EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 31. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1982, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 31
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1982, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1982.3.12

УДК 519.853.4

Маэ УРИ

РЕШЕНИЕ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

(Представил А. Хумал)

1. Постановка задачи размещения производства

Рассмотрим задачу размещения производства однородного продукта с кусочно-линейной целевой функцией (назовем ее задачей А (ср. [1], с. 52—54)): минимизировать функцию

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m_i}(e_{ik}t_{ik}+d_{i,k-1}y_{ik}) \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \qquad (j=\overline{1,n}), \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=\sum_{k=1}^{m_i}(a_{i,k-1}y_{ik}+t_{ik}) \qquad (i=\overline{1,m}), \qquad (3)$$

$$0\leqslant t_{ik}\leqslant (a_{ik}-a_{i,k-1})\,y_{ik} \qquad (i=\overline{1,m};\ k=\overline{1,m_i}), \qquad (4)$$

$$x_{ij}\geqslant 0, \quad y_{ik}\geqslant 0 \qquad (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m_i}), \qquad (5)$$

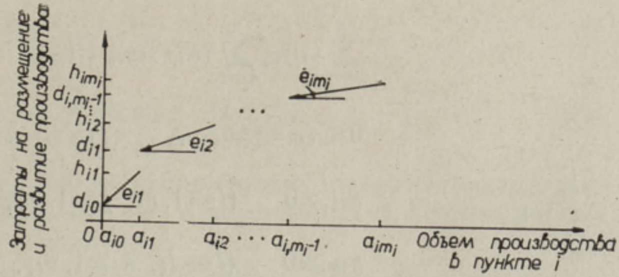
$$\sum_{k=1}^{m_i} y_{ik}\leqslant 1 \qquad (i=\overline{1,m}), \qquad (6)$$

$$y_{ik} \text{ — целые} \qquad (i=\overline{1,m};\ k=\overline{1,m_i}). \qquad (7)$$

Коэффициенты и переменные задачи А будем интерпретировать следующим образом: x_{ij} — объем перевозок из пункта i в пункт j; c_{ij} — удельные транспортные издержки, связанные с перевозкой единицы груза из пункта производства i в пункт потребления j; e_{ik} — затраты на производство единицы продукта по k-му варианту в пункте i; t_{ik} — объем продукции, производимой по k-му варианту в пункте i; $d_{i,k-1}$ — фиксированная доплата для достижения производственной мощности по k-му варианту в пункте i; $a_{i,k-1}$ — минимальная производственная мощность пункта i, работающего по k-му варианту (a_{im_i} — максимальная мощность); b_j — потребность в продукции в пункте j.

Введем обозначение $\Delta a_{ik}=a_{ik}-a_{i,k-1}$ и предположим, что $d_{ik}\geqslant d_{i,k-1}+e_{ik}\Delta a_{ik}=h_{ik}$, $d_{i0}>0$, $e_{ik}\geqslant e_{i,k+1}>0$, $0=a_{i0}<a_{i1}<\ldots<a_{im_i}$ и

$$h_{ik}/a_{ik}>h_{i,k+1}/a_{i,k+1} \qquad (k=\overline{1,\ m_i-1}). \qquad (8)$$



Кусочно-линейная разрывная функция затрат

Спецификой исследуемой задачи размещения является нелинейная зависимость затрат на размещение и развитие производства от объема производства. В модели задачи нелинейность явно не выражается благодаря использованию целочисленных переменных y_{ik}. В целевой функции учитывается то обстоятельство, что с увеличением мощности предприятия фиксированные доплаты возрастают, но расходы на производство единицы продукта сокращаются. Функция затрат на размещение и развитие производства показана на рисунке.

Л. С. Лэсдон ([1], с. 54) предлагает решать задачу такого типа методом разложения Бендерса: сначала фиксировать некоторые значения y_{ik} и решать соответствующую линейную задачу, затем решать целочисленную задачу для определения новых значений y_{ik}. Дополнительные ограничения в целочисленной задаче определяются из оптимального решения задачи, двойственной к линейной. Б. И. Алейников [2, 3] рассматривает эту задачу в несколько других постановках, в том числе и в сетевой. Он предлагает для нахождения локальных оптимумов метод случайного поиска и метод линеаризации.

