EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 32. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA, 1983, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 32
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1983, № 3

УДК 519.281

В. ОЛЬМАН

ОЦЕНИВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ КАК АНТАГОНИСТИЧЕСКАЯ ИГРА

(Представил Н. Алумяэ)

Рассмотрим регрессионную модель

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\theta + \mathcal{E}, \tag{1}$$

где $\mathbf{Y}$ — n-мерный наблюдаемый случайный вектор, $\mathcal{E}$ — n-мерный ненаблюдаемый случайный вектор, причем $E(\mathcal{E}\,|\,\theta) = 0$ и $E(\mathcal{E}\mathcal{E}^{\mathsf{T}}\,|\,\theta) = \sigma^2 I_n$, I_n — единичная матрица порядка n, элементы матрицы $\mathbf{X}$ порядка $n \times m$ и σ^2 — известные коэффициенты, а θ — m-мерный вектор, подлежащий оцениванию.

Пусть априори известно, что оцениваемый вектор θ принадлежит m-мерному эллипсоиду $L(\mathbf{A}) = \{\theta : \theta^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\theta \leqslant 1\}$, где $\mathbf{A}$ — известная неотрицательно определенная матрица порядка m. Оценивание вектора θ с помощью статистики $\hat{\theta}(\mathbf{Y})$, с одной стороны, и выбор вектора θ, с другой стороны, можно рассматривать как игру двух лиц [1]: статистики $\hat{\theta}(\mathbf{Y})$ образуют класс стратегий первого игрока, а векторы θ, принадлежащие эллипсоиду $L(\mathbf{A})$, — класс стратегий второго игрока. Ограничим стратегии первого игрока линейными по наблюдениям статистиками, т. е.

$$\hat{\theta}(\mathbf{Y}) = \mathbf{TY},$$

где $\mathbf{T}$ — произвольная матрица порядка $m \times n$, составленная из неслучайных элементов. За функцию игры примем квадратичный риск

$$r(\theta, \mathbf{T}) = E\{(\theta - \mathbf{TY})^{\mathsf{T}}\mathbf{P}(\theta - \mathbf{TY})/\theta\},$$

где $\mathbf{P}$ — заданная неотрицательно определенная матрица порядка m и ранга $R(\mathbf{P}) = k \leqslant m$. Таким образом, при использовании первым игроком матрицы $\mathbf{T}$, а вторым — вектора θ величина $r(\theta, \mathbf{T})$ есть проигрыш первого игрока и выигрыш второго.

В [2–4] рассматривалась минимаксная задача, т. е. поиск матрицы $\mathbf{T}_0$ такой, что

$$\inf_{\mathbf{T}} \sup_{\theta \in L(\mathbf{A})} r(\theta, \mathbf{T}) = \sup_{\theta \in L(\mathbf{A})} r(\theta, \mathbf{T}_0).$$

В настоящей работе решается задача максимизации гарантированного выигрыша второго игрока, т. е.

$$\inf_{\mathbf{T}} r(\theta, \mathbf{T}) \to \sup_{\theta \in L(\mathbf{A})}. \tag{2}$$

Кроме того, выводится условие, при котором игра является вполне определенной и которое позволяет решать минимаксную задачу более простым методом, чем это сделано в [2,3].

Пусть $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ — ортонормированные собственные векторы матрицы $\mathbf{P}$, соответствующие ненулевым собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Тогда $\mathbf{P}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \mathbf{p}_i\mathbf{p}_i^{\tau}$, а так как [2]

$$r(\theta, \mathbf{T})=\sigma^2 \operatorname{tr} \mathbf{T}^{\tau}\mathbf{P}\mathbf{T}+\theta^{\tau}(\mathbf{I}_m-\mathbf{T}\mathbf{X})^{\tau}\mathbf{P}(\mathbf{I}_m-\mathbf{T}\mathbf{X})\,\theta,$$

то

$$r(\theta, \mathbf{T})=\sigma^2\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \mathbf{p}_i^{\tau}\mathbf{T}\mathbf{T}^{\tau}\mathbf{p}_i+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\mathbf{p}_i^{\tau}(\mathbf{I}_m-\mathbf{T}\mathbf{X})\,\theta)^2. \tag{3}$$

