

Р. РЫИМ

ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ В ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ФУНКЦИЙ

(Представил Я. Эйнасто)

В [1] при проектировании уравнений Навье—Стокса в фурье-базис был введен ряд конечномерных пространств. В настоящей работе рассматриваются обобщения этих пространств на бесконечный случай.

В первых трех разделах изучаются разложения пространств периодических функций на ортогональные подпространства соленоидальных векторов и градиентов и выясняется, в каких пространствах соленоидальных функций краевые условия выделяют замкнутые подпространства. Так как рассмотрение проводится на языке «ортогональных базисов», то одновременно указываются и способы построения базисов в этих пространствах.

В четвертом разделе устанавливается связь построенных пространств с различными пространствами Соболева. Это, с одной стороны, дает возможность указать гладкие (дифференцируемые в классическом смысле) множества, всюду плотные в пространствах, первоначально построенных как линейные оболочки ортогональных базисов, а с другой — установить связь построенных пространств с пространствами, обычно рассматриваемыми в теоретической гидродинамике [2-4], и тем самым перенести ранее полученные строгие математические результаты на динамические системы работы [1].

В настоящей статье будем рассматривать комплексные вектор-функции u , v , ...

$$u = u(x) = e^1 u^1(x) + e^2 u^2(x)$$

(e^α , $\alpha = 1, 2$ — орты в направлениях координатных осей) действительного аргумента

$$x = e^1 x^1 + e^2 x^2$$

в области

$$\Omega = \{0 < x^1 < a^{-1}, 0 < x^2 < 1\}, \quad (1)$$

где $0 < a \leq 1$ — заданная постоянная. Через Γ обозначаем контур области Ω , $\Omega + \Gamma = \bar{\Omega}$, а через Γ_1 — замкнутое многообразие, состоящее из верхней и нижней границ Ω :

$$\Gamma_1 = \{0 \leq x^1 \leq a^{-1}, x^2 = 0\} \cup \{0 \leq x^1 \leq a^{-1}, x^2 = 1\}.$$

1. Разложение пространств периодических функций на подпространства соленоидальных векторов и градиентов

Система функций

$$f_{mn}^\alpha = e^\alpha f_{mn} = e^\alpha \sqrt{a} \exp(ik_{mn}x), \quad \alpha = 1, 2; m, n = 0, \pm 1, \dots, \quad (2)$$

$$k_{mn} = e^1 2\pi m + e^2 2\pi n$$

является базисом в пространстве $L_2(\Omega)$ с нормой и скалярным произведением

$$\|u\|_{L_2} = \sqrt{(u, u)}, \quad (u, v) = \int_{\Omega} u \bar{v} dx.$$

Образуем в множестве функций из $L_2(\Omega)$ гильбертовы пространства H^q , $q \geq 0$ следующим образом

$$u \in H^q : \begin{cases} u = \sum_{\alpha, m, n} u_{mn}^{\alpha} f_{mn}^{\alpha}, \\ (u, v)_q = \sum_{\alpha, m, n} u_{mn}^{\alpha} \overline{v_{mn}^{\alpha}} (1 + k_{mn}^2)^q, \\ \|u\|_q = \sqrt{(u, u)_q}. \end{cases} \quad (3)$$

По определению, система (2) является в каждом H^q ортогональным базисом

$$(f_{mn}^{\alpha}, f_{kl}^{\beta})_q = \delta^{\alpha\beta} \delta_{mk} \delta_{nl} (1 + k_{mn}^2)^q,$$

а коэффициенты u_{mn}^{α} вектора $u \in H^q$ ($q \geq 0$) вычисляются по формуле

$$u_{mn}^{\alpha} = (u, f_{mn}^{\alpha}) = \int u \overline{f_{mn}^{\alpha}} dx.$$

Определение (3) можно распространить на отрицательные q , в этом случае $H^{-|q|}$ является пространством обобщенных функций, сопряженным с $H^{|q|}$. Справедливы вложения

$$H^q \subset H^r \subset H^0 = L_2(\Omega) \subset H^{-r} \subset H^{-q}, \quad q > r > 0,$$

причем каждое пространство вложено в последующее плотно и непрерывно.

