EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 31. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1982, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 31
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1982, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1982.3.03

УДК 518.12

Л. САРВ

ОДНО СЕМЕЙСТВО НЕЛИНЕЙНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

(Представил А. Хумал)

Для решения операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве изучается одно семейство нелинейных итерационных методов типа наискорейшего спуска. Даются оценки погрешности в случае априорного задания числа итераций и при останове по невязке.

1. Пусть $A\in\mathfrak{L}(U,F)$ — линейный ограниченный оператор из гильбертова пространства U в гильбертово пространство F. Рассмотрим уравнение

$$Au=f. \tag{1}$$

Область значений $\mathfrak{R}(A)\subset F$ оператора A, вообщем, незамкнута, но предполагается, что $f\in\mathfrak{R}(A)$; нулевое пространство $\mathfrak{N}(A)$, вообщем, нетривиально. Пусть вместо оператора A и элемента f заданы их приближения $A_\eta\in\mathfrak{L}(U,F)$ и $f_\delta\in F$ такие, что $\|A_\eta-A\|\leqslant\eta$ и $\|f-f_\delta\|\leqslant\delta$, $\eta\in(0,\eta_0)$, $\delta\in(0,\delta_0)$.

Для решения подобных задач разработаны различные регуляризующие алгоритмы [1,2], среди которых большой интерес представляют алгоритмы, в основе которых лежат итерационные методы. Линейные итерационные методы подробно изучены (см., в частности, [3–6]). Нелинейные итерационные методы рассматривались в [7–9].

В настоящей работе для решения уравнения (1) воспользуемся итерационным процессом (см. [10])

$$\begin{gathered}u_{n+1}=u_n-\varepsilon_n A_\eta^* r_n,\qquad r_n=A_\eta u_n-f_\delta,\\ \varepsilon_n=(B_\eta^{\alpha+1}r_n,r_n)/(B_\eta^{\alpha+2}r_n,r_n),\qquad B_\eta=A_\eta A_\eta^*.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $A_\eta^*\in\mathfrak{L}(F,U)$ — сопряженный с A_η оператор, а $\alpha\geqslant-1$ — произвольный вещественный фиксированный параметр. Обозначим через u_* ближайшее к u_0 решение уравнения (1). Относительно начального приближения u_0 будем предполагать, что u_0-u_* не является собственным элементом оператора A^*A.

Сформулируем основные результаты, которые справедливы при $\alpha\geqslant0$.

Теорема 1. *Если* $n=n(\delta,\eta)$ *выбрать так, чтобы* $n\to\infty$ *и* $(\delta+\eta)n^{1/2}\to0$ *при* $\delta,\eta\to0$, *то*

$$\|u_n-u_*\|\to0\quad\text{при}\quad\delta,\eta\to0. \tag{3}$$

Если при этом известно, что

$$u_0-u_*=(A^*A)^p v,\quad p>0,\quad v\in U,\quad \|v\|\leqslant r, \tag{4}$$

и выбрать $n=c_{p,r}(\delta+\eta)^{-2/(2p+1)}$, *то можно оценить ошибку*

$$\|u_n - u_*\| \leqslant c'_{p,r}(\delta+\eta)^{2p/(2p+1)}. \tag{5}$$

Сформулируем теперь два правила останова для итераций (2) по невязке [5].

Правило останова (Π_1): *зададим числа* $b_1 > 1$ *и* $b_* > \|u_*\|$; *итерации остановим на таком* $n = n(\delta, \eta)$, *для которого впервые* $\|r_n\| \leqslant b_1\delta + b_*\eta$.

Правило останова (Π_2): *зададим числа* $b_1 > 1$, $b_2 > 1$ *и* $a > 0$; *итерации остановим на таком* $n = n(\delta, \eta)$, *для которого впервые выполнено хотя бы одно из неравенств*

$$\|r_n\| \leqslant b_1\delta + b_2\|u_n\|\eta, \quad n \geqslant a/(b_1\delta + b_2\|u_n\|\eta)^2.$$

Теорема 2. *Для правил останова* (Π_1) *и* (Π_2) *при* $\delta, \eta \to 0$ *справедливо*

$$(\delta+\eta)n^{1/2} \to 0, \quad \|u_n - u_*\| \to 0. \tag{6}$$

Если выполнено (4), то

$$n(\delta, \eta) \leqslant c_{p,r}(\delta+\eta)^{-2/(2p+1)}, \tag{7}$$

$$\|u_n - u_*\| \leqslant c'_{p,r}(\delta+\eta)^{2p/(2p+1)}. \tag{8}$$

В случае точно заданных A и f метод (2) был изучен в [11–13]. Для метода (2) с $\alpha = -1$ в [9] доказано утверждение (3). При этом предполагалось, что $(\delta + \eta)n \to 0$, $n \to \infty$ при $\delta, \eta \to 0$. Для $\alpha = 0$ в [7] доказано, что правило останова (Π_1) является регуляризующим алгоритмом.

