EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 31. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1982, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 31
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1982, № 3

УДК 539.30

В. АРАК

РАВНОВЕСИЕ НЕОДНОРОДНО ЛЕГИРОВАННЫХ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

1. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ

(Представил Х. Абен)

Параметр кристаллической решетки монокристалла зависит от концентрации введенной в него примеси (см. [1, 2]). В случае ее неоднородного распределения монокристаллическая пластина, испытывая внутренние напряжения, деформируется. В данной работе получены условия равновесия для тонких монокристаллических пластин, которые одновременно учитывают: 1) анизотропность механических свойств монокристалла, 2) неоднородное распределение примеси, 3) неоднородное температурное поле.

Линейные уравнения для ортотропных пластин при неоднородном температурном поле приведены в монографии [3]. Но эти уравнения для нашего случая не вполне пригодны по двум причинам. Во-первых, тензор упругости для монокристаллической пластины более общий, чем для ортотропной. Например, пластина из монокристалла с кубической симметрией и ориентацией поверхности (111) не является ортотропной. Во-вторых, нелинейные члены в уравнениях равновесия не учитываются, хотя из изотропной теории известно, что они весьма существенны при расчете искривления пластины [4].

При указанных выше условиях напряжения и деформации в монокристалле связаны соотношениями:

$$\sigma_{ab}=\sum_{c,d} C_{abcd}(u_{cd}-f_{cd}), \tag{1}$$

где

$$f_{cd}=\alpha_{cd}(T-T_0)+\beta_{cd}N, \tag{2}$$

σ_{ab} — тензор напряжения, C_{abcd} — тензор упругости монокристалла, u_{cd} — тензор деформации, α_{cd} — тензор температурного растяжения, β_{cd} — тензор концентрационного растяжения, T — температурное поле, T_0 — начальная температура (постоянная) и N — концентрация примеси. Здесь и в дальнейшем свободные индексы и индексы суммирования a, b, c, d пробегают множество координатных осей $\{x, y, z\}$.

Пусть поверхность пластины расположена перпендикулярно к оси z. Тогда на поверхности выполняются граничные условия

$$\sigma_{az}=0 \qquad (a=x, y, z). \tag{3}$$

В случае тонкой пластины можно допустить, что условия (3) выполняются во всем объеме пластины. При этом в формуле (1) некоторые компоненты тензора деформации становятся линейно зависимыми, отчего компоненты u_{az} могут быть выражены через компоненты $u_{\alpha\beta}$ (греческие индексы пробегают множество $\{x, y\}$). Если матрицу A_{ab} определить равенствами

$$A_{ab}=C_{zabz}, \tag{4}$$

и величины $b_{a\alpha\beta}$ — выражениями

$$b_{a\alpha\beta}=\sum_b (A^{-1})_{ab}C_{zb\alpha\beta}, \qquad (5)$$

где $(A^{-1})_{ab}$ — матрица, обратная матрице A_{ab}, то компоненты u_{za} выражаются формулами

$$u_{z\alpha}=f_{z\alpha}-\sum_{\gamma,\delta} b_{\alpha\gamma\delta}(u_{\gamma\delta}-f_{\gamma\delta})/2, \qquad (6)$$

$$u_{zz}=f_{zz}-\sum_{\gamma,\delta} b_{z\gamma\delta}(u_{\gamma\delta}-f_{\gamma\delta}). \qquad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (1), получим ненулевые компоненты тензора напряжения, выраженные через линейно независимые компоненты тензора деформации в виде

$$\sigma_{\alpha\beta}=\sum_{\gamma,\delta} \bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}(u_{\gamma\delta}-f_{\gamma\delta}), \qquad (8)$$

где $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор упругости монокристаллической пластины:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}=C_{\alpha\beta\gamma\delta}-\sum_a C_{\alpha\beta az}b_{a\gamma\delta}. \qquad (9)$$