Заменяем (2) новым базисом

$$g_{mn} = (k_{mn} / |k_{mn}|) f_{mn}, \quad m \text{ или } n \neq 0,$$

$$s^0 = e^2 \sqrt{a} = f_{00}^2, \quad (4)$$

$$s_{mn} = e_{mn} f_{mn},$$

где

$$e_{00} = \alpha_{00} e^1 = e^1, \quad (5)$$

$$e_{mn} = e^1 a_{mn} + e^2 \beta_{mn} = (e^1 n - e^2 a m) / \sqrt{a^2 m^2 + n^2}.$$

Легко проверить следующее: а) переход от системы (2) к системе (4) однозначен и обратим; б) система (4) принадлежит пространству H^q и является там ортогональной. Таким образом, (4) действительно является ортогональным базисом в каждом H^q . Скалярное произведение в H^q можно с использованием базиса (4) вычислить по формуле

$$\begin{aligned} (u, v)_q &= (u, s^0) \overline{(v, s^0)} + (u, s_{00}) \overline{(v, s_{00})} + \\ &+ \sum'_{m, n} [(u, s_{mn}) \overline{(v, s_{mn})} + (u, g_{mn}) \overline{(v, g_{mn})}] (1 + k_{mn}^2)^q, \end{aligned} \quad (6)$$

где штрих у Σ означает, что в этой сумме отсутствует слагаемое с $m = n = 0$.

Векторы g_{mn} являются несоленоидальными градиентами

$$\mathbf{g}_{mn} = -i \operatorname{grad} f_{mn} / |\mathbf{k}_{mn}|, \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{g}_{mn} = i |\mathbf{k}_{mn}| f_{mn},$$

а $\mathbf{s}^0, \mathbf{s}_{mn}$ — соленоидальными векторами

$$\operatorname{div} \mathbf{s}^0 = 0, \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{s}_{mn} = i (\mathbf{e}_{mn} \mathbf{k}_{mn}) f_{mn} = 0.$$

Следовательно, H^q можно разложить на ортогональные (в метрике H^q) подпространства

$$H^q = S^q \oplus G^q \quad (9)$$

соленоидальных векторов

$$S^q = \{ \mathbf{u} | \mathbf{u} = \mathbf{s}^0 u^0 + \sum_{m,n} \mathbf{s}_{mn} u_{mn} \} \quad (10)$$

и градиентов

$$G^q = \{ \mathbf{v} | \mathbf{v} = \sum_{m,n} \mathbf{g}_{mn} v_{mn} \}. \quad (11)$$

Коэффициенты u^0, u_{mn} вектора $\mathbf{u} \in S^q$ и коэффициенты v_{mn} вектора $\mathbf{v} \in G^q$ вычисляются по формулам

$$u^0 = (\mathbf{u}, \mathbf{s}^0), \quad u_{mn} = (\mathbf{u}, \mathbf{s}_{mn}), \quad v_{mn} = (\mathbf{v}, \mathbf{g}_{mn}),$$

а скалярные произведения и нормы в этих пространствах, согласованные с (7), имеют вид

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S^q: (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{S^q} = (\mathbf{u}, \mathbf{s}^0) \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{s}^0)} + \sum_{m,n} (\mathbf{u}, \mathbf{s}_{mn}) \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{s}_{mn})} (1 + \mathbf{k}_{mn}^2)^q,$$

$$\|\mathbf{u}\|_{S^q} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{S^q}};$$

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in G^q: (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{G^q} = \sum_{m,n} (\mathbf{u}, \mathbf{g}_{mn}) \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{g}_{mn})} (1 + \mathbf{k}_{mn}^2)^q,$$

$$\|\mathbf{u}\|_{G^q} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{G^q}}.$$

Идея разложения (9) с использованием дифференциальных свойств базиса (4) заимствована из квантовой электродинамики [5]. Заметим, что в случае $q = 0$ разложение (9) отличается от разложений $L_2(\Omega)$, обычно рассматриваемых в теории поля [6, 7].

