

А. РАВАСОО

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СРЕДЕ С НЕОДНОРОДНОЙ НАЧАЛЬНОЙ СТАТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИЕЙ

(Представил Н. Алумяэ)

Влияние однородной начальной статической деформации на скорости распространения волн в твердой среде исследовалось во многих работах (см., напр. [1-5]). Выведены зависимости изменения скоростей волн от деформации — акустоупругие коэффициенты, величина которых зависит от типа волн и от направления их распространения. В случае неоднородных начальных деформаций вывод этих зависимостей значительно осложняется, поскольку определение скорости волн связано с решением дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Этим объясняется недостаточная изученность проблемы акустодиагностики таких сред. Ниже рассматривается распространение продольной волны в твердой среде, подвергнутой неоднородной плоской деформации, и обсуждаются вопросы акустодиагностики этой среды. Выводится решение типа интеграла свертки, которое позволяет описать профиль продольной волны, возбужденной краевым воздействием произвольной формы в твердой среде, находящейся в состоянии плоской деформации. Более подробно исследуется случай распространения синусоидальной волны в среде, подвергнутой чистому изгибу со сжатием или растяжением в направлении, перпендикулярном оси распространения волны. Задача акустодиагностики начального состояния среды решается путем регистрации амплитуды волны и времени ее прибытия в точку наблюдения.

1. Исследуемая среда описывается формулами нелинейной теории упруго деформируемых твердых сред [6]. Используется лагранжева система декартовых координат  $X_1, X_2, X_3$ .

Предполагая, что производные от перемещения материальных точек среды

$$|U_{i,j}| \ll 1, \quad (1.1)$$

разложим функцию внутренней энергии  $W$  в ряд относительно естественного состояния [6]

$$\varrho_0 W = \frac{1}{2} \lambda K_1^2 + \mu K_2 + \nu_1 K_1^3 + \nu_2 K_1 K_2 + \nu_3 K_3 + O(E_{ij}^4),$$

где  $\varrho_0$  — плотность среды в естественном недеформированном состоянии,  $E_{ij}$  — тензор деформации Лагранжа,  $K_j$  — инварианты тензора деформации  $E_{ij}$ ,  $\lambda, \mu$  — модули упругости второго порядка,  $\nu_i$  — модули упругости третьего порядка,  $i, j = 1, 2, 3$ . Далее  $t$  — время и используется обозначение производных

$$U_{i,j} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j}, \quad U_{i,t} = \frac{\partial U_i}{\partial t}.$$

Уравнение движения среды имеет вид



$$\sigma_{ij,j} = \rho_0 U_{i,tt}. \quad (1.2)$$

Используя выражение для тензора псевдонапряжения Лагранжа  $\sigma_{ij}$  [6], представим уравнение движения среды в перемещениях

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu + 6v_1 U_{m,m} + v_2 U_{n,n}) U_{m,mi} + [\mu + (\lambda + v_2) U_{n,n}] U_{i,mm} + \\ & + (\lambda + \mu + v_2 + 3v_3/4) (U_{n,m} U_{n,mi} + U_{i,m} U_{n,mn}) + \\ & + (v_2 + 3v_3/4) (U_{m,n} U_{n,mi} + U_{n,i} U_{m,mn}) + (\mu + 3v_3/4) [(U_{n,m} + U_{m,n}) U_{i,mn} + \\ & + (U_{m,i} + U_{i,m}) U_{m,nn}] + O(U_{m,n}^3) = \rho_0 U_{i,tt}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Далее рассмотрим плоское деформированное состояние среды, когда

$$X_1 = X_1(x_1, x_2, t), \quad X_2 = X_2(x_1, x_2, t), \quad X_3 = x_3. \quad (1.4)$$

Здесь  $x_i$  — эйлеровы переменные в эйлеровой декартовой системе координат, которая совпадает в момент времени  $t=0$  с описанной выше лагранжевой.

Аналогично [1, 2, 5] будем различать три состояния среды: естественное недеформированное, начальное деформированное и состояние среды в данный момент времени, допуская, что последнее получается из начального под воздействием дополнительного возмущения. Величины, относящиеся к начальному состоянию, будем отмечать верхним индексом «нуль», величины, характеризующие состояние среды в данный момент времени, — звездочкой сверху и величины, относящиеся к возмущению, оставим без индексов. Тогда имеет место соотношение  $U_i^* = U_i^0 + U_i$ .