2. Прежде чем перейти к доказательству теорем, сформулируем четыре леммы. Обозначим $\psi_n = u_n - u_*$; $D_\eta = A_\eta^* A_\eta$; F_λ, E_λ — спектральные функции операторов D_η и B_η. Они связаны соотношением $QF_\lambda Q^* = E_\lambda$, где $Q \in \mathfrak{L}(U, F)$ — частично изометрический оператор, фигурирующий в полярном представлении оператора $A_\eta = QD_\eta^{1/2}$.

Здесь и в дальнейшем буквой c будем обозначать константы, не зависящие от δ, η, n.

Лемма 1. *Для итерационных процессов* (2) *с* $\alpha \geqslant 0$ *существуют константы* β, γ *такие, что*

$$0 < \beta \leqslant \varepsilon_n \leqslant \gamma < \infty, \tag{9}$$

$$\|r_n\|^2 - \|r_{n+1}\|^2 \geqslant \beta(B_\eta r_n, r_n), \tag{10}$$

и существует $t_0 > 0$ *такое, что для всех* $t \in (0, t_0]$

$$\|F_t\psi_n\| \leqslant \|F_t\psi_{n-1}\| + \gamma t^{1/2}\|A_\eta u_* - f_\delta\|, \tag{11}$$

$$\|E_t r_n\| \leqslant \|E_t r_{n-1}\|. \tag{12}$$

Доказательство. По условию $u_0 - u_*$ не является собственным элементом оператора A^*A. Нетрудно заметить, что при достаточно малых δ, η начальная ошибка $u_0 - u_*$ не будет собственным элементом и для $A_\eta^* A_\eta$ и тогда итерации (2) существуют при всех n, т. е. $r_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Из (2) можно заметить, что $\varepsilon_n \geqslant 1/\|B_\eta\| \geqslant 1/(\|A\| + \eta_0)^2 = \beta$. Из (2) получаем также равенство

$$r_{n+1} = r_n - \varepsilon_n B_\eta r_n. \tag{13}$$

Отсюда вытекает ряд равенств:

$$(B_\eta^{\alpha+1} r_n, r_{n+1}) = 0,$$

$$(B_\eta^{\alpha+1} r_n, r_{n+2}) = \varepsilon_{n+1}(B_\eta^{\alpha+1} r_{n+1}, r_{n+1} - r_n)/\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1}(B_\eta^{\alpha+1} r_{n+1}, r_{n+1})/\varepsilon_n, \tag{14}$$

$$(B^{\alpha}_{\eta} r_n, r_{n+2}) = (B^{\alpha}_{\eta} r_n, r_{n+1}) = (B^{\alpha}_{\eta} r_{n+1}, r_{n+1}),$$

$$(B^{\alpha}_{\eta} r_n, r_n) - (B^{\alpha}_{\eta} r_{n+1}, r_{n+1}) = \varepsilon_n (B^{\alpha+1}_{\eta} r_n, r_n),$$

$$\varepsilon_n (B^{\alpha+1}_{\eta} r_n, r_n) - \varepsilon_{n+1} (B^{\alpha+1}_{\eta} r_{n+1}, r_{n+1}) = (B^{\alpha}_{\eta} (r_n - r_{n+2}), r_n - r_{n+2}) \geqslant 0. \quad (15)$$

