EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 31. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1982, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 31
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1982, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1982.3.14

УДК 539.30

В. АРАК

РАВНОВЕСИЕ НЕОДНОРОДНО ЛЕГИРОВАННЫХ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

2. КУБИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА

(Представил Х. Абен)

1. Введение

В первой части данной работы [1] мы получили общие уравнения равновесия монокристаллических пластин, которые учитывают как анизотропность механических свойств монокристалла, так и неоднородное распределение примеси и температуры. Было показано, что анизотропность механических свойств монокристалла в случае тонких пластин описывается в уравнениях равновесия двумя тензорами $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $b_{\alpha\beta\gamma}$ в плоскости пластины (x, y). Этим тензорам присущи следующие свойства симметрии:

$$\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}=\bar{C}_{\alpha\beta\delta\gamma}, \qquad \bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}=\bar{C}_{\gamma\delta\alpha\beta}, \tag{1}$$

$$b_{\alpha\beta\gamma}=b_{\alpha\gamma\beta} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta=x, y). \tag{2}$$

Таким образом, оба тензора максимально могут иметь шесть различных компонент — шесть дробно рациональных функций от компонент тензора упругости монокристалла, согласно формулам (1.5) и (1.8)*. Тензоры $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $b_{\alpha\beta\gamma}$ учитывают класс симметрии монокристалла, а также кристаллографическую ориентацию плоскости пластины.

Концентрация примеси и температура в общем случае вводятся в уравнения посредством моментов $P_{\alpha\beta}$ и $Q_{\alpha\beta}$, которые определяются по формулам (1.2), (1.28) и (1.29). В случае монокристалла с кубической симметрией эти моменты имеют вид

$$P_{\alpha\beta}=P\delta_{\alpha\beta}, \tag{3}$$

$$Q_{\alpha\beta}=Q\delta_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, а P и Q определяются формулами

$$P=\int_{-h/2}^{h/2}[\alpha(T-T_0)+\beta N]\,dz, \tag{5}$$

$$Q=\int_{-h/2}^{h/2}[\alpha(T-T_0)+\beta N]z\,dz. \tag{6}$$

Здесь α и β — коэффициенты термического и концентрационного растяжения, а остальные обозначения соответствуют обозначениям [1].

Ниже рассматриваются круглые со свободными краями пластины из монокристалла с кубической симметрией. Выводятся уравнения равновесия для пластин с ориентацией поверхности (111) и (100), излагается

* Здесь и далее ссылки на формулы статьи [1] обозначаются двумя цифрами: первая — номер работы, вторая — номер формулы.

приближенный метод их решения и приводятся решения, которые в первом приближении моделируют равновесие пластины в условиях эпитаксиального роста из газовой фазы в реакторе с индукционным нагревом.

2. Уравнения равновесия

В [1] было показано, что три компоненты моментов напряжений $N_{\alpha\beta}$ и поперечные смещения ω, которые определяются формулами (1.20) и (1.12), удовлетворяют системе из четырех уравнений (1.24), (1.25) и (1.33).

Представим тензор $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в виде суммы двух слагаемых

$$\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}=\overset{(0)}{\bar{C}}_{\alpha\beta\gamma\delta}+\overset{(1)}{\bar{C}}_{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{7}$$

где изотропный тензор имеет вид

$$\overset{(0)}{\bar{C}}_{\alpha\beta\gamma\delta}=B\,(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})+(A-B)\,\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}. \tag{8}$$

Разделение является однозначно определенным при выполнении условий

$$\sum_{\alpha,\beta}\overset{(1)}{\bar{C}}_{\alpha\alpha\beta\beta}=0,\qquad \sum_{\alpha,\beta}\overset{(1)}{\bar{C}}_{\alpha\beta\alpha\beta}=0.$$

Коэффициенты упругости A и B выражаются теперь в виде

$$A=\sum_{\alpha,\beta}\bar{C}_{\alpha\alpha\beta\beta}/4, \tag{9}$$

$$B=\sum_{\alpha,\beta}(\bar{C}_{\alpha\beta\alpha\beta}-\bar{C}_{\alpha\alpha\beta\beta}/2)/4. \tag{10}$$

Таким же образом разделим на две части тензор $\bar{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, который определяется уравнением (1.31):

$$\bar{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}=\overset{(0)}{\bar{S}}_{\alpha\beta\gamma\delta}+\overset{(1)}{\bar{S}}_{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{11}$$