Учитывая, что в плоском деформированном состоянии  $U_3 = 0$  и что начальное деформированное состояние среды является статическим, уравнения движения можем упростить. Для их аналитического решения сделаем следующие допущения:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_1(X_1, X_2, t), \quad |U_{1,2}| \ll |U_{1,1}|, \quad |U_{1,12}| \ll |U_{1,11}|, \\ |U_2| &\ll |U_1|, \quad |U_{2,i}| \ll |U_{1,i}|. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Это означает, что ниже исследуется процесс распространения продольной волны вдоль оси  $X_1$ .

Учитывая только члены с порядком величин  $U_{1,1}$  и  $U_{1,11}$ , придадим уравнениям движения (1.3) вид

$$\begin{aligned} & (1 + k_1 U_{1,1}^0 + k_2 U_{2,2}^0) U_{1,11} + k_1 U_{1,1} U_{1,11} + \\ & + [k_1 U_{1,11}^0 + k_3 U_{1,22}^0 + (k_2 + k_4) U_{2,21}^0] U_{1,1} = c^{-2} U_{1,tt}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} & (k_3 U_{2,1}^0 + k_4 U_{1,2}^0) U_{1,11} + (k_3 U_{2,1} + k_4 U_{1,2}) U_{1,11} + \\ & + [k_2 U_{2,22}^0 + k_3 U_{2,11}^0 + (k_4 + k_5) U_{1,12}^0] U_{1,1} = c^{-2} U_{2,tt}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= 3 + 6k(v_1 + v_2 + v_3), \quad k_2 = k(\lambda + 2v_2), \\ k_3 &= 1 + k(v_2 + 3v_3/2), \quad k_4 = k(\mu + v_2 + 3v_3/2), \\ k_5 &= k(\lambda + 6v_1 + 2v_2), \quad c^{-2} = \rho_0 k, \quad k = (\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned}$$

Уравнение (1.6) описывает распространение продольной волны в направлении оси  $X_1$  в среде с начальной деформацией, а уравнение (1.7) позволяет оценить расширение зоны возмущения в направлении оси  $X_2$ .



2. Уравнения (1.6) и (1.7) выведены с учетом неравенств

$$|U_{i,i}^0| \ll 1, \quad |U_{i,i}| \ll 1.$$

В случае  $U_{1,1} < U_{1,1}^0$  уравнение (1.6) можно линеаризировать, полагая, что из двух членов  $k_1 U_{1,1}^0 U_{1,1}$  и  $K_1 U_{1,1} U_{1,1}$  последний является величиной высшего порядка малости по сравнению с единицей. Волновой процесс в среде описывается теперь уравнением

$$f_1(X_1, X_2) U_{1,1} + f_2(X_1, X_2) U_{1,1} - c^{-2} U_{1,1t} = 0, \quad (2.1)$$

где

$$f_1(X_1, X_2) = 1 + k_1 U_{1,1}^0 + k_2 U_{2,2}^0,$$

$$f_2(X_1, X_2) = k_1 U_{1,1}^0 + (k_2 + k_4) U_{2,12}^0 + k_3 U_{1,22}^0.$$

Уравнение (2.1) решается при нулевых начальных условиях

$$U_1(X_1, 0) = 0, \quad U_{1,t}(X_1, 0) = 0 \quad (2.2)$$

и при краевых условиях

$$U_{1,t}(0, t) = -\varepsilon c \varphi(t) H(t), \quad (2.3)$$

$$U_1(\infty, t) = 0. \quad (2.4)$$

Здесь  $H(t)$  — функция Хевисайда,  $\varphi(t)$  — произвольная функция и  $\varepsilon$  — постоянная.  $\varphi(t)$  и  $\varepsilon$  удовлетворяют условиям

$$\max |\varphi(t)| = 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Поскольку исследуется распространение волн в среде, начальное деформированное состояние которой статическое, то коэффициенты  $f_1$  и  $f_2$  уравнения (2.1) не зависят от времени. Применяя преобразование Лапласа по времени и учитывая (2.2), получим уравнение

$$f_1 U_{1,1}^L + f_2 U_{1,1}^L - p^2 c^{-2} U_1^L = 0. \quad (2.5)$$

Последнее решается при краевых условиях (2.3) и (2.4) ВКБ-методом. Подстановкой

$$U^L = C \exp \left\{ \int [pu - f_2(2f_1)^{-1}] dX_1 \right\}$$

уравнение (2.5) сводится к уравнению Риккати

$$pu_1 + p^2 u^2 - p^2 f - g = 0, \quad (2.6)$$

где

$$f = c^{-2} f_1^{-1}, \quad g = f_3^2 + f_{3,1},$$

$$f_3 = \frac{1}{2} f_1^{-1} f_2, \quad f_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j}.$$

