EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 31. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1982, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 31
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1982, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1982.3.18

УДК 531.011; 62—50

И. КЕЙС

О ДИНАМИКЕ КВАЗИКАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

I. KEIS. KVAASIKANOONILISTE SÜSTEEMIDE DÜNAAMIKAST

I. KEIS. ON THE DYNAMICS OF THE QUASI-CANONICAL SYSTEMS

(Представил Н. Алумяэ)

В работе, продолжающей исследования [1–3], рассмотрен ряд интегральных и локальных свойств канонизируемых систем (квазиканонических). Эти системы заданы союзными с $\omega(dx,dt) \stackrel{\Delta}{=} b\cdot dx + hdt$ уравнениями

$$Rx^{\cdot}=a,\ R=[r_{i\sigma}],\ r_{i\sigma}=\partial b_i/\partial x_\sigma-\partial b_\sigma/\partial x_i,\ x^{\cdot}=dx/dt \quad (i,j,\sigma=\overline{1,\ 2n}), \quad (1)$$

$$a=\nabla_x h-\partial b/\partial t, \quad b=(b_j)^*,$$

$$x=(q_1,\ \ldots,\ q_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n)^*,\ \Delta R\stackrel{\Delta}{=}\det R>0 \quad (a\cdot b=\sum_{i=1}^{2n}a_jb_j),$$

где форма ω — класса $2n+1\to(\Delta R>0)$, $b(t,x)$, $h(t,x)$ — достаточно гладкие функции. Гомеоморфизм $\tilde{t}=\vartheta(t,x)$, $\tilde{x}=f(t,x)$ переводит (1) в квазиканоническую систему, союзную с $\tilde{\omega}$, полученной из ω гладким отображением $t\to\tilde{t}$, $x\to\tilde{x}$. В нормальных переменных [4, 5] формы $\omega(dx,dt):\tau=\tau(t,x)$, $\xi=\xi(t,x)$ имеем $\omega\stackrel{\Delta}{=}P\cdot dQ-G(\tau,Q,P)d\tau$, и система (1) переходит в гамильтонову [4]

$$d\xi/d\tau=Z\nabla_\xi G,\ Z=\begin{bmatrix}0, & 1_n\\ -1_n, & 0\end{bmatrix}\ \text{при}\ c_1\leqslant\vartheta^{\cdot},\ \tau^{\cdot}\leqslant c_2<\infty,\ c_1>0,\ c_{1,2}=\text{const}. \quad (2)$$

Всякая квазиканоническая система является скрытой канонической.

Итегральные свойства. Существование инварианта $I_1^0=\oint b\cdot\delta x$ ($\Omega^0\stackrel{\Delta}{=}b\cdot dx$ — класса $2n$ [4, 5]) — критерий квазиканоничности, т. е. представимости системы в виде (1) с $\Delta R>0$ $(\forall h\subset C_1(t,x))$.

Аналогично [6], любой линейный по δx относительный инвариант $\oint b^*\cdot\delta x\stackrel{\Delta}{=}I_1^*\equiv c^*I_1^0$ системы (1), т.е. $\Omega^*=c^*\Omega^0$, где $c^*=\text{const}$. Система (1) имеет абсолютный инвариант порядка $2n$ и вида

$$I_{2n}=\int_\Omega M(t,x)\,\delta x_1\ldots\delta x_{2n},$$

$$M^{\cdot}+M\,\mathrm{div}_x^{\cdot}X(t,x)=0\ \ (X=x^{\cdot},\ \text{здесь}\ x^{\cdot}=R^{-1}a). \quad (3)$$

Из (1), (3) в новых независимых переменных $\theta=\theta(t,x)$, $y=y(t,x)$ находим

$$dy/d\theta=\tilde{\lambda}^{-1}Y(\theta,y),\quad dN/d\theta+N(\theta,y)\,\mathrm{div}_y\,(\tilde{\lambda}^{-1}Y)=0$$

$$(\tilde{N}=N(\theta, y),\ \tilde{\lambda}(\theta, y)=\theta^{\cdot}) \qquad (4)$$