где

$$\overset{(0)}{\bar{S}}_{\alpha\beta\gamma\delta}=B'\,(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})+(A'-B')\,\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}, \tag{12}$$

$$A'=\sum_{\alpha,\beta}\bar{S}_{\alpha\alpha\beta\beta}/4, \tag{13}$$

$$B'=\sum_{\alpha,\beta}(\bar{S}_{\alpha\beta\alpha\beta}-\bar{S}_{\alpha\alpha\beta\beta}/2)/4. \tag{14}$$

Для членов в уравнениях равновесия, которые описывают анизотропию монокристаллической пластины, введем специальные обозначения L, M, K_α и K:

$$L=\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\overset{(1)}{\bar{S}}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,(\partial^2_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta}-\delta_{\alpha\beta}\Delta N_{\gamma\delta}), \tag{15}$$

$$M=-\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\overset{(1)}{\bar{C}}_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\frac{h^3}{12}\,\partial^4_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\omega+2\delta_{\alpha\beta}\partial^2_{\gamma\delta}\,Q\right), \tag{16}$$

$$K_\alpha=\sum_{\beta,\gamma,\delta}\partial_\beta\,(b_{\gamma\alpha\beta}\partial_\delta M_{\gamma\delta}), \tag{17}$$

$$K=\sum_{\alpha}\partial_\alpha K_\alpha, \tag{18}$$

где

$$\Delta=\sum_{\alpha}\partial^2_{\alpha\alpha}.$$

С учетом формул (1.27а), (3), (4) и (7)—(18) мы получим из системы (1.24)—(1.25) и (1.33) уравнения равновесия для неоднородно легированных монокристаллических пластин с кубической решеткой, которые в полярных координатах (r,θ) имеют вид

$$\frac{1}{r}\partial_r r N_{rr}+\frac{1}{r}\partial_\theta N_{r\theta}-\frac{1}{r}N_{\theta\theta}+K_r=0, \tag{19}$$

$$\frac{1}{r^2}\partial_r r^2 N_{r\theta}+\frac{1}{r}\partial_\theta N_{\theta\theta}+K_\theta=0, \tag{20}$$

$$\frac{1}{r}\partial_r(rN_{rr}\partial_r\omega+N_{r\theta}\partial_\theta\omega)+\frac{1}{r}\partial_\theta\left(N_{r\theta}\partial_r\omega+\frac{1}{r}N_{\theta\theta}\partial_\theta\omega\right)-$$

$$-\frac{h^3}{12}(A+B)\Delta^2\omega-2A\Delta Q+M=0, \tag{21}$$

$$h\left(\frac{1}{r}\partial_r\omega+\frac{1}{r^2}\partial^2_{\theta\theta}\omega\right)\partial^2_{rr}\omega-h\left(\partial^2_{r\theta}\frac{\omega}{r}\right)^2+$$

$$+(A'+B')\Delta(N_{rr}+N_{\theta\theta})+\Delta P+2B'K-L=0. \tag{22}$$

Конкретные выражения для величин K_r, K_θ, K, L и M зависят от кристаллографической ориентации поверхности пластины.

3. Пластины с ориентацией (111)

Тензор упругости кубического кристалла можно представить в виде

$$C_{abcd}=C_{44}(\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc})+C_{12}\delta_{ab}\delta_{cd}-$$

$$-(2C_{44}-C_{11}+C_{12})(a_a a_b a_c a_d+b_a b_b b_c b_d+c_a c_b c_c c_d)$$

$$(a,b,c,d=x,y,z), \tag{23}$$

где C_{11}, C_{12} и C_{44} — компоненты тензора деформации в стандартном шестимерном представлении (см., напр., [2]) и a_a, b_a, c_a — единичные векторы в направлениях главных осей кристалла. Выберем координатные оси в следующих кристаллографических направлениях:

$$x\doteq\langle 2\bar{1}\bar{1}\rangle,\qquad y\doteq\langle 01\bar{1}\rangle,\qquad z\doteq\langle 111\rangle,$$

и вычислим компоненты (23), а затем по формуле (1.5) — компоненты $b_{\alpha\beta\gamma}$. В полярных координатах получим

$$\begin{aligned}b_{r\theta\theta}=b_{\theta r\theta}=-b_{rrr}=v\cos 3\theta,\\ b_{rr\theta}=b_{\theta rr}=-b_{\theta\theta\theta}=v\sin 3\theta,\end{aligned} \tag{24}$$