Рассмотрим теперь, к чему приводит линейная зависимость, определенная формулой (6), в соотношениях между тензором u_{ab} и вектором v_a деформации. В общем случае имеют место соотношения

$$u_{ab}=(\partial_a v_b+\partial_b v_a)/2+\sum_c (\partial_a v_c)\partial_b v_c/2, \qquad (10)$$

где

$$\partial_a\equiv\frac{\partial}{\partial a} \quad (a=x, y, z).$$

Представим компоненты вектора деформации в виде степенного ряда по координате z, учитывая только первые члены разложения:

$$v_\alpha=\eta_\alpha+\zeta_\alpha z, \qquad (11)$$

$$v_z=\omega \qquad (12)$$

Величины η_α, ζ_α и ω зависят только от координат x и y.

Здесь необходимо отметить следующее. Строго говоря, мы имеем дело с двумя координатными системами: с прямоугольной системой (x, y, z) и возникающей в связи с деформацией пластины криволинейной системой (x', y', z'). Но учитывая относительную малость деформаций, в первом приближении можно считать, что компоненты вектора деформации, а также их частные производные в обеих системах совпадают, и штрих опустить.

С помощью формул (6) и (10) величину ζ_α можно выразить через величины η_α и ω. Пренебрегая квадратичными членами в (10), получаем

$$\zeta_\alpha=-\partial_\alpha\omega+2f^0_{z\alpha}-\sum_{\gamma,\delta} b_{\alpha\gamma\delta}(\partial_\gamma\eta_\delta-f^0_{\gamma\delta}). \qquad (13)$$

Верхний индекс означает, что соответствующие величины относятся к $z=0$. Величины $u_{\alpha\beta}$ можно теперь выразить также в виде ряда по z:

$$u_{\alpha\beta}=v_{\alpha\beta}+w_{\alpha\beta}z, \qquad (14)$$

где, согласно формулам (10)—(13),

$$v_{\alpha\beta}=(\partial_\beta\eta_\alpha+\partial_\alpha\eta_\beta)/2+(\partial_\alpha\omega)\partial_\beta\omega/2 \tag{15}$$

и

$$w_{\alpha\beta}=-\partial^2_{\alpha\beta}\omega+\partial_\alpha f^0_{\beta z}+\partial_\beta f^0_{\alpha z}-\sum_{\gamma,\delta} b_{\alpha\gamma\delta}(\partial^2_{\beta\gamma}\eta_\delta-\partial_\beta f^0_{\gamma\delta})/2-$$
$$-\sum_{\gamma,\delta} b_{\beta\gamma\delta}(\partial^2_{\alpha\beta}\eta_\delta-\partial_\alpha f^0_{\gamma\delta})/2. \tag{16}$$

В формуле (15) из членов второго порядка мы оставили только квадратичный член от величины ω.

Уравнения равновесия можно получить из условий экстремальности свободной энергии пластины (см. [5]). Величина свободной энергии на единицу площади пластины определяется выражением

$$F=\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\int_{-h/2}^{h/2} u_{\alpha\beta}\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\frac{1}{2}u_{\gamma\delta}-f_{\gamma\delta}\right)dz, \tag{17}$$

где h — толщина пластины.

Это выражение должно быть рассмотрено как функционал от продольных и поперечных смещений η_α и ω соответственно. Условия экстремальности выражаются в виде уравнений Лагранжа:

$$\sum_\gamma \partial_\gamma \frac{\partial F}{\partial(\partial_\gamma\eta_\alpha)}-\sum_{\gamma,\delta}\partial^2_{\gamma\delta}\frac{\partial F}{\partial(\partial^2_{\gamma\delta}\eta_\alpha)}=0, \tag{18}$$

$$\sum_\gamma \partial_\gamma \frac{\partial F}{\partial(\partial_\gamma\omega)}-\sum_{\gamma,\delta}\partial^2_{\gamma\delta}\frac{\partial F}{\partial(\partial^2_{\gamma\delta}\omega)}=0. \tag{19}$$

