EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 31. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1982, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 31
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1982, № 3

УДК 519.23

В. ВААТМАНН

МИНИМАКСНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

V. VAATMANN. LINEAARSE DÜNAAMILISE SÜSTEEMI OLEKUFUNKTSIOONI MINIMAKSHINDAMINE

V. VAATMANN. MINIMAX STATE ESTIMATION FOR LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

(Представил Н. Алумяэ)

Рассматривается минимаксное оценивание состояния дискретной динамической системы рекуррентными уравнениями типа Калмана—Бьюси.

Пусть n-мерный вектор x_t удовлетворяет уравнению

$$x_{t+1}=A_t x_t+e_t, \tag{1}$$

а

$$y_t=C_t x_t+v_t, \quad t=0, 1, \ldots,$$

где A_t, $t=0, 1, \ldots$, невырожденные $n\times n$-матрицы, информация о которых ограничивается заданием условий $A_t^{\mathrm{T}}A_t\in K_t$, где A_t^{T} — транспонированная к A_t матрица, K_t — заданные множества из евклидова пространства $R^{n\times n}$, C_t — известные $m\times n$-матрицы. Начальное значение x_0 в системе (1) и входные возмущения e_t, v_t, $t=0, 1, \ldots$, есть взаимно некоррелированные случайные векторы, средние значения которых $\mathbf{E}x_0=\bar{x}_0$, $\mathbf{E}e_t=\mathbf{E}v_t=0$ и ковариационные матрицы $\mathbf{E}[(x_0-\bar{x}_0)\times(x_0-\bar{x}_0)]^{\mathrm{T}}=R_0$, $\mathbf{E}(e_s e_t^{\mathrm{T}})=R_t\delta_{s,t}$, $\mathbf{E}(v_s v_t^{\mathrm{T}})=Q_t\delta_{s,t}$ считаем известными, причем Q_t, $t=0, 1, \ldots$, положительно определенная матрица. Через $\mathbf{E}$ мы обозначили оператор математического ожидания и через $\delta_{s,t}$ — символ Кронекера.

Пусть процесс x_t, $t=0, 1, \ldots$, недоступен наблюдению, наблюдать можно лишь значения y_i, $i=0, 1, \ldots, t$, несущие в себе неполную информацию о значениях x_t. Требуется в каждый момент $t+1$ оценить оптимальным образом значения x_{t+1} по реализации $y_0^t=\{y_i,\ i=0, 1, \ldots, t\}$.

Мы ограничимся рассмотрением линейных оценок $\hat{x}_{t+1}$ вида $\hat{x}_{t+1}=\sum_{i=0}^{t}L_i y_i+c$, где L_i, $i=0, 1, \ldots, t$, $n\times m$-матрицы, c — n-вектор, а под минимаксной будем понимать такую оценку, при которой вектор c определяется из условия несмещенности оценки при точно заданных матрицах A_i, а матрицы L_i, $i=0, 1, \ldots, t$, определяются из условия

$$\max_{A_t^{\mathrm{T}}A_t\in K_t,\ i=0, 1, \ldots, t} \mathbf{E}[(\hat{x}_{t+1}-x_{t+1})^{\mathrm{T}}(\hat{x}_{t+1}-x_{t+1})]\to\min. \tag{2}$$

При фиксированных матрицах A_i, $i=0, 1, \ldots, t$, Р. Калманом и Р. Бьюси получен метод рекуррентного определения оптимальных оценок, который оказался весьма удобным при практической реализации оптимального оценивания. Оказывается, что в некоторых случаях оценки, оптимальные в отношении критерия (2), определяются тоже рекуррентными уравнениями.

Теорема. *Пусть* $\hat{x}_t$ — *минимаксная оценка вектора состояния* x_t *системы* (1) *с ковариационной матрицей ошибки оценки* D_t *и пусть* $K_i \ni A_i^{\mathsf{T}} A_i$, $i = 0, 1, \ldots, t$, *такие замкнутые ограниченные выпуклые множества, что существует* $\max\limits_{A_t^{\mathsf{T}} A_t \in K_t} A_i P_i A_i^{\mathsf{T}}$, *т. е. существует* $\hat{A}_i$, $\hat{A}_i^{\mathsf{T}} \hat{A}_i \in$ $\in K_i$, *так что*

$$x^{\mathsf{T}} A_i P_i A_i^{\mathsf{T}} x \leqslant x^{\mathsf{T}} \hat{A}_i P_i \hat{A}_i^{\mathsf{T}} x, \qquad \forall x \in R^n, \qquad \forall A_i, \qquad A_i^{\mathsf{T}} A_i \in K_i,$$

где $P_i = D_i - D_i C_i^{\mathsf{T}} (C_i D_i C_i^{\mathsf{T}} + Q_i)^{-1} C_i D_i$, $i = 0, 1, \ldots, t$.