Обозначим для краткости $a_n = \|B_\eta^{(\alpha+1)/2} r_n\|$. Из (14) находим $\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n \leqslant a_{n+2} a_n / a^2_{n+1}$. Перемножая последние неравенства для $n = 0, 1, \ldots, k-1$, получаем

$$\varepsilon_k \leqslant \varepsilon_0 (a_{k+1}/a_k)(a_0/a_1). \quad (16)$$

В силу (15) имеем $\varepsilon_k a_k^2 \geqslant \varepsilon_{k+1} a^2_{k+1}$. Последнее вместе с (16) дает $\varepsilon_k \varepsilon_{k+1} \leqslant \varepsilon_0 a_0^2/a_1^2$, откуда получаем

$$\varepsilon_k \leqslant \gamma(\delta, \eta) = \|B_\eta\| \varepsilon_0^2 (B^{\alpha+1}_{\eta} r_0, r_0) / (B^{\alpha+1}_{\eta} r_1, r_1).$$

Имеем $\lim\limits_{\delta,\eta\to 0} \gamma(\delta,\eta) = \|A\|^2 (B^{\alpha+1}x, x) / [(B^{\alpha+3}x, x)(B^{\alpha+1}x, x) - (B^{\alpha+2}x, x)^2] = c$, где $B = AA^*$, $x = Au_0 - f = A(u_0 - u_*)$. В силу неравенства моментов [10] знаменатель неотрицателен и обращается в нуль только тогда, когда x является собственным элементом оператора B. Но тогда $u_0 - u_*$ является собственным элементом оператора A^*A, вопреки условию. Итак, $c < \infty$. Из последнего вытекает существование константы γ (см. (9)) для достаточно малых δ, η. Заметим, что γ существенно зависит от начального приближения.

Из (9), (13) и неравенства моментов получим

$$\|r_n\|^2 - \|r_{n+1}\|^2 = 2\varepsilon_n (B_\eta r_n, r_n) - \varepsilon_n (B^{\alpha+1}_{\eta} r_n, r_n)(B^2_{\eta} r_n, r_n) / (B^{\alpha+2}_{\eta} r_n, r_n) \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon_n (B_\eta r_n, r_n) \geqslant \beta (B_\eta r_n, r_n),$$

что доказывает (10).

Из (13) можно получить

$$\|E_t r_n\| = [\int_0^t (1 - \lambda\varepsilon_{n-1})^2 d\|E_\lambda r_{n-1}\|^2]^{1/2}.$$

Если для последнего выбрать $t_0 = 1/\gamma$, то для $\lambda \in (0, t_0]$ имеем $(1 - \lambda\varepsilon_{n-1})^2 \leqslant 1$, что и доказывает (12). Из (2) находим, что

$$\psi_n = \psi_{n-1} - \varepsilon_{n-1} A^*_{\eta} A_\eta \psi_{n-1} + \varepsilon_{n-1} A^*_{\eta} (A_\eta u_* - f_\delta),$$

откуда

$$\|F_t \psi_n\| \leqslant [\int_0^t (1 - \lambda\varepsilon_{n-1})^2 d\|F_\lambda \psi_{n-1}\|^2]^{1/2} + \gamma [\int_0^t \lambda d\|E_\lambda (A_\eta u_* - f_\delta)\|^2]^{1/2}.$$

Из последнего для $t \in (0, t_0]$ следует (11). Лемма доказана.

Утверждения (9) и (10) для $\alpha = -1$ были получены в [9].

Лемма 2. *При $p > 0$ справедлива оценка*

$$\|E_t A_\eta (A^*A)^p v\| \leqslant t^{p+1/2} \|F_t w\| + c\eta t^s, \quad (17)$$

где $w \perp \mathfrak{N}(A)$, $Aw = Av$, $s = 0{,}5 \cdot \min(1, p)$.

Доказательство. Обозначим $D = A^*A$. Имеем $D^p v = D^p w = D^p_{\eta} w + (D^p - D^p_{\eta}) w$. Следовательно,

$$\|E_t A_\eta D^p v\| \leqslant \|E_t A_\eta D^p_{\eta} w\| + \|E_t A_\eta (D^p_{\eta} - D^p) w\|. \quad (18)$$

Первый член в (18) можно оценить

$$\|E_tA_\eta D^p_\eta w\| \leqslant t^{p+1/2}\|F_tw\|. \quad (19)$$

Оценку второго члена проведем отдельно для $0 < p < 1$ и $p \geqslant 1$. Пусть сначала $p \geqslant 1$. Из [13] известно, что тогда $\|D_\eta{}^p - D^p\| \leqslant c_1\eta$. Следовательно,

$$\|E_tA_\eta(D^p_\eta - D^p)w\| \leqslant c_1\|w\|\eta t^{1/2}. \quad (20)$$

Пусть теперь $0 < p < 1$. Тогда

$$\|E_tA_\eta(D^p_\eta - D^p)w\| \leqslant t^{p/2}\|D^{(1-p)/2}_\eta(D^p_\eta - D^p)\|\|w\|. \quad (21)$$