Для преобразования полученных уравнений определим моменты тензора напряжений согласно формулам

$$N_{\alpha\beta}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\alpha\beta}\,dz, \tag{20}$$

$$M_{\alpha\beta}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\alpha\beta}\cdot z\,dz. \tag{21}$$

С помощью формул (8), (14) и (17) нетрудно проверить, что выполняются соотношения

$$\frac{\partial F}{\partial v_{\alpha\beta}}=N_{\alpha\beta}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{\alpha\beta}}=M_{\alpha\beta}. \tag{23}$$

Уравнения (18) и (19) можно теперь представить в виде

$$\sum_{\beta,\gamma,\delta}\partial_\delta\left[N_{\beta\gamma}\frac{\partial v_{\beta\gamma}}{\partial(\partial_\delta\eta_\alpha)}\right]-\sum_{\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}\partial^2_{\delta\varepsilon}\left[M_{\beta\gamma}\frac{\partial w_{\beta\gamma}}{\partial(\partial^2_{\delta\varepsilon}\eta_\alpha)}\right]=0,$$

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\partial_\gamma\left[N_{\alpha\beta}\frac{\partial v_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\gamma\omega)}\right]-\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\partial^2_{\gamma\delta}\left[M_{\alpha\beta}\frac{\partial w_{\alpha\beta}}{\partial(\partial^2_{\gamma\delta}\omega)}\right]=0.$$

Подставляя производные из формул (15) и (16), получим уравнения равновесия:

$$\sum_\beta \partial_\beta(N_{\alpha\beta}+\sum_{\gamma,\delta} b_{\gamma\alpha\beta}\partial_\delta M_{\gamma\delta})=0, \tag{24}$$

$$\sum_{\alpha,\beta} \partial_\alpha (N_{\alpha\beta}\partial_\beta\omega + \partial_\beta M_{\alpha\beta}) = 0. \tag{25}$$

Моменты $N_{\alpha\beta}$ и $M_{\alpha\beta}$ являются функциями от частных производных по смещениям η_α и ω. Из формул (20), (21), (8) и (14)—(16) имеем

$$N_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta} \overline{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}\left[\frac{h}{2}\left(\partial_\gamma\eta_\delta + \partial_\delta\eta_\gamma + (\partial_\gamma\omega)\,\partial_\delta\omega\right) - P_{\gamma\delta}\right], \tag{26}$$

$$M_{\alpha\beta} = -\sum_{\gamma,\delta} \overline{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}\left[\frac{h^3}{12}\partial^2_{\gamma\delta}\,\omega + Q_{\gamma\delta} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\varepsilon,\varphi} b_{\gamma\varepsilon\varphi}\left(\frac{h^3}{12}\partial^2_{\delta\varepsilon}\,\eta_\varphi - \partial_\delta R_{\varepsilon\varphi}\right) + 2\partial_\delta R_{z\gamma}\right]. \tag{27}$$

Здесь

$$P_{ab} = \int_{-h/2}^{h/2} f_{ab}\, dz, \tag{28}$$

$$Q_{ab} = \int_{-h/2}^{h/2} f_{ab} z\, dz, \tag{29}$$

$$R_{ab} = \int_{-h/2}^{h/2} f_{ab} z^2\, dz. \tag{30}$$

Если поперечные смещения намного превышают продольные и моменты первого порядка величины f_{ab} намного больше производных от моментов второго порядка, то формула (27) принимает более простой вид

$$M_{\alpha\beta} = -\sum_{\gamma,\delta} \overline{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}\left[\frac{h^3}{12}\partial^2_{\gamma\delta}\,\omega + Q_{\gamma\delta}\right]. \tag{27a}$$

Таким образом, формулы (24) и (25) вместе с выражениями (26) и (27а) представляют собой три уравнения равновесия от трех неизвестных функций η_x, η_y и ω. Компоненты тензора упругости монокристалла C_{abcd} выражены в этих уравнениях через величины $\overline{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $b_{\alpha\beta\gamma}$, которые являются тензорами в двумерном пространстве (x, y). В дальнейшем будем называть их соответственно первым и вторым тензором упругости монокристаллической пластины.