Тогда линейная минимаксная оценка состояния системы (1) *в момент* $t+1$ *по наблюдениям* $y_0, y_1, \ldots, y_t$ *определяется рекуррентным уравнением*

$$\begin{gathered} x_{t+1} = \hat{A}_t \hat{x}_t + \hat{A}_t D_t C_t (C_t D_t C_t^{\mathsf{T}} + Q_t)^{-1} (y_t - C_t \hat{x}_t), \\ \hat{x}_0 = \bar{x}_0, \end{gathered} \tag{3}$$

где D_t — *максимальная ковариационная матрица ошибки оценки,*

$$D_{t+1} = \hat{A}_t P_t \hat{A}_t^{\mathsf{T}} + R_t,$$

$$D_0 = R_0.$$

Доказательство. Предположим сначала, что матрицы $A_0, A_1, \ldots$ $\ldots, A_{t-1}$ фиксированы и мы хотим определить A_t так, чтобы линейная оценка $\hat{x}_{t+1}$ по y_0^t была минимаксной в отношении матрицы A_t. Вместо того, чтобы искать оценку $\hat{x}_{t+1}$ по y_0^t, воспользуемся некоррелированными векторами $y'_0, y'_1, \ldots, y'_t$, которые получены по наблюдениям с помощью процедуры Грама—Шмидта. Таким образом получим $y'_i =$ $= y_i - C_i \hat{x}_i$, $i = 0, 1, \ldots, t$, где $\hat{x}_i$ — наилучшая в смысле среднеквадратического отклонения линейная оценка вектора x_i при фиксированных A_j, $j = 0, 1, \ldots, i$.

Учитывая взаимную некоррелированность векторов $y'_0, y'_1, \ldots, y'_t$, e_t и невырожденность матрицы A_t, мы можем ограничиться оценками $\hat{x}_{t+1}$ вида $\hat{x}_{t+1} = A_t [\hat{x}_t + L (y_t - C_t \hat{x}_t)]$, где L — $n \times m$-матрица.

Преобразуем выражение ошибки оценки. Буквой I обозначим единичную $n \times n$-матрицу и символом $\operatorname{tr} T$ — след матрицы T:

$$\begin{aligned} &\min_{L \in R^{n \times m}} \max_{A_t^{\mathsf{T}} A_t \in K_t} \mathbf{E} \|\hat{x}_{t+1} - x_{t+1}\|^2 = \\ &= \min_L \max_{A_t} \mathbf{E} [(\hat{x}_{t+1} - x_{t+1})^{\mathsf{T}} (\hat{x}_{t+1} - x_{t+1})] = \\ &= \min_L \max_{A_t} \operatorname{tr} \mathbf{E} [(\hat{x}_{t+1} - x_{t+1}) (\hat{x}_{t+1} - x_{t+1})^{\mathsf{T}}] = \\ &= \min_L \max_{A_t} \operatorname{tr} \mathbf{E} \{[A_t ((I - L C_t)(\hat{x}_t - x_t) + L v_t) - e_t] \times \\ &\times [A_t ((I - L C_t)(\hat{x}_t - x_t) + L v_t) - e_t]^{\mathsf{T}}\} = \\ &= \min_L \max_{A_t} \operatorname{tr} \{A_t [(I - L C_t) D_t (I - L C_t)^{\mathsf{T}} + L Q_t L^{\mathsf{T}}] A_t^{\mathsf{T}} + R_t\} = \end{aligned} \tag{4}$$

$$= \min_{L} \max_{A_t} \operatorname{tr}\{[(I-LC_t)D_t(I-LC_t)^{\mathrm{T}}+LQ_tL^{\mathrm{T}}]A_t^{\mathrm{T}}A_t+R_t\}. \qquad (5)$$

Так как оптимизируемая функция в выражении (5) непрерывна, выпукла по L и вогнута (линейна) по $A_t^{\mathrm{T}}A_t$, то в силу теоремы 37.3.2 [1] можем изменить последовательность оптимизации:

$$\min_{L \in R^{n\times m}} \max_{A_t^{\mathrm{T}}A_t \in K_t} \mathbf{E}\|\hat{x}_{t+1}-x_{t+1}\|^2 =$$

$$= \max_{A_t^{\mathrm{T}}A_t \in K_t} \min_{L \in R^{n\times m}} \operatorname{tr}\{[(I-LC_t)D_t(I-LC_t)^{\mathrm{T}}+LQ_tL^{\mathrm{T}}]A_t^{\mathrm{T}}A_t+R_t\}. \qquad (6)$$

Нетрудно проверить, что оптимизируемая функция в выражении (6) принимает минимальное значение при $L=D_tC_t^{\mathrm{T}}(C_tD_tC_t^{\mathrm{T}}+Q_t)^{-1}$. Следовательно,

$$\min_{L \in R^{n\times m}} \max_{A_t^{\mathrm{T}}A_t \in K_t} \mathbf{E}\|\hat{x}_{t+1}-x_{t+1}\|^2 =$$

$$= \max_{A_t^{\mathrm{T}}A_t \in K_t} \operatorname{tr}\{[D_t-D_tC_t^{\mathrm{T}}(C_tD_tC_t^{\mathrm{T}}+Q_t)^{-1}C_tD_t]A_t^{\mathrm{T}}A_t+R_t\} =$$

$$= \max_{A_t^{\mathrm{T}}A_t \in K_t} \operatorname{tr}(P_tA_t^{\mathrm{T}}A_t+R_t).$$

Существование этого максимума вытекает из следствия 2 теоремы 32.3 [1].

Из выражения (4) видно, что ошибка оценивания достигает наибольшего значения, если матрицы $A_0, A_1, \ldots, A_{t-1}$ выбрать так, чтобы матрица D_t была максимальной, т. е. $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{t-1}$ надо выбрать минимаксными. Теорема доказана.

Замечание. Чтобы показать применимость теоремы, отметим, что если, например, матрица A_i, $i=0, 1, \ldots, t$, имеет вид $A_i=c_i\bar{A}_i$, где $\bar{A}_i$ — известная матрица, а c_i — неизвестный скаляр из заданного промежутка, или если матрицы A_i, P_i, $i=0, 1, \ldots, t$, диагональны и каждый элемент матрицы A_i принадлежит заданному промежутку, то условия теоремы относительно матрицы A_i, $i=0, 1, \ldots, t$, выполнены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, М., «Мир», 1973.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
12/I 1982