По формуле (14.16) из [14] имеем

$$D^{(1-p)/2}_\eta(D^p_\eta - D^p) = (\sin p\pi)p^{-1}\int\limits_0^\infty x^pD^{(1-p)/2}_\eta[(xI+D_\eta)^{-1} - (xI+D)^{-1}]dx. \quad (22)$$

Учитывая, что $(xI+D_\eta)^{-1} - (xI+D)^{-1} = (xI+D_\eta)^{-1}[A^*_\eta(A-A_\eta) + (A^*-A^*_\eta)A](xI+D)^{-1}$, имеем для $1 \leqslant x < \infty$ оценку

$$\|D^{(1-p)/2}_\eta[(xI+D_\eta)^{-1} - (xI+D)^{-1}\| \leqslant \|D_\eta\|^{(1-p)/2}(\|A_\eta\|+\|A\|)\eta x^{-2},$$

а для $0 < x < 1$ оценку

$$\|D^{(1-p)/2}_\eta[(xI+D_\eta)^{-1} - (xI+D)^{-1}]\| \leqslant 2\eta x^{-1-p/2}.$$

После интегрирования в (22) получим $\|D_\eta{}^{(1-p)/2}(D_\eta{}^p - D^p)\| \leqslant c_2\eta$. Последнее вместе с (18)—(21) доказывает лемму 2.

Лемма 3. *Для итерационного процесса* (2) *справедлива оценка*

$$(B_\eta r_n, r_n) \leqslant c(n^{-1}+\delta^2+\eta^2). \quad (23)$$

Доказательство. Заметим сначала, что в силу монотонности $\|r_n\|$ (см. (10)) верно

$$(B_\eta r_n, r_n) \leqslant \|B_\eta\|\|r_n\|^2 \leqslant \|B_\eta\|\|r_0\|^2 \leqslant c_1. \quad (24)$$

В силу (12) имеем для $t \in (0, 1/\gamma]$

$$\|r_n\| \leqslant \|E_tr_n\| + (B_\eta r_n, r_n)^{1/2}/t^{1/2} \leqslant \|E_tr_0\| + (B_\eta r_n, r_n)^{1/2}/t^{1/2}.$$

Так как $r_0 = A_\eta u_0 - f_\delta = A_\eta\psi_0 + A_\eta u_* - f_\delta$, то

$$\|r_n\| \leqslant t^{1/2}\|F_t\psi_0\| + (B_\eta r_n, r_n)^{1/2}/t^{1/2} + \delta + \eta\|u_*\|, \quad (25)$$

$$\|r_n\| \leqslant t^{1/2}\|\psi_0\| + (B_\eta r_n, r_n)^{1/2}/t^{1/2} + \delta + \eta\|u_*\|. \quad (26)$$

Если в последней оценке при $t \leqslant 1/\gamma$ первый член меньше, чем второй, то, положив $t = 1/\gamma$, имеем (см. (24))

$$\|r_n\| \leqslant 2\gamma^{1/2}(B_\eta r_n, r_n)^{1/2} + \delta + \eta\|u_*\| \leqslant c_2(B_\eta r_n, r_n)^{1/4} + \delta + \eta\|u_*\|.$$

В противном случае оценку (26) можно минимизировать по t и $t_{\min} \in (0, 1/\gamma]$,

$$t_{\min} = (B_\eta r_n, r_n)^{1/2}/\|\psi_0\|.$$

Подставляя последнее в (26), получим

$$\|r_n\| \leqslant c_3(B_\eta r_n, r_n)^{1/4} + \delta + \eta\|u_*\|. \quad (27)$$