Решение уравнения Риккати ищется в виде ряда

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k p^{-k}, \quad (2.7)$$

подставляя который в уравнение (2.6) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $p$ , получим

$$u_0 = \pm \sqrt{f},$$



$$u_1 = -f_{,1} (4f)^{-1},$$

$$u_2 = \pm (2\sqrt{f})^{-1} [g + f_{,11} (4f)^{-1} - 5f_{,1}^2 (16f^2)^{-1}].$$

Сохраняя в ряде (2.7) первые три члена, получим решение преобразованного уравнения (2.5) в виде

$$U_1^L = -\varepsilon c \varphi^L p^{-1} \exp \Phi_1 \exp [-p\Phi_2 - p^{-1}\Phi_3]$$

и решение соответствующего ему исходного уравнения (2.1) в виде

$$U_1 = -\varepsilon c H(\zeta) \exp \Phi_1 \int_0^\zeta \varphi(\zeta - \xi) J_0(2\sqrt{\xi\Phi_3}) d\xi, \quad (2.8)$$

где

$$\zeta = t - \Phi_2,$$

$$\Phi_1 = -\frac{1}{4} \int_0^{x_1} f_1^{-1} (2f_2 - f_{,11}) dX,$$

$$\Phi_2 = \int_0^{x_1} \sqrt{f} dX,$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2} \int_0^{x_1} f^{-1/2} \left( g + \frac{1}{4} f_{,11} f^{-1} - \frac{5}{16} f_{,1}^2 f^2 \right) dX.$$

Выражение (2.8) позволяет определить эволюцию краевого возмущения произвольной формы в среде с начальной статической деформацией. При выводе (2.8) использован ряд (2.7), который сходится при больших значениях параметра  $p$ , что означает справедливость (2.8) при

$$\zeta \ll 1, \quad (2.9)$$

т. е. в некоторой прифронтовой зоне.

Поскольку  $\zeta = t - \Phi_2$ , для определения состояния начальной деформации среды на основе полученного результата (2.8) в нашем распоряжении есть три функции  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , из которых  $\Phi_1$  характеризует уменьшение амплитуды краевого возмущения,  $\Phi_2$  — время прибытия фронта продольной волны в точку наблюдения, а  $\Phi_3$  — искажение формы волны. Следовательно, из одного эксперимента можно определить значения трех параметров состояния начальной деформации среды. При этом скорость распространения волны определяется зависимостью

$$c^* = X_1 \Phi_2^{-1}. \quad (2.10)$$

Рассмотрим конкретный пример, когда форма возмущения задана в виде

$$\varphi(t) = \sin \omega t, \quad (2.11)$$

где  $\omega$  — угловая частота возмущения.

Подставляя выражение (2.11) в уравнение (2.8) и используя стандартное разложение

$$J_0(2\sqrt{\Phi_3\xi}) = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h (h!)^{-2} (\Phi_3\xi)^h, \quad (2.12)$$

вычислим интеграл свертки в виде ряда. Окончательный результат примет вид



$$U_{1,t} = -\varepsilon c H(\zeta) \exp \Phi_1 \left\{ \sin \omega \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Phi_3^k \omega^{-k} (k!)^{-1} [\sin(\omega \zeta - k\pi/2) + \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^k (\zeta \omega)^{k-m-1} ((k-m-1)!)^{-1} \cos(m\pi/2) \right\}, \quad (2.13)$$

$$U_1 = \varepsilon c \omega^{-1} H(\zeta) \exp \Phi_1 \left\{ \cos \omega \zeta - 1 + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Phi_3^k (k!)^{-1} \omega^{-k} [\cos(\omega \zeta - k\pi/2) - \right. \\ \left. - \sum_{m=0}^k (\zeta \omega)^{k-m} ((k-m)!)^{-1} \cos(m\pi/2) \right\}. \quad (2.14)$$

Легко доказать, что единственное ограничение на решения (2.13) и (2.14) накладывает неравенство (2.9), поскольку в практических приложениях условие

$$|\Phi_3 \omega^{-1}| \ll 1$$

выполняется.