Дифференцируя по векторам $\mathbf{T}^{\tau}\mathbf{p}_i$, $i=1, 2, \ldots, k$, выпуклую по ним функцию $r(\theta, \mathbf{T})$, получаем [5]

$$\frac{\partial r(\theta, \mathbf{T})}{\partial T^{\tau}p_i}=2\sigma^2\lambda_i\mathbf{T}^{\tau}\mathbf{p}_i+2\lambda_i\mathbf{p}_i^{\tau}(\mathbf{I}_m-\mathbf{T}\mathbf{X})\,\theta\,(-\mathbf{X}\theta)$$

и, следовательно, векторы, на которых достигается минимальное значение функции $r(\theta, \mathbf{T})$, представимы в виде

$$\mathbf{T}^{\tau}\mathbf{p}_i=(\sigma^2\mathbf{I}_n+\mathbf{X}\theta\theta^{\tau}\mathbf{X}^{\tau})^{-1}\mathbf{X}\theta\theta^{\tau}\mathbf{p}_i.$$

Так как [5]

$$(\sigma^2\mathbf{I}_n+\mathbf{X}\theta\theta^{\tau}\mathbf{X}^{\tau})^{-1}=1/\sigma^2\,\mathbf{I}_n-1/\sigma^2\,\mathbf{X}\theta\theta^{\tau}\mathbf{X}^{\tau}/(\sigma^2+\theta^{\tau}\mathbf{X}^{\tau}\mathbf{X}\theta),$$

то

$$\mathbf{T}^{\tau}\mathbf{p}_i=\mathbf{X}\theta\theta^{\tau}\mathbf{p}_i/(\sigma^2+\theta^{\tau}\mathbf{X}^{\tau}\mathbf{X}\theta). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), получаем равенство

$$\inf_{\mathbf{T}} r(\theta, \mathbf{T})=\sigma^2\cdot\theta^{\tau}\mathbf{X}^{\tau}\mathbf{X}\theta\theta^{\tau}\mathbf{P}\theta/(\sigma^2+\theta^{\tau}\mathbf{X}^{\tau}\mathbf{X}\theta)^2+$$
$$+\theta^{\tau}(\mathbf{I}_m-\mathbf{X}^{\tau}\mathbf{X}\theta\theta^{\tau}/(\sigma^2+\theta^{\tau}\mathbf{X}^{\tau}\mathbf{X}\theta))\,\mathbf{P}\,(\mathbf{I}_m-\theta\theta^{\tau}\mathbf{X}^{\tau}\mathbf{X}/(\sigma^2+\theta^{\tau}\mathbf{X}^{\tau}\mathbf{X}\theta))\theta,$$

которое легко преобразуется к равенству

$$\inf_{\mathbf{T}} r(\theta, \mathbf{T})=\sigma^2\theta^{\tau}\mathbf{P}\theta/(\sigma^2+\theta^{\tau}\mathbf{X}^{\tau}\mathbf{X}\theta). \tag{5}$$

Таким образом, решение задачи сводится к поиску

$$\sup_{\theta\in L(\mathbf{A})}\sigma^2\theta^{\tau}\mathbf{P}\theta/(\sigma^2+\theta^{\tau}\mathbf{X}^{\tau}\mathbf{X}\theta). \tag{6}$$

Теорема 1. *Для того чтобы выражение* (6) *было конечно, необходимо и достаточно включения*

$$\operatorname{Ker}\mathbf{A}\cap\operatorname{Ker}\mathbf{X}^{\tau}\mathbf{X}\subseteq\operatorname{Ker}\mathbf{P}, \tag{7}$$

где, как обычно, для произвольной матрицы $\mathbf{B}$ *порядка* $m\times m$ *ядро* $\operatorname{Ker}\mathbf{B}=\{\theta\in R^m:\mathbf{B}\theta=0\}$.