Теперь фиксируем $b > 1$. Имеются две возможности: или $\|r_k\| \leqslant b(\delta + \eta\|u_*\|)$, или $\|r_k\| \geqslant b(\delta + \eta\|u_*\|)$. В последнем случае в силу (10) и (27) имеем

$$\frac{1}{\|r_k\|^2}-\frac{1}{\|r_{k-1}\|^2}\geqslant\frac{\beta(B_\eta r_{k-1},r_{k-1})}{\|r_k\|^2\|r_{k-1}\|^2}\geqslant\frac{\beta}{c_3^4}\left[1-\frac{\delta+\eta\|u_*\|}{\|r_{k-1}\|}\right]^4\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\beta}{c_3^4}\left[1-\frac{1}{b}\right]^4=c_4. \tag{28}$$

Если сложить это выражение для $k=1,\ldots,n$, то получим

$$\|r_n\|^2\leqslant c_4 n^{-1}.$$

Следовательно,

$$\|r_n\|\leqslant\max\{c_5 n^{-1/2}, b(\delta+\eta\|u_*\|)\}\leqslant c_5 n^{-1/2}+b(\delta+\eta\|u_*\|), \tag{29}$$

что вместе с (24) доказывает лемму.

Лемма 4. *Для итерационных процессов* (2) *с* $\alpha\geqslant 0$ *справедливо соотношение*

$$\|r_n\|\leqslant\varrho(n,\delta,\eta)n^{-1/2}+b(\delta+\eta\|u_*\|); \tag{30}$$

если выполнено (4), то

$$\|r_n\|\leqslant\varrho(n,\delta,\eta)n^{-p-1/2}+b(\delta+\eta\|u_*\|). \tag{31}$$

Здесь $b>1$ *константа, а* $0<\varrho(n,\delta,\eta)<c$ *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty,\delta\to 0,\eta\to 0}\varrho(n,\delta,\eta)=0.$$

Доказательство. Оценки (30) и (31) можно получить по схеме доказательства (29). Докажем (30). Возьмем $a(n,\delta,\eta)\in(0,1/\gamma]$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty,\delta\to 0,\eta\to 0} a(n,\delta,\eta)=0$, $a(n,\delta,\eta)\geqslant c_1(n^{-1}+\delta^2+\eta^2)^{1/4}$.

При $t\in(0,a(n,\delta,\eta)]$ из (25) получим

$$\|r_n\|\leqslant t^{1/2}\|F_{a(n,\delta,\eta)}\psi_0\|+(B_\eta r_n,r_n)^{1/2}/t^{1/2}+\delta+\eta\|u_*\|. \tag{32}$$

Если при $t\in(0,a(n,\delta,\eta)]$ первый член в (32) меньше, чем второй, то в силу выбора $a(n,\delta,\eta)$ и леммы 3 имеем

$$\|r_n\|\leqslant 2(B_\eta r_n,r_n)^{1/2}/a(n,\delta,\eta)^{1/2}+\delta+\eta\|u_*\|\leqslant$$

$$\leqslant c_2(B_\eta r_n,r_n)^{3/8}+\delta+\eta\|u_*\|. \tag{33}$$

В противном случае, минимизируя (32) по t, имеем $t_{\min}\in(0,a(n,\delta,\eta)]$ и

$$\|r_n\|\leqslant 2\|F_{a(n,\delta,\eta)}\psi_0\|^{1/4}(B_\eta r_n,r_n)^{1/4}+\delta+\eta\|u_*\|. \tag{34}$$

Последнюю оценку и оценку (33) можно записать в едином виде

$$\|r_n\|\leqslant\mu(n,\delta,\eta)(B_\eta r_n,r_n)^{1/4}+\delta+\eta\|u_*\|, \tag{35}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty,\delta\to 0,\eta\to 0}\mu(n,\delta,\eta)=0$ и $0<\mu(n,\delta,\eta)<c$. Действительно, в случае (33) имеем $\mu(n,\delta,\eta)=c_2(B_\eta r_n,r_n)^{1/8}$, а в случае (34) — $\mu(n,\delta,\eta)=2\|F_{a(n,\delta,\eta)}\psi_0\|$. С помощью теоремы Банаха—Штейнгауза убеждаемся, что $\|F_{a(n,\delta,\eta)}\psi_0\|\to 0$ при $n\to\infty$, $\delta\to 0$, $\eta\to 0$. Действительно, $\|F_{a(n,\delta,\eta)}\|\leqslant 1$, $\psi_0\in\mathfrak{N}(A)^{\perp}=\overline{\mathfrak{R}(A^*A)}$, а для элементов вида $\psi=A^*Av$ имеем