2. Пространства соленоидальных векторов, принимающих нулевые значения на боковых границах области

Рассмотрим в S^q векторы, превращающиеся в нуль на Γ_1

$$[\mathbf{s}^0 u^0 + \sum_{m,n} \mathbf{s}_{mn} u_{mn}]_{x^2=0, x^2=1} = 0 \quad \forall x^1.$$

Принимая во внимание определение $\mathbf{s}^0, \mathbf{s}_{mn}$, запишем это равенство в виде

$$\sqrt{a} [e^2 u^0 + \sum_m \exp(i 2 \pi a m x^1) \sum_n (e^1 \alpha_{mn} + e^2 \beta_{mn}) u_{mn}] = 0.$$

Учитывая линейную независимость функций $\exp(i 2 \pi a m x^1)$ и взаимную ортогональность e^1, e^2 , получим условия, которым должны удовлетворять коэффициенты u^0, u_{mn} :

$$u^0=0, \quad \sum_n \alpha_{mn} u_{mn}=0, \quad \sum_n \beta_{mn} u_{mn}=0 \quad \forall m.$$

Если ввести функционалы $l^0, a_m, b_m, m=0, \pm 1, \dots$,

$$\langle l^0, u \rangle = (u, s^0), \quad (12)$$

$$\langle a_m, u \rangle = \sum_n \alpha_{mn} (u, s_{mn}), \quad \langle b_m, u \rangle = \sum_n \beta_{mn} (u, s_{mn}),$$

то эти условия можно записать так:

$$\langle l^0, u \rangle = 0, \quad \langle a_m, u \rangle = 0, \quad \langle b_m, u \rangle = 0 \quad \forall m. \quad (13)$$

Особый интерес представляют те пространства S^q , в которых уравнения (13) выделяют замкнутые подпространства. Как известно [8], для этого необходимо и достаточно, чтобы функционалы l^0, a_m, b_m были ограничены в совокупности.

Теорема 1. Система функционалов $\{l^0, a_m, b_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ ограничена в пространствах S^q при $q > 1/2$.

Доказательство. Так как l^0 ограничен в S^0 , а $S^q \subset S^0$ при $q > 0$, то необходимо проверить ограниченность a_m, b_m . Используя неравенство Коши—Буняковского, получим оценки

$$|\langle a_m, u \rangle| \leq \left[\sum_n \alpha_{mn}^2 / (1+k_{mn}^2)^q \sum_n |(u, s_{mn})|^2 (1+k_{mn}^2)^q \right]^{1/2} \leq c_q \|u\|_{S^q},$$

$$|\langle b_m, u \rangle| \leq \left[\sum_n \beta_{mn}^2 / (1+k_{mn}^2)^q \sum_n |(u, s_{mn})|^2 (1+k_{mn}^2)^q \right]^{1/2} \leq d_q \|u\|_{S^q}$$

(в случае $m=0$ имеем $b_0 \equiv 0$, и второе неравенство отпадает). Принимая во внимание определение α_{mn}, β_{mn} (см. (5)), имеем

$$\left. \begin{aligned} c_q^2 &= \sum_n n^2 (a^2 m^2 + n^2)^{-1} (1+k_{mn}^2)^{-q} \\ d_q^2 &= \sum_n a^2 m^2 (a^2 m^2 + n^2)^{-1} (1+k_{mn}^2)^{-q} \end{aligned} \right\} \leq \sum_n (1+k_{mn}^2)^{-q} \leq$$

$$\leq 1 + 2^{1-2q} \pi^{-2q} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2q}.$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} < \infty, \quad \text{если } \alpha > 1, \quad \text{и } \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} = \infty, \quad \text{если } \alpha \leq 1,$$

то c_q, d_q ограничены при $q > 1/2$, не зависящей от m постоянной. Теорема доказана.

Следствие 1. Так как S^q — гильбертовы пространства, то при $q > 1/2$ существуют единственные элементы $a_m^{(q)}, b_m^{(q)}$ такие, что

$$\langle a_m, u \rangle = (u, a_m^{(q)})_{S^q}, \quad \langle b_m, u \rangle = (u, b_m^{(q)})_{S^q} \quad \forall u \in S^q.$$

Эти элементы имеют вид

$$a_m^{(q)} = \sum_n s_{mn}(x) \alpha_{mn} / (1+k_{mn}^2)^q, \quad b_m^{(q)} = \sum_n s_{mn}(x) \beta_{mn} / (1+k_{mn}^2)^q \quad (14)$$

и являются взаимно ортогональными (а также ортогональными вектору s^0) как в S^q , так и в $L_2(\Omega)$.