Так как граничные условия по краям пластины выражаются через величины $N_{\alpha\beta}$ и $M_{\alpha\beta}$, то иногда более экономично использовать другой набор неизвестных функций, а именно: N_{xx}, N_{xy}, N_{yy} и ω. Три уравнения даются теперь формулами (24) и (25), где величины $M_{\alpha\beta}$ определяются формулой (27а). Четвертое уравнение получается из соотношений (26) путем исключения из них частных производных от продольных смещений η_α. Для этого коэффициенты упругой податливости монокристаллической пластины $\overline{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ определяются как решения линейного алгебраического уравнения

$$\sum_{\gamma\delta} \overline{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}\overline{S}_{\gamma\delta\varepsilon\varphi} = (\delta_{\alpha\varepsilon}\delta_{\beta\varphi} + \delta_{\alpha\varphi}\delta_{\beta\varepsilon})/2, \tag{31}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

Теперь соотношения (26) можно записать в виде

$$\left[\frac{h}{2}\left(\partial_\alpha\eta_\beta + \delta_\beta\eta_\alpha + (\partial_\alpha\omega)\,\partial_\beta\omega\right) - P_{\alpha\beta}\right] = \sum_{\gamma,\delta} \overline{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}N_{\gamma\delta}. \tag{32}$$

Вычислив вторые частные производные по координатам от обеих частей уравнения (32), найдем тензорное уравнение четвертого ранга. Проведя двукратное свертывание, получим два скалярных уравнения, так как существуют две возможности для проведения свертывания. Разность этих уравнений уже не будет содержать величин η_α. Она имеет вид

$$\frac{h}{2}(\Delta\omega)^2-\frac{h}{2}\sum_{\alpha,\beta}(\partial^2_{\alpha\beta}\omega)^2+\Delta\sum_{\alpha}P_{\alpha\alpha}-\sum_{\alpha,\beta}\partial^2_{\alpha\beta}P_{\alpha\beta}=$$

$$=\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\bar{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial^2_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta}-\Delta\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\bar{S}_{\alpha\alpha\beta\gamma}N_{\beta\gamma}, \qquad (33)$$

где

$$\Delta\equiv\partial^2_{xx}+\partial^2_{yy}.$$

Это и есть искомое четвертое уравнение.

Отметим, что прежде чем составлять уравнения равновесия для каждого конкретного случая необходимо:

1. Установить вид тензора упругости C_{abcd} по классу симметрии монокристалла (см. [6]).

2. Провести координатные преобразования компонент тензора упругости таким образом, чтобы ось z совпала с нормалью к поверхности пластины.

3. Вычислить компоненты первого и второго тензоров упругости пластины, а также величины $\bar{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ по формулам (4), (5), (9) и (31).

4. Вычислить по заданной концентрации примеси и температурному полю моменты $P_{\alpha\beta}$ и $Q_{\alpha\beta}$ (по формулам (2), (28) и (29)).

Представляет интерес сопоставить полученные уравнения (24)—(25) с уравнениями термоупругой задачи для ортотропных пластин из [3]. Эти уравнения должны совпадать, если в уравнениях (24)—(25) не учитывать нелинейные члены, ограничиться ортотропным случаем и использовать моменты $P_{\alpha\beta}$ и $Q_{\alpha\beta}$, которые учитывают только распределение температуры, а в уравнениях из [3] — считать коэффициенты упругости постоянными и осуществить переход к случаю тонкой пластины.