$$\|F_{a(n,\delta,\eta)}\psi\|\leqslant\|F_{a(n,\delta,\eta)}A_\eta^*A_\eta v\|+\|F_{a(n,\delta,\eta)}(A_\eta^*A_\eta-A^*A)v\|\leqslant$$

$$\leqslant a(n,\delta,\eta)\|v\|+(\|A_\eta\|+\|A\|)\eta\|v\|\to 0.$$

Следуя схеме доказательства леммы 3, вместо (28) имеем

$$1/\|r_k\|^2 - 1/\|r_{k-1}\|^2 \leqslant c_3/\mu(k-1, \delta, \eta).$$

Если сложить последнее для $k=1, \dots, n$, то $\|r_n\| \leqslant \varrho(n, \delta, \eta) n^{-1/2}$, где $\varrho(n, \delta, \eta)$ определяется из

$$1/\varrho^2(n, \delta, \eta) = c_3 n^{-1} \sum_{k=1}^{n} [1/\mu^4(k-1, \delta, \eta)].$$

Легко убедиться, что $\lim\limits_{n\to\infty, \delta\to 0, \eta\to 0} \varrho(n, \delta, \eta) = 0$. Вместо (29) теперь получим (30).

Докажем (31). В силу леммы 2 можно аналогично (25) получить для $t \in (0, 1/\gamma]$

$$\|r_n\| \leqslant t^{p+1/2} \|F_t w\| + (B_\eta r_n, r_n)^{1/2}/t^{1/2} + \delta + \eta(\|u_*\| + ct^s). \tag{36}$$

Фиксируем сколь угодно малое $\mu > 0$, $t' \equiv (\mu/c)^{1/s} \leqslant 1/\gamma$. Тогда $ct^s \leqslant \mu$ для всех $t \in (0, t']$. Возьмем опять $a(n, \delta, \eta) \in (0, t']$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty, \delta\to 0, \eta\to 0} a(n, \delta, \eta) = 0$, $a(n, \delta, \eta) \geqslant c_4(n^{-1} + \delta^2 + \eta^2)^{1/(4p+4)}$.

Если при $t \in (0, a(n, \delta, \eta)]$ первый член в оценке (см. (36))

$$\|r_n\| \leqslant t^{p+1/2} \|F_{a(n,\delta,\eta)} w\| + (B_\eta r_n, r_n)^{1/2}/t^{1/2} + \delta + \eta(\|u_*\| + \mu) \tag{37}$$

меньше, чем второй, то в силу выбора $a(n, \delta, \eta)$ и (23) имеем

$$\begin{aligned} \|r_n\| &\leqslant 2(B_\eta r_n, r_n)^{1/2}/a(n, \delta, \eta)^{1/2} + \delta + \eta(\|u_*\| + \mu) \leqslant \\ &\leqslant c_5 (B_\eta r_n, r_n)^{(4p+3)/(8p+8)} + \delta + \eta(\|u_*\| + \mu). \end{aligned} \tag{38}$$

В противном случае, минимизируя оценку (37) по t, получим $t_{\min} \in (0, a(n, \delta, \eta)]$ и

$$t_{\min} = [(B_\eta r_n, r_n)^{1/2}/((2p+1)\|F_{a(n,\delta,\eta)} w\|)]^{1/(p+1)}.$$

Подставляя последнее в (37), имеем

$$\begin{gathered} \|r_n\| \leqslant q(n, \delta, \eta)\,(B_\eta r_n, r_n)^{(2p+1)/(4p+4)} + \delta + \eta(\|u_*\| + \mu), \\ \lim_{n\to\infty, \delta\to 0, \eta\to 0} q(n, \delta, \eta) = 0, \end{gathered} \tag{39}$$

где $q(n, \delta, \eta) = 2[(2p+1)\|F_{a(n,\delta,\eta)} w\|]^{1/(2p+2)}$. Такую же оценку можно получить и от (38), полагая $q(n, \delta, \eta) = (B_\eta r_n, r_n)^{1/(8p+8)}$.