Замечание. Легко проверить, что b_m ограничены в S^q уже при $q > -1/2$.

Определим пространства U^q , $q > 1/2$, следующим образом

$$u \in U^q : \begin{cases} u \in S^q, \\ \langle a_m, u \rangle = \langle b_m, u \rangle = 0 \quad \forall m, \\ (u, s^0) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Изложенное показывает, что U^q является подпространством S^q и состоит из соленидальных периодических функций, принимающих на Γ_1 нулевые значения. Если разложить S^q на ортогональные (в метрике S^q или H^q) подпространства

$$S^q = U^q \oplus W^q,$$

то, как вытекает из следствия 1, функции $\{s^0, a_m^{(q)}, b_m^{(q)}\}_{m=-\infty}^{\infty}$ образуют базис в W^q .

Знание базиса в ортогональном дополнении W^q позволяет легко построить базисы и в U^q . Это можно сделать, построив базисы в последовательности конечномерных пространств $U(M, N) \subset U(M+1, N+1) \subset \dots \subset U^q$:

$$u \in U(M, N) = S(M, N) \cap U^q : \begin{cases} u \in S(M, N), \\ \sum_{n=-N}^N \alpha_{mn} u_{mn} = 0, \\ \sum_{n=-N}^N \beta_{mn} u_{mn} = 0, \end{cases} \quad (16)$$

где

$$S(M, N) = \{u | u = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N s_{mn} u_{mn}\} \subset S^q. \quad (17)$$

То, что построенная таким образом система будет базисом в U^q , вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. Множество $\bigcup_{M, N} U(M, N)$ плотно в пространстве U^q , если $q > 1/2$.

Доказательство. Так как $U(M, N) \subset U^q \subset S^q$, то достаточно показать, что произвольный вектор $w \in S^q$, ортогональный ко всем подпространствам $U(M, N)$, принадлежит ортогональному дополнению

$$W^q = S^q \setminus U^q.$$

Условие $w \perp U(M, N)$ означает

$$\sum_{|m| \leq M} \sum_{|n| \leq N} \overline{w_{mn}} u_{mn} (1 + k_{mn}^2)^q = 0 \quad \forall u \in U(M, N).$$

Сравнивая это равенство с условиями $\sum_{|n| \leq N} \alpha_{mn} \overline{u_{mn}} = \sum_{|n| \leq N} \beta_{mn} \overline{u_{mn}} = 0$ $\forall |m| \leq M$, заключаем, что коэффициенты w_{mn} имеют при $|m| \leq M$, $|n| \leq N$ вид

$$w_{mn} = (p_m \alpha_{mn} + r_m \beta_{mn}) / (1 + k_{mn}^2)^q, \quad (18)$$

где p_m, r_m — некоторые постоянные. Но поскольку w ортогонален каждому $U(M, N)$ и M, N могут быть сколь угодно большими, (18) имеет место при произвольных m, n . Итак,

$$w = \sum_{m, n} s_{mn} (p_m \alpha_{mn} + r_m \beta_{mn}) / (1 + k_{mn}^2)^q =$$

$$= \sum_m (p_m a_m^{(q)} + r_m b_m^{(q)}) \in W^q.$$

Лемма доказана.

3. Пространства соленоидальных векторов, принимающих нулевые значения на границе области

Рассматривая в S^q векторы

$$u = s^0 u^0 + \sum_{m,n} s_{mn} u_{mn},$$

принимающие нулевые значения на Γ , получим для u условия

$$\begin{aligned} \langle l^0, u \rangle &= 0, \quad \langle a_m, u \rangle = 0, \quad \langle b_m, u \rangle = 0 \quad \forall m, \\ \langle l^1, u \rangle &= 0, \quad \langle c_n, u \rangle = 0, \quad \langle d_n, u \rangle = 0 \quad \forall n, \end{aligned} \quad (19)$$

где первая группа уравнений совпадает с (13), а вторая группа обусловлена условиями $u|_{x^1=0} = u|_{x^1=a^{-1}} = 0$. Новые функционалы l^1 , c_n , d_n определяются равенствами

$$\begin{aligned} \langle l^1, u \rangle &= (u, s_{00}), \\ \langle c_n, u \rangle &= \sum_m \alpha_{mn} (u, s_{mn}), \\ \langle d_n, u \rangle &= \sum_m \beta_{mn} (u, s_{mn}). \end{aligned}$$