В ортотропном случае выполняются формулы

$$\bar{C}_{xxxy}=\bar{C}_{yyyx}=0, \qquad (34)$$

$$b_{\alpha\beta\gamma}=0, \qquad (35)$$

$$P_{xy}=Q_{xy}=0. \qquad (36)$$

Деформация и напряжение в тонких пластинах характеризуются тремя решениями уравнений равновесия (η_α, ω), а в более толстых пластинах, рассмотренных в [3], кроме этих, еще двумя решениями:

$$\varphi_\alpha=\sigma_{z\alpha}|_{z=0} \qquad (\alpha=x,y).$$

Таким образом, при переходе необходимо приравнять φ_α нулю и уменьшить число уравнений с пяти до трех. Из пяти уравнений в [3]:

$$\sum_{\beta}\partial_\beta N_{\alpha\beta}=0 \qquad (\alpha=x,y), \qquad (37)$$

$$\sum_{\beta}\partial_\beta M_{\alpha\beta}=0 \qquad (\alpha=x,y), \qquad (38)$$

$$\sum_{\beta}\partial_\beta N_{z\beta}=0, \qquad (39)$$

последнее отпадает при $\varphi_\alpha = 0$. Два уравнения (38) эквивалентны следующим:

$$\sum_{\alpha,\beta} \partial^2_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} = 0, \tag{38a}$$

$$\sum_{\gamma} (\partial^2_{\alpha\gamma} M_{\beta\gamma} - \partial^2_{\beta\gamma} M_{\alpha\gamma}) = 0. \tag{38б}$$

Если при переходе к случаю тонкой пластины в качестве трех уравнений выбрать (37) и (38а), то при вышеуказанных условиях уравнения в [3] совпадают с уравнениями (24)—(25), совпадают также выражения для моментов $N_{\alpha\beta}$ и $M_{\alpha\beta}$.

Отметим, что для тонкой пластины условие (38б) не выполняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cellotti, G., Nobili, D., Ostoja, P., J. Mater. Sci., 9, № 5, 821—828 (1974).
2. Nakamura, S., Nakajima, M., Nat. Techn. Rept, 23, № 1, 142—149 (1977).
3. Амбарцумян С. А., Теория анизотропных пластин, М., «Наука», 1967, с. 187.
4. Deyer, L. D., Huff, H. R., Boyd, W. W., J. Appl. Phys., 43, № 13, 5680—5688 (1971).
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория упругости, М., «Наука», 1965, с. 63.
6. Келли А., Гровс Г., Кристаллография и дефекты в кристаллах, М., «Мир», 1974, с. 193.

Научно-исследовательский институт Таллинского электротехнического завода им. М. И. Калинина

Поступила в редакцию 26/I 1982

V. ARAK

EBAÜHTLASELT LEGEERITUD MONOKRISTALLPLAATIDE TASAKAALUOLEKUD

1. Tasakaaluvõrrandid

On tuletatud monokristallplaatide mehaanilise tasakaalu võrrandid legeeriva lisandi ja temperatuuri suvalise jaotuse korral.

V. ARAK

EQUILIBRIUM STATES OF NONUNIFORMLY DOPED SINGLE CRYSTAL PLATES

1. General equations

In this paper equilibrium state equations for single crystal plates are found. Nonisotropic relation between stress and strain as well as nonuniformity of temperature and impurity concentration are taken into account by equations (1), (2). Two sets of elastic components — $\bar{c}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $b_{\alpha\beta\gamma}$ are defined by (5), (9) to specify the symmetry properties of crystal and crystallographical orientation of the surface normal of the plate

As in [5] for the case of isotropic plates, the equilibrium state equations are established here by minimising the free energy expression as a function of normal deflection ω and displacement vector η_α. They are found in the form of (24), (25), where the stress resultants and stress couples are related by variables ω, η_α by (26), (27). For circular plates another set of variables — ω, $N_{\alpha\beta}$ is more appropriate. By eliminating the displacement vector from (26), the equation (33) is found. So in this special case the set of equations is represented by (24), (25), (27a), (33).

The set of equations for orthotropic plates with nonuniform temperature distribution is presented by Ambartsumian in [3]. Those equations are more general than the ones found in this paper, as we have treated ounly the special case of thin plates. On the other hand the equations in [3] are more specific, as they deal with orthotropic plates and linear approximation only. There are certain conditions in which the equations found here and thous presented by Ambartsumian are simultanously valid. It is the case of thin orthotropic plates having constant impurity distribution and normal deflection so small that nonlinearity can be neglected.