и формулу связи множителей M, N исходной и преобразованной системы (4)

$$N=\tilde{\lambda} M \tilde{\theta}_{t}^{-1} \Delta^{-1}(J),\quad J=[\partial y/\partial x],\quad \tilde{\theta}_t=\lambda^*(0, y_0)+\int_0^t \lambda_t^* d\sigma \quad (\theta^{\cdot}=\lambda(t, x)). \qquad (5)$$

При известных функциях $\tilde{\tau}_t$, $\Delta(J^0)$ от t, x и свойстве $N^0=1$ системы (2) получим из (5) значение M в (3)

$$M(t, x)=\lambda^{-1}\tilde{\tau}_t\Delta(J^0),\qquad \lambda=\lambda(t, x)=d\tau/dt,\qquad J^0=[\partial\xi/\partial x]\qquad (\theta\to\tau),$$

$$\tilde{\theta}(t, y)\overset{\Delta}{=}\theta(t, x(t, y)),\qquad \tilde{\tau}(t, \xi)\overset{\Delta}{=}\tau(t, x(t, \xi)),\qquad \lambda^*(t, y)\overset{\Delta}{=}\lambda[t, x(t, y)].$$

Рассмотрим стационарный на $\mathring{x}(t)$-решениях (1) функционал Пфаффа

$$I[\tilde{x}]=\int_{t_0}^t (b\cdot\tilde{x}^{\cdot}+h)\, d\sigma,\qquad \delta I[x]=0 \qquad (6)$$

при фиксированных концах t_0, t, $\tilde{x}(t_0)$, $x(t)$. Так как (1) удовлетворяет модифицированному принципу Ливенса [4], то она имеет на $x(t)$ вариационную форму $\mathscr{E}[L]_x=0$, где $L=b\cdot\tilde{x}^{\cdot}+h$, $\mathscr{E}=\nabla_{\tilde{x}}-d/dt\circ\nabla\tilde{x}^{\cdot}$. Отсюда при $b_t=0$, $h_t=0$ и $b_{xj}=0$, $h_{xj}=0$ система (1) имеет соответственно интегралы $h=h_0=\text{const}$ и $b_j=b_{j0}=\text{const}$.

Локальные свойства. Обозначим $I[x]=\bar{S}(t, t_0, x_0)$. В случае свободных концов найдем, учитывая (6), вариацию $\delta I[x]$ в виде

$$\delta\bar{S}=(b\cdot\delta x+h\delta t)\,\Big|_{t_0}^{t},\quad \partial\bar{S}/\partial t=-h(t_0, x_0)=-h_0,\quad dS(t, x_0)\overset{\Delta}{=}\delta\bar{S}+h_0\delta t. \qquad (7)$$

Фиксируя t_0 в (7), получим, что определенное (1) преобразование $x_0\to x$, $t_0\to t$, $x=x(t, x_0)$ имеет локальное свойство, данное уравнением

$$b(t, x)\cdot dx+h(t, x)\,dt=b(t_0, x_0)\,dx_0+dS(t, x_0)\qquad (x=x(t, x_0)). \qquad (8)$$

Справедливо обратное: если в переменных

$$t, \gamma: \omega=k(t_0, \gamma)\cdot d\gamma+dK(t, \gamma), \qquad (9)$$

$x=\tilde{x}(t, \gamma)$, $\Delta[\partial\tilde{x}/\partial\gamma]\neq 0$, $\gamma=\gamma(x_0)$, то $\tilde{x}(t, \gamma)$ — решения (1). Объединяя утверждения (8), (9), имеем для (1) модификацию теоремы эквивалентности [4]. Найдем в переменных t, x представление $\bar{C}$-канонического преобразования эквивалентной (1) системы (2). Определим $\bar{C}$ равенствами

$$b(t'', x'')\cdot dx''+h(t'', x'')\,dt\equiv c^0[b(t', x')\cdot dx+h(t', x')\,dt']-H_0\,d\tau-d\Phi, \qquad (10)$$

$$\tau=\tau(t, x),\quad \xi=\xi(t, x),\quad c^0=\text{const}\neq 0,\quad \tau(t', x')=\tau(t'', x'')=\tau,$$
$$\forall t''=\theta(t', x'),\quad x''=y(t', x'),$$