Теорема 2. Функционалы l^1 , c_n , d_n ограничены в совокупности в пространствах S^q при $q > 1/2$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Из теорем 1 и 2 следует, что условия (19) определяют при $q > 1/2$ подпространство $V^q \subset S^q$:

$$u \in V^q : \begin{cases} u \in S^q, \\ \langle a_m, u \rangle = \langle b_m, u \rangle = 0 \quad \forall m, \\ \langle c_n, u \rangle = \langle d_n, u \rangle = 0 \quad \forall n, \\ (u, s^0) = (u, s_{00}) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Существуют единственные элементы $c_n^{(q)}$, $d_n^{(q)}$ такие, что

$$\langle c_n, u \rangle = (u, c_n^{(q)})_{S^q}, \quad \langle d_n, u \rangle = (u, d_n^{(q)})_{S^q} \quad \forall u \in S^q, \quad q > 1/2.$$

Эти элементы имеют вид

$$c_n^{(q)} = \sum_m s_{mn}(x) \alpha_{mn} / (1 + k_{mn}^2)^q, \quad d_n^{(q)} = \sum_m s_{mn}(x) \beta_{mn} / (1 + k_{mn}^2)^q. \quad (21)$$

Они взаимно ортогональны (а также ортогональны s_{00}) как в S^q , так и в $L_2(\Omega)$. Вместе с тем s_{00} , $c_n^{(q)}$, $d_n^{(q)}$ не ортогональны всем функциям s_0 , $a_m^{(q)}$, $b_m^{(q)}$, поэтому система $\{s^0, s_{00}, a_m^{(q)}, b_m^{(q)}, c_n^{(q)}, d_n^{(q)}\}$ является фундаментальной в пространстве

$$T^q = S^q \setminus V^q,$$

но не образует там ортогонального базиса. Справедлива

Лемма 2. Множество $\bigcup_{M,N} V(M, N)$, где

$$V(M, N) = V^q \cap S(M, N): \begin{cases} u \in S(M, N), \\ \sum_{|n| \leq N} \alpha_{mn} u_{mn} = \sum_{|n| \leq N} \beta_{mn} u_{mn} = 0, \\ \sum_{|m| \leq M} \alpha_{mn} u_{mn} = \sum_{|m| \leq M} \beta_{mn} u_{mn} = 0, \\ (u, s_{00}) = 0, \end{cases} \quad (22)$$

плотно в V^q при $q > 1/2$.

Доказательство не отличается от доказательства леммы 1.

4. Связь построенных пространств с пространствами Соболева

Пространства Соболева определяем обычным образом как замыкания гладких (необходимое число раз дифференцируемых) многообразий в метрике

$$((u, v))_p = \sum_{0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq p} (D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} u, D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} v), \quad |||u|||_p = \sqrt{((u, u))_p}, \quad (23)$$

где

$$D_i = \partial / \partial x^i.$$

Введем обозначения: $[A]_{||| \cdot |||_p}$ — замыкание множества A в метрике (23), $[A]_B$ — замыкание множества A в метрике пространства B , $A \sim B$ — эквивалентность этих пространств в смысле эквивалентности норм, C_{per}^p — множество p раз непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ комплексных функций, периодических вместе с производными до $p-1$ порядка включительно:

$$D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} u|_{x^1=0} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} u|_{x^1=a^{-1}},$$

$$D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} u|_{x^2=0} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} u|_{x^2=1}.$$

$$0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq p - 1$$

Известно следующее утверждение:

Теорема 3. Справедливы равенства

$$H^1 = [C_{per}^1]_{||| \cdot |||_1} = [C_{per}^\infty]_{||| \cdot |||_1}. \quad (24)$$

Кроме того,

$$H^p \sim [C_{per}^p]_{||| \cdot |||_p} = [C_{per}^\infty]_{||| \cdot |||_p}. \quad (25)$$

Следствие 2. Так как следующие вложения плотны

$$C_{per}^\infty \subset C_{per}^p \subset H^p \subset H^q, \quad p > q,$$

то C_{per}^∞ , C_{per}^p являются плотными множествами в H^q с произвольным q , если только $p > q$ ($p \geq 1$ при $q < 1$).