Для решения задачи А мы будем исследовать полученные методом типа ветвей и границ подзадачи, в которых часть y_{ik} фиксирована, т. е. принята равной нулю или единице (кратко $y_{ik}=1$ фикс.). Введем обозначения

$$I_1=\{i \mid \exists\, k_i \in \{1, 2, \ldots, m_i\} : y_{ik_i}=1 \text{ фикс.}\};$$

$$I_c=\{1, 2, \ldots, m\}\setminus I_1;$$

$$v_i=\max\{k \mid y_{ik} \text{ — не фиксированы}\},\ i\in I_c;$$

$$X=(x_{ij}),\ Y=(y_{ik}),\ T=(t_{ik})\quad (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,v_i}).$$

Целевую функцию подзадачи получим из (1), учитывая, что при $i\in I_1$ $y_{ik_i}=1$ и $t_{ik}=y_{ik}=0$ $(k\neq k_i)$, а из (3) следует $t_{ik_i}=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}-a_{i,k_i-1}$. Таким образом, можем сформулировать подзадачу (назовем ее задачей АФ): минимизировать функцию

$$z(X,Y,T)=\sum_{i\in I_c}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}+\sum_{i\in I_c}\sum_{k=1}^{v_i}(e_{ik}t_{ik}+d_{i,k-1}y_{ik})+$$
$$+\sum_{i\in I_1}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+e_{ik_i})x_{ij}+\sum_{i\in I_1}(d_{i,k_i-1}-e_{ik_i}a_{i,k_i-1}) \tag{9}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \quad (j=\overline{1,n}), \tag{10}$$

$$a_{i,k_i-1}\leqslant\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\leqslant a_{ik_i} \quad (i\in I_1), \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant \sum_{k=1}^{v_i} (a_{i,k-1} y_{ik} + t_{ik}) \qquad (i \in I_c), \tag{12}$$

$$0 \leqslant t_{ik} \leqslant \Delta a_{ik} y_{ik} \qquad (i \in I_c;\ k = \overline{1, v_i}), \tag{13}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad (i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}), \tag{14}$$

$$y_{ik} \geqslant 0 \qquad (i \in I_c;\ k = \overline{1, v_i}), \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{v_i} y_{ik} \leqslant 1 \qquad (i = \overline{1, m}), \tag{16}$$

$$y_{ik} \text{ — целые} \qquad (i \in I_c;\ k = \overline{1, v_i}). \tag{17}$$

Соответствующую АФ непрерывную задачу (9)—(16) будем называть задачей БФ. В случае $I_1 = \varnothing$ и $v_i = m_i$ $(i = \overline{1, m})$ задача АФ совпадает с задачей А.

2. Свойства оптимальных решений задачи БФ

Теорема 1. *Если* (X^0, Y^0, T^0) *есть оптимальное решение непрерывной задачи БФ, то*

$$t_{ik}^0 = \Delta a_{ik} y_{ik}^0 \quad \text{при} \quad i \in I_c, \quad k = \overline{1, v_i}. \tag{18}$$

Доказательство. а) Если $y_{ik}{}^0 = 0$, то из (13) следует $t_{ik}{}^0 = 0$ $(i \in I_c)$. б) Предположим, что существует $y_{rs}{}^0 > 0$, но $t_{rs}{}^0 < \Delta a_{rs} y_{rs}{}^0$ $(r \in I_c)$. Выберем новое допустимое решение $(X^0, Y^0 - \Delta Y^0, T^0 + \Delta T^0)$, получаемое из вектора (X^0, Y^0, T^0) уменьшением $y_{rs}{}^0$ на $\Delta y_{rs}{}^0 > 0$ и увеличением $t_{rs}{}^0$ на $\Delta t_{rs}{}^0 > 0$, так что

$$t_{rs}^0 + \Delta t_{rs}^0 = \Delta a_{rs} (y_{rs}^0 - \Delta y_{rs}^0). \tag{19}$$