Доказательство. Необходимость легко доказывается от противного. Пусть условие (7) не выполнено, т. е. существует вектор $\theta_0\in R^m$ такой, что $\mathbf{A}\theta_0=\mathbf{X}^{\tau}\mathbf{X}\theta_0=0$ и $\mathbf{P}\theta_0\neq 0$. Выберем последовательность векторов $\theta_n=n\theta_0$, $n=1, 2, \ldots$. Тогда, очевидно, $\theta_n{}^{\tau}A\theta_n<1$ и

$$\theta_n^{\tau}\mathbf{P}\theta_n/(\sigma^2+\theta_n^{\tau}\mathbf{X}^{\tau}\mathbf{X}\theta_n)=1/\sigma^2\cdot n^2\theta_0^{\tau}\mathbf{P}\theta_0\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty.$$

Докажем достаточность. Заметим, что если $\mathbf{B}$ — ненулевая неотрицательно определенная матрица, то по теореме Куранта—Фишера [6]

$$\inf_{\theta\in\operatorname{Ker}^{\perp}\mathbf{B}\subset R^m}\theta^{\tau}\mathbf{B}\theta/\theta^{\tau}\theta=b_1, \tag{8}$$

где b_1 — минимальное положительное собственное число матрицы $\mathbf{B}$, а $\operatorname{Ker}^{\perp}\mathbf{B}$ — ортогональное дополнение ядра $\operatorname{Ker}\mathbf{B}$. Таким образом,

$$\sup_{\theta\in L(\mathbf{A})} \theta^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\theta/(\sigma^2+\theta^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\theta) \leqslant \sup_{\theta\in L(\mathbf{A})} \theta^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\theta/\theta^{\mathrm{T}}(\sigma^2\mathbf{A}+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})\theta \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\theta\in R^m} \theta^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\theta/\theta^{\mathrm{T}}(\sigma^2\mathbf{A}+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})\theta =$$

$$= \sup_{\theta_1,\,\theta_2\in R^m} (\theta_1+\theta_2)^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(\theta_1+\theta_2)/(\theta_1+\theta_2)^{\mathrm{T}}(\sigma^2\mathbf{A}+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})(\theta_1+\theta_2),$$

где $\theta_1\in\operatorname{Ker}(\sigma^2\mathbf{A}+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})$, $\theta_2\in\operatorname{Ker}^{\perp}(\sigma^2\mathbf{A}+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})$. В силу условия (7) теоремы и равенства (8) получаем

$$\sup_{\theta\in L(\mathbf{A})} \theta^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\theta/(\sigma^2+\theta^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\theta) \leqslant \sup_{\theta_2\in\operatorname{Ker}^{\perp}(\sigma^2\mathbf{A}+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})} \theta_2^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\theta_2/\theta_2^{\mathrm{T}}(\sigma^2\mathbf{A}+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})\theta_2 \leqslant$$

$$\leqslant [\sup_{\theta\in R^m} \theta^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\theta/\theta^{\mathrm{T}}\theta]/[\inf_{\theta\in\operatorname{Ker}^{\perp}(\sigma^2\mathbf{A}+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})} \theta^{\mathrm{T}}(\sigma^2\mathbf{A}+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})\theta/\theta^{\mathrm{T}}\theta] < \infty,$$

что полностью доказывает теорему.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие теоремы 1. Тогда*

$$\sup_{\theta\in L(\mathbf{A})} \inf_{\mathbf{T}} r(\theta,\mathbf{T}) = \sigma^2 f_1,$$

где f_1 — максимальное из чисел, удовлетворяющих равенству

$$\mathbf{P}\theta = f(\sigma^2\mathbf{A}+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})\theta$$

для какого-либо $\theta\in\operatorname{Ker}^{\perp}(\sigma^2\mathbf{A}+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\sup_{\theta\in L(\mathbf{A})} \theta^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\theta/(\sigma^2+\theta^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\theta) \leqslant \sup_{\theta\in L(\mathbf{A})} \frac{\theta^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\theta}{\theta^{\mathrm{T}}(\sigma^2\mathbf{A}+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})\theta} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\theta\in R^m} \frac{\theta^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\theta}{\theta^{\mathrm{T}}(\sigma^2\mathbf{A}+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})\theta} = f_1, \tag{9}$$

причем последнее равенство реализуется на векторе θ_1, удовлетворяющем равенству

$$\mathbf{P}\theta_1 = f_1(\sigma^2\mathbf{A}+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})\theta_1, \quad \theta_1\in\operatorname{Ker}^{\perp}(\sigma^2\mathbf{A}+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}).$$

Пусть $\mathbf{A}\theta_1\neq 0$, тогда можно считать, что $\theta_1{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\theta_1 = 1$ и, таким образом, в (9) везде получаем равенства. Пусть теперь $\mathbf{A}\theta_1 = 0$. Выберем $\theta_n = n\theta_1$ и получим

$$\sigma^2\theta_n^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\theta_n/(\sigma^2+\theta_n^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\theta_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\theta_1/\theta_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\theta_1 = f_1.$$

Таким образом, в обоих случаях неравенства (9) в действительности являются равенствами, что и доказывает теорему.

