ & p \geqslant \max(1, q). \\ \text{б)}\ \mathfrak{V}^p \subset V^q, & \end{array}$$

Докажем вложение а) (доказательство б) проводится аналогично). Для этого рассмотрим произвольный $\mathfrak{u} \in \mathfrak{U}^p$ и с учетом вложений

$$\mathfrak{U}^p \subset [\mathfrak{U}^p]_{H^q} \subset [\mathfrak{S}^p]_{H^q} = S^q, \tag{37}$$

разложим $\mathfrak{u}$ в базисе $\{\mathfrak{s}^0, \mathfrak{s}_{mn}\}$:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{s}^0 (\mathfrak{u}, \mathfrak{s}^0) + \sum_{m,n} \mathfrak{s}_{mn} (\mathfrak{u}, \mathfrak{s}_{mn}).$$

Умножим это равенство на $\sqrt{a} \exp(-i2\pi a m x^1)$ и проинтегрируем по x^1 на $[0, a^{-1}]$. Получим

$$\mathfrak{u}_m (x^2) = \sqrt{a} \int_0^{a^{-1}} \mathfrak{u} \exp(-i2\pi a m x^1)\, dx^1 =$$

$$= \begin{cases} \mathbf{e}^2 (\mathfrak{u}, \mathfrak{s}^0) + \mathbf{e}^1 \sum\limits_n (\mathfrak{u}, \mathfrak{s}_{0n})\, \alpha_{0n} \exp(i2\pi n x^2), & m = 0, \\ \mathbf{e}^1 \sum\limits_n (\mathfrak{u}, \mathfrak{s}_{mn})\, \alpha_{mn} \exp(i2\pi n x^2) + \mathbf{e}^2 \sum\limits_n (\mathfrak{u}, \mathfrak{s}_{mn})\, \beta_{mn} \exp(i2\pi n x^2), & m \neq 0. \end{cases} \tag{38}$$

Ряды в правой стороне сходятся абсолютно и равномерно по x^2 на $[0, 1]$, если $p \geqslant q > 1/2$:

$$\left. \begin{array}{l} \left| \sum\limits_n (\mathfrak{u}, \mathfrak{s}_{mn})\, \alpha_{mn} \exp(i2\pi n x^2) \right| \\ \left| \sum\limits_n (\mathfrak{u}, \mathfrak{s}_{mn})\, \beta_{mn} \exp(i2\pi n x^2) \right| \end{array} \right\} \leqslant \sum_n |(\mathfrak{u}, \mathfrak{s}_{mn})| \leqslant$$

$$\leqslant 1/2 \sum_n |(\mathfrak{u}, \mathfrak{s}_{mn})|^2 (1 + \mathrm{k}_{mn}^2)^p + 1/2 \sum_n (1 + \mathrm{k}_{mn}^2)^{-p} < \infty$$

(мы использовали неравенство Юнга $2|ab| \leqslant |a|^2 + |b|^2$).

Так как абсолютно и равномерно сходящийся ряд непрерывных функций является всегда непрерывным [9], а $\mathfrak{u}_m(x^2)$ — непрерывная функция, то (38) выполняется в каждой точке, включая $x^2 = 0$, $x^2 = 1$. Отсюда с учетом $\mathfrak{u}_m(0) = \mathfrak{u}_m(1) = 0$ следует, что $\mathfrak{u}$ удовлетворяет условиям (13). Принимая также во внимание (37), получим вложение а). Теорема доказана.

Следствие 4. *Из* (24), (25), (33), (34) *получим*

$$U^p \sim [\mathfrak{U}^p]_{|||\cdot|||_p} = [\mathfrak{U}^\infty]_{|||\cdot|||_p}, \quad U^1 = [\mathfrak{U}^1]_{|||\cdot|||_1} = [\mathfrak{U}^\infty]_{|||\cdot|||_1}, \tag{39}$$

$$V^p \sim [\mathfrak{V}^p]_{|||\cdot|||_p} = [\mathfrak{V}^\infty]_{|||\cdot|||_p}, \quad V^1 = [\mathfrak{V}^1]_{|||\cdot|||_1} = [\mathfrak{V}^\infty]_{|||\cdot|||_1}. \tag{40}$$

В теоретической гидродинамике имеет фундаментальное значение пространство [2–4]

$\mathfrak{J} = [\mathfrak{D}_{sol}]_{|||\cdot|||_1} =$ замыкание множества финитных в Ω бесконечно дифференцируемых соленоидальных функций в метрике (23).

Известно также [10], что в случае области (1)

$$\mathfrak{J} = [\overset{0}{C}{}^1 \cap \{\operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}]_{|||\cdot|||_1},$$

где $\overset{0}{C}{}^1$ — множество один раз дифференцируемых функций, однородных на Г. Но $\overset{0}{C}{}^1 \cap \{\operatorname{div} \mathbf{u} = 0\} = \mathfrak{V}^1$, следовательно,

$$\mathfrak{J} = V^1.$$

Эти равенства, в частности, означают, что, построив базис (фундаментальную систему) в V^1, мы получим базис (фундаментальную систему) и в $\mathfrak{J}$.