где τ, ξ — канонические переменные ω [5], H_0, Φ — произвольные функции. Действительно, переходя в тождестве (10) от t, x к τ, ξ, получим достаточное условие каноничности преобразования $\tau'\to\tau''=\tau=\tau'$, $\xi'\to\xi''$ вида

$$P''\cdot dQ''=c^0 P'\cdot dQ'-H^0\,d\tau-d\Phi^0\qquad (H^0=H_0+c_0-1,\ \Phi^0(\tau, \xi', \xi'')=\Phi).$$

Частным случаем асинхронного преобразования (10) будет обобщенноканоническое C^0-преобразование (11), сохраняющее каноничность (2) в новом времени τ':

$$p'\cdot dq' - H'\,d\tau' = c^0(p\cdot dq - H\,d\tau) - dF \quad (\tau' = T(\tau, q, p),\ \xi' = y(\tau, q, p). \quad (11)$$

При $c_0 = 1$, $H_0 = 0$, $\Phi_0 = -\bar{S}$ из (7), (10) находим свойство (8) решения $x(t, x_0)$ системы (1). Поэтому эквивалентная (1) каноническая система (2) переходит на преобразовании $t_0 \to t$, $x_0 \to x(t, x_0)$ в каноническую систему.

В [3] отмечено, что любая линейная неголономная или оптимальная управляемая динамическая система с интегральным инвариантом типа Пуанкаре—Картана является скрытой канонической. Отсюда следует, что она будет квазиканонической системой (1), обладающей инвариантом I_1^0 и динамическими свойствами (3), (6), (8), (9).

Пример. Двумерная неавтономная (или автономная) система Лагранжа

$$q^{\cdot} = H_p,\quad p^{\cdot} = -H_q + f(t, q, p) \quad (H = H(t, q, p),\ \partial^2 H/\partial p^2 \neq 0,\ \Phi_x \overset{\triangle}{=} \partial\Phi/\partial x) \quad (12)$$

есть квазиканоническая, ибо существуют решения b_1, b_2, h системы

$$h_p = \varrho H_p + b_{2t},\quad h_q = \varrho(H_q - f) + b_{1t} \quad (\varrho \overset{\triangle}{=} b_{2q} - b_{1p},\ \Delta R = \varrho^2) \quad (13)$$

при условии, что форма $\omega^0 = b_1 dq + b_2 dp + h dt$ — класса 3. Это эквивалентно

$$\varrho \neq 0,\ h \neq (H_q - f) b_2 - H_p b_1 \ (\sim \omega^0 \neq 0 \text{ на } (12)). \quad (14)$$

Система (13) совместна лишь тогда, когда $\varrho = M$ — множитель (12), т. е. $M^{\cdot} = -Mf_p$. Решения, удовлетворяющие (14), имеют вид

$$\varrho = \varrho^0(q_0, p_0)\,|\partial(q, p)/\partial(q_0, p_0)|^{-1}, \qquad b_1 = b_1^0(t, q, p),$$

$$b_2 = \int_{q_0}^{q} (b_{1p} + \varrho)\,dq + b_2^0(t, p),$$

$$h = \int_{q_0}^{q} [\varrho(H_q - f) + b_{1t}]\,dq + \int_{p_0}^{p} [\varrho H_p + b_{2t}]\big|_{q=q_0} dp + h^0(t),$$

где произвол функций ϱ^0, b_1^0, b_2^0, h^0 отмеченных аргументов ограничен условием (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А., Исследования по динамике неголономных систем, М.—Л., ГИТТЛ, 1949, с. 28—38.
2. Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, М.—Л., ОГИЗ, ГИТТЛ, 1941, с. 34—54.
3. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **30**, № 2, 109—116 (1981).
4. Парс Л., Аналитическая динамика, М., «Наука», 1971, с. 286—289, 410—418, 531—532.
5. Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.—Л., ОГИЗ, Гостехиздат, 1947, с. 142—168.
6. Hwa-Chung Lee, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, ser. A, **LXII**, 237—247 (1947).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
30/XII 1981