Замечание 1. Нетрудно показать, что число f_1, определенное в теореме, является максимальным собственным числом матрицы $(\sigma^2\mathbf{A}+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{+1/2}\mathbf{P}(\sigma^2\mathbf{A}+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{+1/2}$, где $(\cdot)^{+}$ — обратная матрица Мура [5].

Определим теперь условия, при которых описанная игра является вполне определенной, т. е.

$$\inf_{\mathbf{T}} \sup_{\theta\in L(\mathbf{A})} r(\theta,\mathbf{T}) = \sup_{\theta\in L(\mathbf{A})} \inf_{\mathbf{T}} r(\theta,\mathbf{T}). \tag{10}$$

В частности, в [2] показано, что при $R(\mathbf{P}) = 1$ равенство (10) имеет место для любых матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$. Рассмотрим случай, когда $R(\mathbf{P}) \geqslant 2$.

Для полной определенности игры необходимо и достаточно существования седловой точки [1], т. е. таких стратегий $\mathbf{T}_0$ и $\theta_0 \in L(\mathbf{A})$, что

$$r(\theta, \mathbf{T}_0) \leqslant r(\theta_0, \mathbf{T}_0) \leqslant r(\theta_0, \mathbf{T})\ \forall\, \mathbf{T},\ \theta \in L(\mathbf{A}). \qquad (11)$$

Из правого неравенства (11) получаем, что $\mathbf{T}_0 = \theta_0\theta_0^{\mathsf{T}}\mathbf{X}^{\mathsf{T}}/(\sigma^2 + \theta_0^{\mathsf{T}}\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}\theta_0)$, а из левого неравенства — $\theta_0 = \theta_1$, где вектор θ_1 из теоремы 2. Таким образом, если игра определена, то стратегии $\mathbf{T}_1 = \theta_1\theta_1^{\mathsf{T}}\mathbf{X}^{\mathsf{T}}/(\sigma^2 + \theta_1^{\mathsf{T}}\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}\theta_1)$ и θ_1 образуют седловую точку. Используя равенство $\mathbf{P}\theta_1 = f_1(\sigma^2\mathbf{A} + \mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X})\theta_1$, получаем

$$r(\theta, \mathbf{T}_1) = \sigma^2\theta_1^{\mathsf{T}}\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}\theta_1\theta_1^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\theta_1/(\sigma^2 + \theta_1^{\mathsf{T}}\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}\theta_1)^2 + \theta^{\mathsf{T}}[\mathbf{P} - 2\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}\theta_1\theta_1^{\mathsf{T}}\mathbf{P} \times$$

$$\times (\sigma^2 + \theta_1^{\mathsf{T}}\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}\theta_1)^{-1} + \theta_1^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\theta_1 \cdot \mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}\theta_1\theta_1^{\mathsf{T}}\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}/(\sigma^2 + \theta_1^{\mathsf{T}}\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}\theta_1)^2]\theta =$$

$$= \sigma^2 \cdot f_1^2\, \theta_1^{\mathsf{T}}\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}\theta_1/\theta_1^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\theta_1 + \theta^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\theta,$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{P} + (f_1^2\sigma^4\mathbf{A}\theta_1\theta_1^{\mathsf{T}}\mathbf{A} - \mathbf{P}\theta_1\theta_1^{\mathsf{T}}\mathbf{P})/\theta_1^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\theta_1$. Отсюда следует

Теорема 3. *Для полной определенности игры необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{\theta \in L(\mathbf{A})} \theta^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\theta = \theta_1^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\theta_1. \qquad (12)$$

Замечание 2. Условие (12) эквивалентно тому, что вектор $\mathbf{A}^{1/2}\theta_1$ является собственным вектором матрицы $\mathbf{A}^{+1/2}\mathbf{B}\mathbf{A}^{+1/2}$, соответствующим максимальному собственному числу этой матрицы.