Из допустимости обоих векторов (X^0, Y^0, T^0) и $(X^0, Y^0 - \Delta Y^0, T^0 + \Delta T^0)$ вытекает соответственно $\sum_{j=1}^{n} x_{rj}^0 = \sum_{k=1}^{v_i} (a_{r,k-1} y_{rk}^0 + t_{rk}^0)$ и $\sum_{j=1}^{n} x_{rj}^0 =$

$$= \sum_{k=1,\ k \neq s}^{v_i} (a_{r,k-1} y_{rk}^0 + t_{rk}^0) + a_{r,s-1} (y_{rs}^0 - \Delta y_{rs}^0) + t_{rs}^0 + \Delta t_{rs}^0, \quad \text{т. е.} \quad \Delta t_{rs}^0 = a_{r,s-1} \Delta y_{rs}^0.$$

Из (19) следует, что $\Delta y_{rs}^0 = (\Delta a_{rs} y_{rs}^0 - t_{rs}^0) / a_{rs} > 0$. Учитывая, что $e_{ik} < h_{ik}/a_{ik} < h_{i,k-1}/a_{i,k-1} \leqslant d_{i,k-1}/a_{i,k-1}$, т. е. $e_{ik} < d_{i,k-1}/a_{i,k-1}$, вычислим разницу между значениями целевой функции при рассматриваемых векторах:

$$z(X^0, Y^0, T^0) - z(X^0, Y^0 - \Delta Y^0, T + \Delta T^0) = (d_{r,s-1} - e_{rs} a_{r,s-1}) \Delta y_{rs}^0 > 0.$$

Результат противоречит предположению об оптимальности (X^0, Y^0, T^0). Следовательно, и при $y_{ik}{}^0 > 0$ имеет место (18). Теорема доказана.

Из предыдущего вытекает, что непрерывная задача БФ эквивалентна задаче ВФ: минимизировать функцию

$$z(X, Y) = \sum_{i \in I_c} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I_c} \sum_{k=1}^{v_i} h_{ik} y_{ik} + \sum_{i \in I_1} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + e_{ik_i}) x_{ij} +$$

$$+ \sum_{i \in I_1} (d_{i,k_i-1} - e_{ik_i} a_{i,k_i-1}) \tag{20}$$

при условиях (10), (11), (14)—(16) и

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{k=1}^{v_i} a_{ik} y_{ik} \quad (i \in I_c). \tag{21}$$

Задачи БФ и ВФ эквивалентны в том смысле, что оптимальные значения их целевых функций совпадают и компоненты X, Y оптимальных решений имеют одинаковые значения.

Теорема 2. *Оптимальным решением задачи ВФ является вектор* (X^0, Y^0), *когда* $y^0_{iv_i} = (\sum_{j=1}^{n} x^0_{ij})/a_{iv_i}$, $y^0_{ik} = 0$ $(k \neq v_i)$ *при* $i \in I_c$ *и* $y^0_{ik_i} = 1$, $y^0_{ik} = 0$ $(k \neq k_i)$ *при* $i \in I_1$, *а* X^0 *есть оптимальное решение задачи* ТФ: *минимизировать функцию*

$$z(X) \equiv \sum_{i \in I_c} \sum_{j=1}^{n} \left(c_{ij} + \frac{h_{iv_i}}{a_{iv_i}} \right) x_{ij} + \sum_{i \in I_1} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + e_{ik_i}) x_{ij} + \\ + \sum_{i \in I_1} (d_{i,k_i-1} - e_{ik_i} a_{i,k_i-1}) \tag{22}$$

при условиях (10), (11) *и*

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_{iv_i} \quad (i \in I_c), \tag{23}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}). \tag{24}$$