Значение этой теоремы для дальнейшего изложения состоит в том, что она указывает гладкие множества, всюду плотные в H^q .

Теорема 4. Справедливы равенства

$$S^q = [S^p]_{H^q} = [S^\infty]_{H^q}, \quad (26)$$

$$G^q = [G^p]_{H^q} = [G^\infty]_{H^q}, \quad (27)$$

где

$$S^p = \{u | u \in C_{per}^p, \operatorname{div} u = 0\} \quad (28)$$

— линейное многообразие соленоидальных векторов,

$$G^p = \{u | u \in C_{per}^p, u = \operatorname{grad} \varphi\} \quad (29)$$

— линейное многообразие градиентов из множества C_{per}^p , а целое число p удовлетворяет условию $p \geq \max(1, q)$.

Доказательство. Так как $s^0, s_{mn} \in S^\infty \subset S^p$, $g_{mn} \in G^\infty \subset G^p$ и $S^q = [\{s^0, s_{mn}\}]_{H^q}$, $G^q = [\{g_{mn}\}]_{H^q}$, то справедливы вложения

$$S^q \subset [S^\infty]_{H^q} \subset [S^p]_{H^q},$$

$$G^q \subset [G^\infty]_{H^q} \subset [G^p]_{H^q},$$

если только $p \geq q$ ($p \geq 1$ при $q < 1$). Теорема будет доказана, если мы докажем обратные вложения

$$[S^p]_{H^q} \subset S^q, \quad [G^p]_{H^q} \subset G^q, \quad (30)$$

$$[S^\infty]_{H^q} \subset S^q, \quad [G^\infty]_{H^q} \subset G^q. \quad (31)$$

Для этого рассмотрим произвольные элементы $u \in S^p$, $v \in G^p$. Так как $S^p, G^p \subset C_{per}^p$, а для C_{per}^p на основании теоремы 3 справедливо вложение $C_{per}^p \subset H^q$, $p \geq \max(1, q)$, то справедливы также вложения

$$S^p, G^p \subset H^q, \quad p \geq \max(1, q).$$

Но любой вектор из S^p является периодическим и соленоидальным, а значит, и ортогональным каждому периодическому градиенту g_{mn} (см. (7)). Аналогично, произвольный элемент G^p ортогонален всем векторам s^0, s_{mn} . Следовательно,

$$S^p \subset S^q, \quad G^p \subset G^q, \quad p \geq \max(1, q).$$

Принимая во внимание замкнутость S^q, G^q , получим вложения (30). Вложения (31) следуют из (30), если учесть, что $S^\infty \subset S^p, G^\infty \subset G^p$. Теорема доказана.

Следствие 3. Из (24) — (27) получим

$$\begin{aligned} S^p \sim [S^p]_{||| \cdot |||_p} &= [S^\infty]_{||| \cdot |||_p}, & S^1 &= [S^1]_{||| \cdot |||_1} = [S^\infty]_{||| \cdot |||_1}, \\ G^p \sim [G^p]_{||| \cdot |||_p} &= [G^\infty]_{||| \cdot |||_p}, & G^1 &= [G^1]_{||| \cdot |||_1} = [G^\infty]_{||| \cdot |||_1}. \end{aligned} \quad (32)$$

Теорема 5. Справедливы равенства

$$U^q = [\mathcal{U}^p]_{H^q} = [\mathcal{U}^\infty]_{H^q}, \quad (33)$$

$$V^q = [\mathcal{V}^p]_{H^q} = [\mathcal{V}^\infty]_{H^q}, \quad (34)$$

где

$$\mathcal{U}^p = S^p \cap \{u | u_{\Gamma_1} = 0\}, \quad (35)$$

$$\mathcal{V}^p = S^p \cap \{u | u_{\Gamma} = 0\}, \quad (36)$$

а целое число p удовлетворяет условию $p \geq \max(1, q)$.