Замечание 3. Условие $\mathbf{A}\theta_1 \neq 0$ необходимо для полной определенности игры, так как в противном случае $\theta_1^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\theta_1 = 0$, что противоречит (12).

Замечание 4. Условие $\operatorname{Ker}\mathbf{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathbf{P}$ необходимо для полной определенности игры, так как в противном случае $\sup_{\theta \in L(\mathbf{A})} \theta^{\mathsf{T}}\mathbf{B}\theta = \infty$, что противоречит (12).

Более простым выглядит решение задачи об определенности игры при условии, сформулированном в [3], т. е. при существовании невырожденной матрицы $\mathbf{C}$ такой, что матрицы $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{C}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{C}$, $\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{C}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}\mathbf{C}$, $\overline{\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}} = \mathbf{C}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}\mathbf{C}$ являются диагональными с диагональными элементами $a_1^2, \ldots, a_m^2$, $p_1^2, \ldots, p_m^2$, $x_1^2, \ldots, x_m^2$ соответственно. Очевидно, что задача с матрицами $\mathbf{A}$; $\mathbf{P}$ и $\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}$ эквивалентна задаче с матрицами $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{P}}$ и $\overline{\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}}$. Пусть для определенности

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \mathbf{p}_i^2/(\sigma^2 a_i^2 + x_i^2) = \mathbf{p}_1^2/(\sigma^2 a_1^2 + x_1^2) = f_1.$$

Тогда у вектора θ_1 первая компонента $1/a_1$ (см. замечание 3), остальные компоненты — нули, а сам вектор θ_1 удовлетворяет уравнению

$$\overline{\mathbf{p}}\theta_1 = f_1(\sigma^2\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}})\theta_1.$$

Очевидно, что справедливость условия (12) надо проверять лишь на векторах $\theta \overline{\in} \operatorname{Ker}\overline{\mathbf{A}}$ (см. замечание 4), удовлетворяющих условиям

$$\overline{\mathbf{B}}\theta = f\overline{\mathbf{A}}\theta, \qquad \theta^{\mathsf{T}}\overline{\mathbf{A}}\theta = 1$$

при некотором $f \in R^1$. Число таких векторов совпадает с числом ненулевых диагональных элементов матрицы $\overline{\mathbf{A}}$, и векторы имеют вид: $1/a_j$ $(a_j \neq 0,\ m \geqslant j \geqslant 1)$ на j-м месте, а на остальных местах — нули. Тогда условие (12) эквивалентно тому, что при $a_j \neq 0$

$$f_1\sigma^2 \geqslant |p_1 p_j/(a_1 a_j)|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wald, A.* Statistical Decision Functions. Wiley, New York, 1950.
2. *Кукс Я., Ольман В.* Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 21, № 1, 66—72 (1972).
3. *Кукс Я., Ольман В.* Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 20, № 4, 480—482 (1971).
4. *Rao, C. R.* Ann. Statist., 4, № 6, 1023—1037, (1976).
5. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения. М., «Наука», 1968.
6. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., «Наука», 1969.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
12 октября 1982

V. OLMAN

LINEAARSE REGRESSIOONI KORDAJATE HINDAMINE KUI ANTAGONISTLIK MÄNG

Lineaarse regressioonimudeli kordajate hindamise ülesanne on formuleeritud mänguteooria terminites. On antud sadulpunkti olemasolu tingimused, mis võimaldab mõnel juhul analüütiliselt leida esialgse minimaksülesande lahendi.

V. OLMAN

ESTIMATION OF LINEAR REGRESSION COEFFICIENTS AS AN ANTAGONISTIC GAME

Linear estimation of a parameter $\Theta \in R^m$ of a linear regression model $E\mathbf{Y} = \mathbf{X}\Theta$ is considered as an antagonistic game with the utility-loss function $r(\Theta, \mathbf{T}) = E\{(\Theta - \mathbf{TY})^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(\Theta - \mathbf{TY})/\Theta\}$. The maxmin strategy in explicit form in case if an unknown parameter Θ belongs to the fixed ellipsoid $\{\Theta \in R^m : \Theta^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\Theta \leqslant 1\}$ is given. Conditions for the existence of a saddle point are obtained that provide the solution of the minmax estimation problem. The solution of minmax estimation problem in case if $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$, $\mathbf{A}$ and $\mathbf{P}$ have the same eigenvectors, is given as an example.