Доказательство. Вначале покажем, что при $i \in I_c$ в оптимальном решении (X^0, Y^0) задачи ВФ $y^0_{iv_i} > 0$ и $y^0_{ik} = 0$ $(k \neq v_i)$. Предположим, что $\exists u$ $(u \in I_c)$, при котором $y^0_{uk_1} > 0$, $y^0_{uk_2} > 0, \ldots, y^0_{uk_p} > 0$, причем либо $p = 1$ и $k_p < v_u$, либо $p > 1$ и $k_p \leqslant v_u$, а остальные $y_{uk}{}^0 = 0$. Оптимальное решение (X^0, Y^0) удовлетворяет условиям (21), (15) и (16), т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} x^0_{uj} = \sum_{r=1}^{p} a_{uk_r} y^0_{uk_r} \leqslant a_{uv_u} \quad \text{и} \quad \sum_{r=1}^{p} y^0_{uk_r} \leqslant 1.$$

Рассмотрим вектор (X^0, Y'), когда $y'_{uv_u} = \sum_{r=1}^{p} (a_{uk_r}/a_{uv_u}) y^0_{uk_r}$, $y'_{uk} = 0$ $(k \neq v_u)$, $y'_{ik} = y^0_{ik}$ $(i \neq u)$. Он является допустимым, так как $\sum_{k=1}^{v_u} a_{uk} y'_{uk} = a_{uv_u} y'_{uv_u} = \sum_{r=1}^{p} a_{uk_r} y^0_{uk_r} = \sum_{j=1}^{n} x^0_{uj}$ и $y'_{uv_u} < \sum_{r=1}^{p} y^0_{uk_r} \leqslant 1$. Разница между u-ми членами целевой функции при (X^0, Y^0) и (X^0, Y') имеет вид

$$\sum_{r=1}^{p} h_{uk_r} y^0_{uk_r} - h_{uv_u} y'_{uv_u} = \sum_{r=1}^{p} \left(h_{uk_r} - \frac{a_{uk_r}}{a_{uv_u}} \right) y^0_{uk_r} = \\ = \sum_{r=1}^{p} a_{uk_r} \left(\frac{h_{uk_r}}{a_{uk_r}} - \frac{h_{uv_u}}{a_{uv_u}} \right) y^0_{uk_r}$$

и является положительной в силу предположения (8). Но это противоречит предположению об оптимальности (X^0, Y^0); следовательно, в

(X^0, Y^0) положительна лишь $y^0_{iv_i}$ $(i \in I_c)$. Из (21) следует, что $y^0_{iv_i} = (\sum_{j=1}^{n} x^0_{ij})/a_{iv_i}$.

Проверим на оптимальность допустимое решение (X^1, Y^1), когда $X^1 \neq X^0$, $y^1_{iv_i} = (\sum_{j=1}^{n} x^1_{ij})/a_{iv_i}$, $y^1_{ik} = 0$ $(k \neq v_i)$ при $i \in I_c$. Получим

$$z(X^1, Y^1) = \sum_{i \in I_c} \sum_{j=1}^{n} \left(c_{ij} + \frac{h_{iv_i}}{a_{iv_i}}\right) x^1_{ij} + \sum_{i \in I_1} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + e_{ik_i}) x^1_{ij} + $$
$$+ \sum_{i \in I_1} (d_{i,k_i-1} - e_{ik_i} a_{i,k_i-1}) \geqslant z(X^0) = z(X^0, Y^0).$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Минимальное значение целевой функции задачи* ТФ *является нижней границей минимального значения целевой функции задачи* АФ.

Доказательство. Оптимальное решение задачи АФ является допустимым (но не обязательно оптимальным) для непрерывной задачи БФ, где от величин y_{ik} $(i \in I_c)$ целочисленности не требуется. Оптимальные значения целевых функций задач БФ, ВФ и ТФ совпадают. Теорема доказана.