Автор выражает благодарность Г. Вайникко за обсуждение настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыым Р.* Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **32**, № 1, 19—28 (1983).
2. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970.
3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., «Мир», 1972.
4. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. М., «Мир», 1981.
5. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. М., «Наука», 1969.
6. *Weyl, H.* Duke Math. J., **7**, 411—444 (1940).
7. *Быховский Э. Б., Смирнов Н. В.* Тр. Мат. ин-та АН СССР, **59**, 5—36 (1960).
8. Функциональный анализ (под ред. С. Г. Крейна). М., «Наука», 1972.
9. *Хинчин А. Я.* Краткий курс математического анализа. М., ГИТТЛ, 1953.
10. *Дезин А. А., Зеленяк Т. И., Масленникова В. Н.* В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными. (Тр. конф. по дифф. ур-ям и вычисл. мат-ке). Новосибирск, «Наука», 1980, с. 21—31.

Институт астрофизики и физики атмосферы
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22 ноября 1982

R. ROOM

RISTKÜLIKUS MÄÄRATUD SOLENOIDAALSETE FUNKTSIOONIDE HILBERTI RUUMID

Töös [1] saadud lõplikumõõtmelised funktsiooniruumid on üldistatud lõpmatule juhule. Esmasteks ruumideks, mille struktuuri uuritakse, on perioodiliste funktsioonide ruumid H^q (3). Baasteisendusega (2)→(4) on H^q jaotatud kaheks ortogonaalseks alamruumiks (9) — solenoidaalsete vektorite ruumiks S^q ning gradientide ruumiks G^q. Edasi on näidatud, et ala (1) külgmistel piiridel ($x_2=0$ ja $x_2=1$) annulleeruvad funktsioonid moodustavad suletud alamruumi $U^q \subset S^q$ (15), kui $q>1/2$. Analoogiliselt moodustavad ala (1) kõigis äärepunktides annulleeruvad funktsioonid $q>1/2$ korral suletud alamruumi $V^q \subset S^q$ (20). Töö lõpus on tõestatud rida teoreeme, mis võimaldavad konstrueeritud ruumid U^q, S^q siduda Sobolevi ruumidega.

R. RÕÕM

HILBERT SPACES OF FUNCTIONS, SOLENOIDAL IN A RECTANGLE

Generalisations of finite-dimensional function spaces constructed in paper [1], are discussed in the case of an infinite number of dimensions. The primary spaces whose structure is studied, are the Hilbert spaces of periodical functions H^q (3), where the set of functions (2) is a basis. By the transformation of the bases (2)$\rightarrow$(4) H^q is divided into two orthogonal subspaces — into the space of solenoidal vectors S^q (10) and into the space of gradients G^q (11). The conditions $\mathbf{u}|_{x^2=0}=\mathbf{u}|_{x^2=1}=0$ are equivalent for $\mathbf{u}\in S^q$ to the equations (13), where the linear functionals $\mathbf{l}^0$, $\mathbf{a}_m$, $\mathbf{b}_m$ are defined by (12). It is shown (Theorem 1) that these functionals are continuous in S^q if $q>1/2$ and therefore separate in S^q a closed subspace U^q (15). Space U^q is a Hilbert space which consists of solenoidal periodical functions equal to zero almost everywhere on the boundaries $x^2=0$ and $x^2=1$. To the functionals $\mathbf{a}_m$, $\mathbf{b}_m$ correspond in S^q vectors $\underset{m}{\mathbf{a}^{(q)}}$, $\underset{m}{\mathbf{b}^{(q)}}$ (14), orthogonal to U^q. Vectors $\underset{m}{\mathbf{a}^{(q)}}$, $\underset{m}{\mathbf{b}^{(q)}}$ and $\mathbf{s}^0$ (4) form the basis in $W^q=S^q\setminus U^q$. Similarly, the condition $\mathbf{u}|_\Gamma=0$ is for $\mathbf{u}\in S^q$ equivalent to the equations (19). The functionals in these equations are continuous in S^q is $q>1/2$ (Theorems 1 and 2), and separate in S^q a closed subspace V^q (20). Theorems 4 and 5 are proved, establishing relations between the constructed spaces and the Sobolev spaces and showing differentiable manyfolds $\mathfrak{S}^{(p)}$(28)), $\mathfrak{G}^{(p)}$(29), $\mathfrak{U}^{(p)}$(35) and $\mathfrak{V}^{(p)}$(36), everywhere dence in S^q, G^q, U^q and V^q if $p\geqslant\max(1,q)$.