3. Рассмотрим конкретный случай состояния неоднородной начальной деформации среды, представляющий практический интерес. По сведениям автора, эта задача стандартными методами акустоупругости еще не решалась [1, 5].

Пусть начальное деформированное состояние среды описывается выражениями

$$U_1^0 = -\alpha X_1 (a + bX_1/2) - \beta bX_2^2/2, \\ U_2^0 = \beta X_2 (a + bX_1), \quad (3.1)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — размерные коэффициенты и

$$\alpha = \lambda [4\mu (\lambda + \mu)]^{-1}, \quad \beta = (\lambda + 2\mu) [4\mu (\lambda + \mu)]^{-1}.$$

Выражения (3.1) удовлетворяют статическим уравнениям равновесия (уравнению (1.3) при  $U_{i,tt} = 0$ ). В этом случае компоненты тензора псевдонапряжения Лагранжа с точностью до линейных членов имеют вид

$$\sigma_{22}^0 = a + bX_1, \quad \sigma_{11}^0 = \sigma_{12}^0 = \sigma_{21}^0 = 0, \quad (3.2)$$

что соответствует случаю, когда среда подвергнута изгибу с растяжением или сжатием по оси  $X_2$  (см. рисунок).

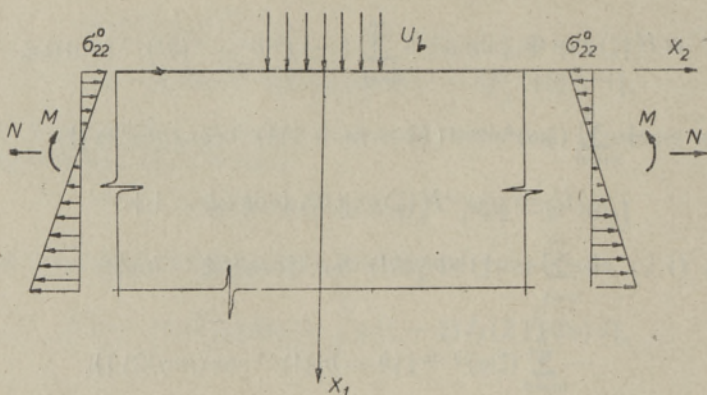
Функции  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  определяются с учетом выражения (3.1) следующим образом:

$$\Phi_1 = bX_1 (l_1 + 2l_2) [1 + l_1 \theta (a + bX_1/2)]/4, \\ \Phi_2 = c^{-1} X_1 [1 + l_1 (a + bX_1/2)/2], \\ \Phi_3 = -cb^2 \eta X_1 [1 - \theta (a + bX_1/2)], \quad (3.3)$$

где

$$\eta = (9l_1^2 - 4l_2^2)/32, \quad \theta = (3l_1 + 2l_2) (l_1 + 2l_2)^{-1}, \\ \theta = l_1 (45l_1^2 + 32l_1 l_2 + 12l_2^2) (9l_1^2 - 4l_2^2)^{-1}/2, \\ l_1 = [2\mu (\lambda + \mu)]^{-1} [\lambda + \nu_2 + 3\lambda (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) (\lambda + 2\mu)^{-1}], \\ l_2 = (4\mu)^{-1}.$$





Подстановкой выражений (3.3) в (2.13) или (2.14) найдем зависимости, позволяющие определить искажение исходной формы волны в любой точке среды.

В случае, когда

$$|\Phi_3 \omega^{-1}| \ll 1,$$

выражения (2.13) и (2.14) можно использовать в виде

$$U_{1,t} = -\varepsilon c H(\zeta) \exp \Phi_1 \sin \omega \zeta, \quad (3.4)$$

$$U_1 = \varepsilon c \omega^{-1} H(\zeta) \exp \Phi_1 (\cos \omega \zeta - 1). \quad (3.5)$$

Теперь по данным эксперимента подлежат определению две функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ ; состояние начальной деформации среды определялось тоже двумя независимыми параметрами  $a$  и  $b$  (см. (3.1)). Если через  $X_1^+$  обозначить координату  $X_1$  точки наблюдения за искажением формы продольной волны и из эксперимента найти величины  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , то решение поставленной задачи дадут формулы

$$a = 2(l_1 X_1^+)^{-1} (c \Phi_2 - X_1^+) - b X_1^+ / 2, \quad (3.6)$$

$$b = 4 \Phi_1 [(l_1 + 2l_2) (2c \Phi_2 - X_1^+)]^{-1}, \quad (3.7)$$

т. е. измерения определяют искомые параметры  $a$  и  $b$ .