Соответствующий оптимальному решению (X^0, Y^0) задачи ВФ вектор (X^0, Y'', T''), при котором $y''_{ip_i} = 1$, $t''_{ip_i} = \sum_{j=1}^{n} x^0_{ij} - a_{i,p_i-1}$, $y''_{ik} = t''_{ik} = 0$ $(k \neq p_i$, а $p_i = v_i$ при $i \in I_c$, $p_i = k_i$ при $i \in I_1)$, может не быть допустимым решением задачи АФ, так как $t_{iv_i}'' < 0$ в случае $v_i \neq r_i = \min\{k | \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_{ik}\}$. Из допустимого решения (X^0, Y^1) задачи ВФ, когда $y^1_{ir_i} = (\sum_{j=1}^{n} x^0_{ij})/a_{ir_i}$, $y^1_{ik} = 0$ $(k \neq r_i)$ при $i \in I_c$, получим для задачи АФ допустимое решение (X^0, Y', T'), при котором $y'_{iq_i} = 1$, $t'_{iq_i} = \sum_{j=1}^{n} x^0_{ij} - a_{i,q_i-1}$, $y'_{ik} = t'_{ik} = 0$ $(k \neq q_i)$ и $q_i = r_i$ при $i \in I_c$, а $q_i = k_i$ при $i \in I_1$.

3. Метод ветвей и границ для решения задачи А

Реализуем идею метода ветвей и границ (см., напр., [4], с. 267—274; [5], с. 213—218; [6], с. 161—167) для решения задачи А. Предлагаемый метод опирается на доказанные в разделе 2 теоремы и заключается в решении ряда подзадач типа ТФ — транспортных задач с дополнительными ограничениями на значения $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$. В соответствующей транспортной таблице подзадачи имеется не более $n \times m$ клеток. Задачу ТФ можно решить, например, модификацией метода потенциалов или метода разрешающих слагаемых.

Сначала решим задачу ТФ, где $I_1 = \varnothing$ и $v_i = m_i$ $(i = \overline{1, m})$. Соответствующий оптимальному плану X^0 задачи ТФ вектор (X^0, Y', T'), при котором $y'_{ir_i} = 1$, $t'_{ir_i} = \sum_{j=1}^{n} x^0_{ij} - a_{i,r_i-1}$, $y'_{ik} = t'_{ik} = 0$ $(k \neq r_i$, $r_i =$

$=\min\{k\mid\sum_{j=1}^{n}x^0_{ij}\leqslant a_{ik}\})$, является рекордным решением задачи А, а $z(X^0, Y', T')$ — рекордом. Если в оптимальном плане (X^0, Y^0) задачи ВФ (см. теорему 2) Y^0 целочислен, то соответствующий ему вектор (X^0, Y', T') будет оптимальным решением задачи А. Если же в оптимальном плане (X^0, Y^0) задачи ВФ существует $y^0_{uv_u}\neq 1$, то проведем ветвление, добавляя к ограничениям задачи ВФ требования $y_{uv_u}=1$ и $y_{uv_u}=0$.

Какой индекс i предпочесть при ветвлении, можно решить, руководствуясь, например, одним из следующих правил:

П1. Выбрать i: $y_{iv_i}=(\sum_{j=1}^{n}x^0_{ij})/a_{iv_i}\neq 1$ $(i\in I_c)$, при котором значение $F_i=h_{iv_i}+d_{i,v_i-1}$ наименьшее.

П2. Выбрать i: $y_{iv_i}\neq 1$ $(i\in I_c)$, при котором значение $M_i=$ $=\frac{1}{v_i}\sum_{k=1}^{v_i}h_{ik}$ наименьшее (аналогично [7], с. 41).

Уменьшить число перебираемых вершин, а следовательно, и исключить из рассмотрения подзадачи, не имеющие допустимых решений или у которых значение целевой функции не меньше рекорда f^* (рекордом f^* назовем значение целевой функции задачи А при наилучшем, уже найденном допустимом решении), помогут приводимые ниже тесты.