Доказательство. Так как $U(M, N), V(M, N)$ (см. (16), (22)) состоят из бесконечно дифференцируемых функций, принимающих нулевые значения на Γ_1 и Γ соответственно, то

$$U(M, N) \subset \mathcal{U}^\infty \subset \mathcal{U}^p, \quad V(M, N) \subset \mathcal{V}^\infty \subset \mathcal{V}^p.$$

В то же время известно (леммы 1 и 2), что $\bigcup_{M,N} U(M,N) \subset U^q$,
 $\bigcup_{M,N} V(M,N) \subset V^q$ плотно. Поэтому теорема будет доказана, если мы
 сможем показать, что имеют место вложения

- а) $\mathcal{U}^p \subset U^q$, $p \geq \max(1, q)$.
 б) $\mathcal{V}^p \subset V^q$.

Докажем вложение а) (доказательство б) проводится аналогично).
 Для этого рассмотрим произвольный $u \in \mathcal{U}^p$ и с учетом вложений

$$\mathcal{U}^p \subset [\mathcal{U}^p]_{H^q} \subset [S^p]_{H^q} = S^q, \quad (37)$$

разложим u в базисе $\{s^0, s_{mn}\}$:

$$u = s^0(u, s^0) + \sum_{m,n} s_{mn}(u, s_{mn}).$$

Умножим это равенство на $\sqrt{a} \exp(-i2\pi a m x^1)$ и проинтегрируем по x^1 на $[0, a^{-1}]$. Получим

$$\begin{aligned} u_m(x^2) &= \sqrt{a} \int_0^{a^{-1}} u \exp(-i2\pi a m x^1) dx^1 = \\ &= \begin{cases} e^2(u, s^0) + e^1 \sum_n (u, s_{0n}) \alpha_{0n} \exp(i2\pi n x^2), & m=0, \\ e^1 \sum_n (u, s_{mn}) \alpha_{mn} \exp(i2\pi n x^2) + e^2 \sum_n (u, s_{mn}) \beta_{mn} \exp(i2\pi n x^2), & m \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

Ряды в правой стороне сходятся абсолютно и равномерно по x^2 на $[0, 1]$, если $p \geq q > 1/2$:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_n (u, s_{mn}) \alpha_{mn} \exp(i2\pi n x^2) \right| \left| \sum_n (u, s_{mn}) \beta_{mn} \exp(i2\pi n x^2) \right| \leq \sum_n |(u, s_{mn})| \leq \\ & \leq 1/2 \sum_n |(u, s_{mn})|^2 (1 + k_{mn}^2)^p + 1/2 \sum_n (1 + k_{mn}^2)^{-p} < \infty \end{aligned}$$

(мы использовали неравенство Юнга $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$).

Так как абсолютно и равномерно сходящийся ряд непрерывных функций является всегда непрерывным [9], а $u_m(x^2)$ — непрерывная функция, то (38) выполняется в каждой точке, включая $x^2 = 0$, $x^2 = 1$. Отсюда с учетом $u_m(0) = u_m(1) = 0$ следует, что u удовлетворяет условиям (13). Принимая также во внимание (37), получим вложение а). Теорема доказана.

Следствие 4. Из (24), (25), (33), (34) получим

$$U^p \sim [\mathcal{U}^p]_{||| \cdot |||_p} = [\mathcal{U}^\infty]_{||| \cdot |||_p}, \quad U^1 = [\mathcal{U}^1]_{||| \cdot |||_1} = [\mathcal{U}^\infty]_{||| \cdot |||_1}, \quad (39)$$

$$V^p \sim [\mathcal{V}^p]_{||| \cdot |||_p} = [\mathcal{V}^\infty]_{||| \cdot |||_p}, \quad V^1 = [\mathcal{V}^1]_{||| \cdot |||_1} = [\mathcal{V}^\infty]_{||| \cdot |||_1}. \quad (40)$$

В теоретической гидродинамике имеет фундаментальное значение пространство $[2^{-4}]$

$\mathcal{J} = [\mathcal{D}_{sol}]_{||| \cdot |||_1} =$ замыкание множества финитных в Ω бесконечно дифференцируемых соленоидальных функций в метрике (23).

Известно также [10], что в случае области (1)

$$\mathfrak{F} = [C^1 \cap \{\operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}]_{||| \cdot |||_1},$$

где C^1 — множество один раз дифференцируемых функций, однородных на Γ . Но $C^1 \cap \{\operatorname{div} \mathbf{u} = 0\} = \mathcal{V}^1$, следовательно,

$$\mathfrak{F} = V^1.$$

Эти равенства, в частности, означают, что, построив базис (фундаментальную систему) в V^1 , мы получим базис (фундаментальную систему) и в \mathfrak{F} .