Легко определить также скорость распространения волны в рассматриваемой среде

$$c^* = c [1 + l_1 (a + b X_1 / 2) / 2]^{-1}, \quad (3.8)$$

где  $c$  — скорость распространения волны в недеформированной среде.

В хорошо изученном случае однородной начальной статической деформации, когда  $b = 0$ , т. е. когда среда испытывает в направлении  $X_2$  только растяжение или сжатие без изгиба, скорость распространения фронта волны определяется выражением

$$c^* = c (1 + l_1 a / 2)^{-1},$$

и амплитуда волны не изменяется. Акустопругий коэффициент  $\beta_\sigma$  [5], связывающий изменение скорости фронта волны с начальным напряжением, определяется из зависимости

$$\pm (c - c^*) c^{-1} = \beta_\sigma \sigma_{22}^0$$

и равняется

$$\beta_\sigma = l_1 / 2.$$



Во втором предельном случае, когда

$$a = -bX_1^{+}/2,$$

т. е. когда среда испытывает чистый изгиб (напряжения  $\sigma_{22}$  в точках  $X_1 = 0$  и  $X_1 = X_1^{+}$  равны по модулю, но противоположны по знаку) скорость волны в точке наблюдения с координатой  $X_1^{+}$  равна, согласно уравнению (3.8),

$$c^* = c.$$

В этом случае единственный искомый параметр  $b$  начальной деформации среды определяется по амплитуде волны формулой

$$b = 4\Phi_1[X_1^{+}(L_1 + 2L_2)]^{-1}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуша О. И., Введение в акустоупругость, Киев. «Наукowa думка», 1977.
2. Гузь А. Н., Прикладная механика, 14, № 4, 3—32 (1978).
3. Berg R. K., Appl. Mat., 18, № 1, 9—17 (1973).
4. Dev. S., Adv., S. K., Int. J. Nonlinear Mech., 12, № 3, 371—381 (1977).
5. Бобренко В. М., Вангелл М. С., Куценко А. Н., Акустические методы контроля напряженного состояния материала деталей машин, Кишинев, «Штиинца», 1981.
6. Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К., В кн.: Эхо-сигналы от упругих объектов, т. 2, Таллин, «Валгус», 1974, с. 233—253.

Институт кибернетики,  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
19/1 1982

A. RAVASOO

#### LAINETE LEVIMINE MITTEHOMOGEENSE STAATILISE ALGDEFORMATSIOONIGA KESKKONNAS

Artiklis on käsitletud lainete levimist tahkes keskkonnas, mis on algselt tasapinnalise mittehomogeense deformatsiooni olukorras, ja vaadeldud algdeformatsiooni määramise võimalust lainete levimist iseloomustavate parameetrite järgi. On leitud konvolutsiooni-integraali sisaldav lahend, mis võimaldab kirjeldada suvalise kujuga ääretingimuse tekitatud nikilaine kuju evolutsiooni. Põhialikumalt on uuritud siinusekuiulise ääretingimuse juhtu, mille puhul konvolutsiooniintegraal avaldub ridadena. On lahendatud akustodiagnostika ülesanne, määrates siinustlainet abil keskkonna eeldeformatsiooni-olukorra, mis lineaarses lähenduses vastab keskkonna puhaspainedele koos tõmbe või survega.

A. RAVASOO

#### PROPAGATION OF WAVES IN A MEDIUM WITH AN INHOMOGENEOUS STATICAL INITIAL DEFORMATION

Propagation of deformation waves in a solid medium with an inhomogeneous statical plane initial deformation is investigated. The main aim of this investigation is to determine the state of the initial deformation using the acoustical methods. The solution of the equation of motion is found in the form of a convolution integral that describes the distortion of the one-dimensional transient longitudinal wave profile. The boundary condition is supposed to be arbitrary under certain smoothness conditions. The convolution integral is presented in the form of an asymptotic expansion for the case of sinusoidal boundary condition. This analytical result is used for the determining of the initially deformed state of the medium on the basis of the experimental data i.e. an inverse problem of acousto-diagnostics is solved. The case of a plane initial deformation that corresponds to the pure bending with an axial compression or tension is analysed in detail.