Т1 (тест неразрешимости): выполняется ли одно из условий

$$\sum_{j=1}^{n}b_j>\sum_{i\in I_1}a_{ik_i}+\sum_{i\in I_c}a_{iv_i}\quad\text{или}\quad\sum_{j=1}^{n}b_j<\sum_{i\in I_1}a_{i,k_i-1}?$$

Т2 (сравнение оценки целевой функции с рекордом): выполняется ли условие $z_-\geqslant f^*$, когда

$$z_-=\sum_{s=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}g_{i_s(j),j}r_{i_s(j),j}+\sum_{i_s(j)\in I_1}(d_{i_s(j),k_{i_s(j)}-1}-e_{i_s(j),k_{i_s(j)}}a_{i_s(j),k_{i_s(j)}-1}),\qquad(25)$$

$$g_{i_s(j),j}=\min\left\{\min_{\substack{i\in I_1\\ i\neq i_1(j),\ldots,i_{s-1}(j)}}(c_{ij}+e_{ik_i}),\ \min_{\substack{i\in I_c\\ i\neq i_1(j),\ldots,i_{s-1}(j)}}\left(c_{ij}+\frac{h_{iv_i}}{a_{iv_i}}\right)\right\},$$

$$r_{i_0(j),j}=0,\ r_{i_s(j),j}=\min\{b_j-\sum_{u=1}^{s-1}r_{i_u(j),j},\ a_{i_s(j),q}\}\quad(j=\overline{1,n},\ s=\overline{1,p}),$$

$$p=\min\{u\mid u\geqslant 1,\ r_{i_u(j),j}=0,\ j=\overline{1,n}\},\ q=\begin{cases}k_{i_s(j)} & \text{при } i_s(j)\in I_1,\\ v_{i_s(j)} & \text{при } i_s(j)\in I_c.\end{cases}$$

Т3 (сравнение значения целевой функции с рекордом): выполняется ли условие $z(X^0)\geqslant f^*$?

Тест Т4 проверяет, является ли вектор (X^0, Y', T'), соответствующий оптимальному решению X^0 подзадачи ТФ, рекордным решением исходной задачи А.

Т4: выполняется ли условие $z(X^0, Y', T')<f^*$?

Тест Т5 проверяет, является ли соответствующий оптимальному решению X^0 вектор Y целочисленным.

Т5: выполняется ли условие $y_{iv_i}=(\sum_{j=1}^{n}x^0_{ij})/a_{iv_i}=1$ $\forall i\in I_c$?

Изложим теперь алгоритм нахождения глобального оптимума задачи А. На каждой итерации известен рекорд f^* и известен список задач-кандидатов C, где в процессе решения сохраняются подзадачи с нижними оценками $z_- < f^*$. Учитываем, что рассматриваемая задача-кандидат получается из задачи ТФ $= \{(22), (10), (11), (23), (24)\}$ конкретизацией множеств I_1, I_c и индексов $k_i (i \in I_1)$ и $v_i (i \in I_c)$, т. е. заменой их множествами $I_1{}^l$, $I_c{}^l$ и индексами $k_i{}^l$, $v_i{}^l$, где l — номер кандидата.

Шаг 0. Присваиваем $f^* := \infty$, $C = \varnothing$, $I_1{}^1 = \varnothing$, $I_c{}^1 = \{1, \dots, m\}$, $v_i{}^1 = m_i$, $z_-{}^1 = -\infty$. Проверяем задачу ТФ тестом Т1, при его выполнении переходим к шагу 1; в противном случае присваиваем задаче ТФ номер 1 и включаем ее в список C.

Шаг 1. Проверяем, пуст ли список C? Если $C = \varnothing$, то заканчиваем вычисления. В случае $f^* = \infty$ задача А не имеет допустимых решений; в противном случае рекордное решение (X^0, Y', T') является точкой глобального минимума исходной задачи А. Если $C \neq \varnothing$, то выбираем, исключая из списка C в качестве очередного кандидата задачу с наименьшей оценкой z_-.

Шаг 2. Решаем выбранную задачу. Проверяем оптимальный план тестом Т3, при его выполнении переходим к шагу 1.