Автор выражает благодарность Г. Вайникко за обсуждение настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыым Р. Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 32, № 1, 19—28 (1983).
2. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970.
3. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., «Мир», 1972.
4. Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. М., «Мир», 1981.
5. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., «Наука», 1969.
6. Weyl, H. Duke Math. J., 7, 411—444 (1940).
7. Быховский Э. Б., Смирнов Н. В. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 59, 5—36 (1960).
8. Функциональный анализ (под ред. С. Г. Крейна). М., «Наука», 1972.
9. Хинчин А. Я. Краткий курс математического анализа. М., ГИТТЛ, 1953.
10. Дезин А. А., Зеленьяк Т. И., Масленникова В. Н. В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными. (Тр. конф. по дифф. ур-ям и вычисл. мат-ке). Новосибирск, «Наука», 1980, с. 21—31.

Институт астрофизики и физики атмосферы
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22 ноября 1982

R. ROOM

RISTKULIKUS MÄÄRATUD SOLENOIDAALSETE FUNKTSIOONIDE HILBERTI RUUMID

Töös [1] saadud lõplikumõõtmelised funktsiooniruumid on üldistatud lõpmatule juhule. Esmasteks ruumideks, mille struktuuri uuritakse, on perioodiliste funktsioonide ruumid H^q (3). Baasteisendusega (2)→(4) on H^q jaotatud kaheks ortogonaalseks alamruumiks (9) — solenoidaalsete vektorite ruumiks S^q ning gradientide ruumiks G^q . Edasi on näidatud, et ala (1) külgmistel piiridel ($x_2=0$ ja $x_2=1$) annulleeruvad funktsioonid moodustavad suletud alamruumi $U^q \subset S^q$ (15), kui $q>1/2$. Analooiliselt moodustavad ala (1) kõigis äärepunktides annulleeruvad funktsioonid $q>1/2$ korral suletud alamruumi $V^q \subset S^q$ (20). Töö lõpus on tõestatud rida teoreeme, mis võimaldavad konstrueeritud ruumid U^q , S^q siduda Sobolevi ruumidega.

HILBERT SPACES OF FUNCTIONS, SOLENOIDAL IN A RECTANGLE

Generalisations of finite-dimensional function spaces constructed in paper [1], are discussed in the case of an infinite number of dimensions. The primary spaces whose structure is studied, are the Hilbert spaces of periodical functions H^q (3), where the set of functions (2) is a basis. By the transformation of the bases (2) \rightarrow (4) H^q is divided into two orthogonal subspaces — into the space of solenoidal vectors S^q (10) and into the space of gradients G^q (11). The conditions $\mathbf{u}|_{x^2=0} = \mathbf{u}|_{x^2=1} = 0$ are equivalent for $\mathbf{u} \in S^q$ to the equations (13), where the linear functionals $\mathbf{l}_0^q, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m$ are defined by (12). It is shown (Theorem 1) that these functionals are continuous in S^q if $q > 1/2$ and therefore separate in S^q a closed subspace U^q (15). Space U^q is a Hilbert space which consists of solenoidal periodical functions equal to zero almost everywhere on the boundaries $x^2=0$ and $x^2=1$. To the functionals $\mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m$ correspond in S^q vectors $\mathbf{a}_m^{(q)}, \mathbf{b}_m^{(q)}$ (14), orthogonal to U^q . Vectors $\mathbf{a}_m^{(q)}, \mathbf{b}_m^{(q)}$ and \mathbf{s}^0 (4) form the basis in $W^q = S^q \setminus U^q$. Similarly, the condition $\mathbf{u}|_{\Gamma} = 0$ is for $\mathbf{u} \in S^q$ equivalent to the equations (19). The functionals in these equations are continuous in S^q if $q > 1/2$ (Theorems 1 and 2), and separate in S^q a closed subspace V^q (20). Theorems 4 and 5 are proved, establishing relations between the constructed spaces and the Sobolev spaces and showing differentiable manifolds $S^{(p)}$ (28), $G^{(p)}$ (29), $U^{(p)}$ (35) and $V^{(p)}$ (36), everywhere dense in S^q, G^q, U^q and V^q if $p \geq \max(1, q)$.