где

$$v=(\sqrt{2})^{-1}(2C_{44}-C_{11}+C_{12})/(C_{44}+C_{11}-C_{12}). \tag{25}$$

По формулам (1.5), (1.9), (1.31) и (7)—(14) найдем

$$A=3C_{44}(C_{11}+2C_{12})/(4C_{44}+C_{11}+2C_{12}), \tag{26а}$$

$$B=3C_{44}(C_{11}-C_{12})/[2(C_{44}+C_{11}-C_{12})], \tag{26б}$$

$$A'=1/(4A),\qquad B'=1/(4B) \tag{27}$$

и

$$\bar{C}^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}=\bar{S}^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}=0. \tag{28}$$

Таким образом, в уравнениях равновесия имеет место (см. (15) и (16)):

$$L=M=0. \tag{29}$$

Величины K_r, K_θ и K получим из формул (17), (18), (24) и (1.27а):

$$K_r=-v\cos 3\theta\left(r\partial_r\frac{1}{r}\partial_r m-\frac{1}{r^2}\partial^2_{\theta\theta}m\right)+2v\sin 3\theta\cdot\partial^2_{r\theta}\frac{1}{r}m, \tag{30}$$

$$K_\theta=v\sin 3\theta\left(r\partial_r\frac{1}{r}\partial_r m-\frac{1}{r^2}\partial^2_{\theta\theta}m\right)+2v\cos 3\theta\cdot\partial^2_{r\theta}\frac{1}{r}m, \tag{31}$$

$$K=\frac{1}{r}\partial_r rK_r+\frac{1}{r}\partial_\theta K_\theta, \tag{32}$$

где

$$m=-\frac{h^3}{12}(A+B)\Delta\omega-2AQ. \tag{33}$$

4. Пластины с ориентацией (100)

Координатные оси совпадают теперь с кристаллографическими. Вычисления проведем по аналогии с предыдущим разделом. В результате получим

$$b_{\alpha\beta\gamma}=0, \tag{34}$$

$$A=(C_{11}-C_{12})(C_{11}+2C_{12})/(2C_{11}), \tag{35а}$$

$$B=(2C_{44}+C_{11}-C_{12})/4, \tag{35б}$$

$$\begin{aligned}&\bar{C}^{(1)}_{rr\theta\theta}=\bar{C}^{(1)}_{r\theta r\theta}=-\bar{C}^{(1)}_{rrrr}=-\bar{C}^{(1)}_{\theta\theta\theta\theta}=C\cos 4\theta,\\&\bar{C}^{(1)}_{rrr\theta}=-\bar{C}^{(1)}_{\theta\theta r\theta}=C\sin 4\theta,\end{aligned} \tag{36}$$

где

$$C=(2C_{44}-C_{11}+C_{12})/4. \tag{37}$$

Для коэффициентов упругой податливости имеем

$$A'=1/(4A), \quad B'=B/[4(B^2-C^2)]. \tag{38}$$

При замене

$$C\to -C/[4(B^2-C^2)] \tag{39}$$

из формул (36) получаются соответствующие компоненты тензора $\bar{S}^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

В уравнениях равновесия в рассматриваемом случае надо положить

$$K_r=K_\theta=K=0.$$

Выражения для величин L и M можно получить подстановкой вычисленных здесь коэффициентов $\bar{C}^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $\bar{S}^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в формулы (15) и (16). Явные выражения для L и M будут приведены ниже в приближенном виде.

5. Метод приближений

Рассмотрим круглые пластины с осесимметричным распределением примеси и температуры. В общем случае решения системы (19)—(22) не являются осесимметричными, так как система содержит анизотропные члены, пропорциональные величинам $v\cos 3\theta$ и $v\sin 3\theta$ в случае пластин (111) и величинам $C\cos 4\theta$, $C\sin 4\theta$ для пластин (100). Постоянные v и C, в свою очередь, пропорциональны величине $(2C_{44}-C_{11}+C_{12})$, которая в случае изотропного материала равна нулю. Эту величину будем рассматривать как малый параметр и представим решения системы в виде степенного ряда. Таким образом, любое из решений N_{rr}, $N_{\theta\theta}$, $N_{r\theta}$ и ω принимает вид

$$F(r,\theta)=F^{(0)}(r)+F^{(1)}(r,\theta)+F^{(2)}(r,\theta)+\ldots, \tag{40}$$

где

$$F^{(1)}(r,\theta)=F^{(1c)}(r)\cos\nu\theta+F^{(1s)}(r)\sin\nu\theta, \tag{41}$$

$$F^{(2)}(r,\theta)=F^{(20)}(r)+F^{(2c)}(r)\cos\nu\theta+F^{(2s)}(r)\sin\nu\theta \tag{42}$$