Шаг 3. Проверяем оптимальный план тестом Т4, при его выполнении пересчитываем рекорд $f^* := z(X^0, Y', T')$ и переходим к шагу 4, иначе — к шагу 5.

Шаг 4. Проверяем задачи из списка C тестом Т2. Те из задач, при которых тест выполняется, исключаем из списка C.

Шаг 5. Проверяем оптимальный план X^0 тестом Т5, при его выполнении переходим к шагу 1, иначе — к шагу 6.

Шаг 6. Пусть номер рассматриваемого кандидата будет l. Проведем ветвление задачи l по индексу u, выбранному по правилу П1, на две подзадачи с соответствующими множествами $I_1^{r+1} = I_1^l \cup \{u\}$, $I_c^{r+1} = I_c^l \setminus \{u\}$; $k_u^{r+1} = v_u^l$ и $I_1^{r+2} = I_1^l$, $I_c^{r+2} = I_c^l$; $v_u^{r+2} = v_u^l - 1$, где r — наибольший номер уже генерированных подзадач. Вычисляем оценки $z_-{}^{r+1}$ и $z_-{}^{r+2}$ по формуле (25). Проверяем задачи с номерами $r+1$ и $r+2$ тестами Т1 и Т2. Задачи, при которых тесты не выполняются, включаем в список C. Переходим к шагу 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лэсдон Л. С., Оптимизация больших систем, М., «Наука», 1975.
2. Алейников Б. И., Экономика и матем. методы, 2, № 2, 272—282 (1966).
3. Алейников Б. И., Мовшович С. Г., В кн.: Исследования по математическому программированию, М., «Наука», 1968, с. 198—221.
4. Вагнер Г., Основы исследования операции, т. 2, М., «Мир», 1973.
5. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю., Дискретное программирование, М., «Наука», 1969.
6. Сергиенко И. В., Лебедева Т. Т., Рощин В. А., Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации, Киев, «Наукова думка», 1980.
7. Gauthier, J.-M., Ribiere, G., Math. Progr., 12, № 1, 26—47 (1977).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 20/I 1982

Mae URI

PALJUEKSTREMAALSE PAIGUTUSÜLESANDE LAHENDAMINE HARUDE JA TÕKETE MEETODIL

On vaadeldud tükiti-lineaarse sihifunktsiooniga paigutusülesannet (1)—(7), mille lahendamiseks on välja töötatud harude ja tõkete meetodi tüüpi algoritm. Lahenduse käigus on vaatluse all alamülesanded, milles osa y_{ik} on fikseeritud, s. o. võetud võrdseks nulli või ühega. Algoritm põhineb nimetatud alamülesandele vastava pideva planeerimisülesande (9)—(16) optimaalsete lahendite teatud omadustel.

Mae URI

SOLVING THE MULTIEXTREMAL LOCATION PROBLEM WITH THE BRANCH-AND-BOUND METHOD

In this paper the location problem (1)—(7) with piecewise linear objective function (1) and constraints (2)—(7) is discussed. An algorithm basing on the idea of branch-and-bound method for solving this problem is presented. During the solving process subproblems are under discussion, in which part of variables y_{ik} are fixed to zero or one. The algorithm is based on the qualities of the optimal solution of continuous problem (9)—(16) corresponding to the subproblem (9)—(17). Since in the optimal solution (X^0, Y^0, T^0) of the problem (9)—(16) between the components of T^0 and X^0 equality (18) is valid, then the problem (9)—(16) is equivalent to the problem {(20), (10), (11), (14)—(16), (21)}. The solution of the last problem is cancelled to solving a transportation problem with an additional condition on $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$. The choice of a branching variable is made by rules П1 and П2. In order to reduce the quantity of subproblems, some tests are used: the test of unsolvability (T1), the test of comparison of the estimation of objective function with the record (T2) and the test of comparison of the minimum value of objective function with the record (T3). Correction of the record is made by the test T4 and the branch is terminated by the test T5.