и $\nu=\begin{cases}3 & \text{— для пластин (111),}\\ 4 & \text{— для пластин (100).}\end{cases}$

Первое приближение $F^{(0)}(r)$ является осесимметричным. Второй член $F^{(1)}(r,\theta)$ не содержит осесимметричной поправки первой степени от $(2C_{44}-C_{11}+C_{12})$, так как она уже включена в член $F^{(0)}(r)$. Из формул (19)—(22) получим уравнения для первого приближения

$$\frac{d}{dr}(rN^{(0)}_{rr})-N^{(2)}_{\theta\theta}=0, \tag{43}$$

$$N^{(0)}_{r\theta}=0, \tag{44}$$

$$N^{(0)}_{rr}\frac{d\omega^{(0)}}{dr}-\frac{h^3}{12}(A+B)\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\omega^{(0)}}{dr}\right)\right)-2A\frac{dQ}{dr}=0, \tag{45}$$

$$\frac{h}{2r}\left(\frac{d\omega^{(0)}}{dr}\right)^2+(A'+B')\frac{d}{dr}(N^{(0)}_{rr}+N^{(0)}_{\theta\theta})+\frac{dP}{dr}=0, \tag{46}$$

и для второго приближения

$$\frac{1}{r}\partial_r rN^{(1)}_{rr}+\frac{1}{r}\partial_\theta N^{(1)}_{r\theta}-\frac{1}{r}N^{(1)}_{\theta\theta}+K^{(1)}_r=0, \tag{47}$$

$$\frac{1}{r^2}\partial_r r^2N^{(1)}_{r\theta}+\frac{1}{r}\partial_\theta N^{(1)}_{\theta\theta}+K^{(1)}_\theta=0, \tag{48}$$

$$\frac{1}{r}\partial_r\left(rN^{(0)}_{rr}\partial_r\omega^{(1)}+rN^{(1)}_{rr}\frac{d\omega^{(0)}}{dr}\right)+\frac{1}{r}\frac{d\omega^{(0)}}{dr}\partial_\theta N^{(1)}_{r\theta}+\frac{1}{r^2}N^{(0)}_{\theta\theta}\partial^2_{\theta\theta}\omega^{(1)}-$$

$$-\frac{h^3}{12}(A+B)\Delta^2\omega^{(1)}+M^{(1)}=0, \tag{49}$$

$$\frac{h}{2r}\partial_r\left[\frac{d\omega^{(0)}}{dr}\partial_r\omega^{(1)}\right]+\frac{h}{r^2}\frac{d^2\omega^{(0)}}{dr^2}\partial^2_{\theta\theta}\omega^{(1)}+$$

$$+(A'+B')\Delta(N^{(1)}_{rr}+N^{(1)}_{\theta\theta})+2B'K^{(1)}-L^{(1)}=0. \tag{50}$$

Величины K_r, K_θ, K, L и M в первом приближении равны нулю, а во втором приближении имеем

$$K_r^{(1)} = v\cos 3\theta \cdot r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}N_{rr}^{(0)}\frac{d\omega^{(0)}}{dr}\right), \tag{51}$$

$$K_\theta^{(1)} = -v\sin 3\theta \cdot r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}N_{rr}^{(0)}\frac{d\omega^{(0)}}{dr}\right), \tag{52}$$

$$K^{(1)} = v\cos 3\theta \cdot r^2\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}N_{rr}^{(0)}\frac{d\omega^{(0)}}{dr}\right)\right], \tag{53}$$

$$L^{(1)} = -\frac{4C\cos 4\theta}{B^2-C^2}r^4\frac{d^4N^{(0)}}{[d(r^2)]^4}, \tag{54}$$

$$M^{(1)} = \frac{4}{3}h^3C\cos 4\theta r^4\frac{d^4\omega^{(0)}}{[d(r^2)]^4}, \tag{55}$$

где для пластин (111) $C=0$ и для пластин (100) $v=0$.

Решение системы в первом приближении (43) — (46) мы рассмотрим в следующем разделе, что же касается громоздкой на вид системы (47) — (50), то ее можно свести подстановкой (41) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Более того, в ряде случаев можно пренебречь квадратичными членами ввиду их малости.

6. Осесимметричное приближение

Из уравнений первого приближения (43) — (46) можно исключить величину $N_{\theta\theta}^{(0)}$. В результате получим систему из двух уравнений второго порядка относительно $N_{rr}^{(0)}$ и $d\omega^{(0)}/dr$. Четыре краевых условия имеют вид:

$$N_{rr}^{(0)} = N_{\theta\theta}^{(0)}, \quad M_{rr}^{(0)} = M_{\theta\theta}^{(0)} \quad \text{при } r=0,$$

и (56)

$$N_{rr}^{(0)} = 0, \quad M_{rr}^{(0)} = 0 \quad \text{при } r=a,$$

где a — радиус пластины. Моменты $M_{rr}^{(0)}$ и $M_{\theta\theta}^{(0)}$ по формулам (1.27), (7) и (8) найдем в виде

$$M_{rr}^{(0)} = -\frac{h^3}{12}\left[(A+B)\frac{d^2\omega^{(0)}}{dr^2} + (A-B)\frac{1}{r}\frac{d\omega^{(0)}}{dr}\right] - 2AQ, \tag{57}$$

$$M_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{h^3}{12}\left[(A-B)\frac{d^2\omega^{(0)}}{dr^2} + (A+B)\frac{1}{r}\frac{d\omega^{(0)}}{dr}\right] - 2AQ. \tag{58}$$

Для упрощения системы уравнений введем безразмерные величины:

$$\varrho = (r/a)^2, \tag{59}$$

$$\Phi = \frac{1}{h\sqrt{(A+B)(A'+B')}}\frac{d\omega^{(0)}}{d\varrho}, \tag{60}$$

$$r = \frac{a^2}{h^3(A+B)}N_{rr}^{(0)}, \tag{61}$$

$$p = \frac{a^2}{2h^3(A+B)(A'+B')}P, \tag{62}$$

$$q = \frac{6a^2A}{h^4\sqrt{(A+B)^3(A'+B')}}Q. \tag{63}$$

В этих обозначениях система (43)—(46) принимает вид:

$$\frac{d^2(\varrho r)}{d\varrho^2}+\frac{dp}{d\varrho}+\frac{1}{2}\Phi^2=0, \tag{64}$$

$$\frac{d^2(\varrho\Phi)}{d\varrho^2}+\frac{dq}{d\varrho}=3\Phi r. \tag{65}$$

С учетом (57) и (58) граничные условия (56) можно привести к виду

$$\varrho\, dr/d\varrho=0, \quad \varrho d\Phi/d\varrho=0 \quad \text{при } \varrho=0$$

и

$$r=0, \quad \varrho\frac{d\Phi}{d\varrho}+\frac{A}{A+B}\Phi+q=0 \quad \text{при } \varrho=1. \tag{56a}$$

В качестве примера рассмотрим монокристаллическую пластину в процессе эпитаксиального роста из газовой фазы. Пластина состоит из пленки и подложки, которые легированы разными примесями и с разной степенью легирования. Кроме того, температура пластины не постоянна. Произведение концентрации примеси на коэффициент примесного расширения зададим в виде

$$\beta N=\begin{cases}\beta_1 N_1 \text{ при } -\dfrac{h}{2}<z<-\dfrac{h}{2}+h_1,\\ \beta_2 N_2 \text{ при } \dfrac{h}{2}-h_2<z<\dfrac{h}{2},\end{cases} \tag{66}$$

$$h_1+h_2=h,$$

где h_1 и h_2 — толщины подложки и пленки соответственно.

В [3] показано, что в реакторе с индукционным нагревом температурное поле в пластине можно аппроксимировать формулой

$$T=T_0+\delta T\cdot n^2/a^2+T_z\cdot z, \tag{67}$$

где δT и T_z — отрицательные числа.

По формулам (5) и (6) найдем моменты P и Q:

$$P=h\alpha\delta T\frac{r^2}{a^2}+h_1\beta_1 N_1+h_2\beta_2 N_2, \tag{68}$$

$$Q=\frac{h^3}{12}\alpha T_z+\frac{h_1 h_2}{2}(\beta_2 N_2-\beta_1 N_1). \tag{69}$$

В безразмерной форме, согласно выражениям (59), (62) и (63), эти моменты имеют вид

$$p=p_0+p_1\varrho, \tag{68a}$$

$$q=\text{const}. \tag{69a}$$

Как правило, P и Q намного меньше единицы и решения системы (64)—(65) при граничных условиях (56a) можно представить в виде степенного ряда по ϱ, рассматривая при этом p_1 и q как малые параметры. Сохраняя только члены, у которых суммарная степень p_1 и q меньше четырех, получим

$$n=\left(\frac{p_1}{2}+\frac{q^2}{4u}-\frac{1+2u}{8u^3}p_1 q^2\right)(1-\varrho)+\frac{p_1 q^2}{8u^2}\left(\frac{5}{6}-\varrho^2+\frac{1}{6}\varrho^3\right), \tag{70}$$

$$\Phi=-\frac{q}{u}+\frac{p_1q}{16u}\left(\frac{12+13u}{10u}-3\varrho^2+2\varrho^3-\frac{3}{10}\varrho^4\right)+$$

$$+\frac{q}{4u}\left(p_1-\frac{1+2u}{4u}p_1^2+\frac{q^2}{2u^2}\right)\left(\frac{1+2u}{u}-3\varrho+\varrho^2\right), \qquad (71)$$

где

$$u=A/(A+B). \qquad (72)$$

Отметим, что уравнения в осесимметричном приближении (43)—(46) более общие, чем осесимметричные уравнения для изотропного материала, так как они содержат три независимых коэффициента упругости: A, B и $1/(A'+B')$. Только в случае пластин с ориентацией (111) имеет место связь (см. (26) и (27))

$$4AB(A'+B')/(A+B)=1,$$

и уравнения (47)—(50) по форме совпадают с уравнениями для изотропного материала. В этом случае по A и B можно определить эффективный модуль Юнга и отношение Пуассона.

Автор благодарен Г. Ашкинази за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арак В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **31**, № 3, 328—333 (1982).
2. Келли А., Гровс Г., Кристаллография и дефекты в кристаллах, М., «Мир», 1974, с. 188.
3. Bloem, J., Goemans, A. H., J. Appl. Phys., **43**, № 3(2), 1281—1283 (1972).

Научно-исследовательский институт Таллинского электротехнического завода им. М. И. Калинина

Поступила в редакцию 26/I 1982

V. ARAK

EBAÜHTLASELT LEGEERITUD MONOKRISTALLPLAATIDE TASAKAALUOLEKUD

2. Kuubiline kristallivõre

Töös [1] tuletatud monokristallplaatide mehaanilise tasakaalu võrrandeid, mis arvestavad temperatuuri ja legeeriva lisandi ebaühtlast jaotust, on vaadeldud kuubilise kristallivõre ja plaadi pinna orientatsioonide (111) ja (100) korral. Sellel erijuhul on leitud tasakaaluvõrrandite konkreetne kuju, arendatud lähendusmeetod ja leitud erilahend esimeses lähenduses, mis modelleerib monokristallplaati gaasifaasi epitaksiaalprotsessis.

V. ARAK

EQUILIBRIUM STATES OF NONUNIFORMLY DOPED SINGLE CRYSTAL PLATES

2. Cubic crystal lattice

Equilibrium state equations of thin single crystal plates with nonuniformly distributed impurity and temperature found in Part I [1] are examined in the case of a cubic crystal lattice. The equations (19)—(22) are established for this special case. Elastic components defined in [1] to specify the symmetry properties of crystal and the surface normal of the plate are found in explicit form for (111) and (100) plates.

Approximation method for circular plates is proposed. The nonisotropic part of elastic components is taken as a small parameter for perturbation theory expansion. The first and second approximation equations are presented by equations (43)—(46) and (47)—(50), correspondingly. In many essential cases the nonlinear terms may be neglected in the second approximation equations.

The first approximation solution is found for impurity distribution (66) and temperature distribution (67) to model the single crystal slice during the vapour face epitaxy in a cold wall reaction tube [3]. It should be noted that the stress in the first approximation is axially symmetric, but not the strain (see equation (8) in [1]).