В силу (10) и теоремы Лагранжа имеем

$$\begin{aligned} \beta(B_\eta r_n, r_n) &\leqslant \|r_n\|^2 - \|r_{n+1}\|^2 \leqslant \\ &\leqslant (2p+1)\|r_n\|^{4p/(2p+1)} [\|r_n\|^{2/(2p+1)} - \|r_{n+1}\|^{2/(2p+1)}]. \end{aligned} \tag{40}$$

Фиксируем $b' > 1$. Есть две возможности: или

$$\|r_k\| \leqslant b'(\delta + \eta\|u_*\| + \eta\mu), \text{ или } \|r_k\| > b'(\delta + \eta\|u_*\| + \eta\mu).$$

В последнем случае в силу (39), (40) имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|r_k\|^{2/(2p+1)}} - \frac{1}{\|r_{k-1}\|^{2/(2p+1)}} = \frac{\|r_{k-1}\|^{2/(2p+1)} - \|r_k\|^{2/(2p+1)}}{\|r_k\|^{2/(2p+1)} \|r_{k-1}\|^{2/(2p+1)}} \geqslant \\ &\geqslant \frac{\beta(B_\eta r_{k-1}, r_{k-1})}{(2p+1)\|r_{k-1}\|^{(4p+4)/(2p+1)}} \geqslant \\ &\geqslant \frac{\beta}{2p+1} \left[\left(1 - \frac{\delta + \eta\|u_*\| + \eta\mu}{\|r_{k-1}\|}\right) \Big/ q(k-1, \delta, \eta) \right]^{(4p+4)/(2p+1)} \geqslant \end{aligned}$$

$$\geqslant \frac{\beta}{2p+1}\left[\left(1-\frac{1}{b'}\right)\Big/ \varrho(k-1,\delta,\eta)\right]^{(4p+4)/(2p+1)}.$$

Аналогично доказательству (30) получим при сложении для $k=1, \ldots, n$ оценку $\|r_n\| \leqslant \varrho(n,\delta,\eta)n^{-p-1/2}$. Следовательно,

$$\|r_n\| \leqslant \max\{\varrho(n,\delta,\eta)n^{-p-1/2},\ b'(\delta+\eta\|u_*\|+\eta\mu)\} \leqslant$$
$$\leqslant \varrho(n,\delta,\eta)n^{-p-1/2}+b'(\delta+\eta\|u_*\|+\eta\mu),$$

откуда ввиду произвольности $b'>1$ и $\mu>0$ получим (31).

3. Доказательство теоремы 1. Из (11) имеем

$$\|\psi_n\| \leqslant \|F_t\psi_n\|+\|A_\eta\psi_n\|/t^{1/2} \leqslant \|F_t\psi_0\|+$$
$$+n\gamma t^{1/2}(\delta+\eta\|u_*\|)+(\|r_n\|+\delta+\eta\|u_*\|)/t^{1/2}. \qquad (41)$$

Отсюда и из (30) получаем

$$\|\psi_n\| \leqslant \|F_t\psi_0\|+c_1nt^{1/2}(\delta+\eta)+\varrho(n,\delta,\eta)n^{-1/2}/t^{1/2}+c_2(\delta+\eta)/t^{1/2}.$$

Если выбрать $t=t(n)=c_2/(c_1n)$, то

$$\|\psi_n\| \leqslant \|F_{t(n)}\psi_0\|+c_3(\delta+\eta)n^{1/2}+c_4\varrho(n,\delta,\eta). \qquad (42)$$

Аналогично доказательству леммы 4 можно убедиться, что $\|F_{t(n)}\psi_0\|\to 0$ при $\eta\to 0$, $\delta\to 0$, $n\to\infty$. Тогда по условиям теоремы к нулю стремятся и два остальных члена в (42), что и доказывает утверждение (3).

Пусть выполнено (4). Из [13] известно, что

$$\|F_t(A^*A)^p v\| \leqslant t^p\|v\|+(1+|\ln\eta|)\eta^{\min(1,2p)}\|v\|.$$

Аналогично (41) можно из последнего, (11) и (31) получить

$$\|\psi_n\| \leqslant t^p\|v\|+n\gamma t^{1/2}(\delta+\eta\|u_*\|)+c_3n^{-p-1/2}/t^{1/2}+c_4(\delta+\eta)/t^{1/2}+$$
$$+(1+|\ln\eta|)\eta^{\min(1,2p)}.$$

Минимизируем первый и четвертый член по t. В результате получим

$$t=[c_4(\delta+\eta)/(2p\|v\|)]^{2/(2p+1)},$$
$$\|\psi_n\| \leqslant c_5(\delta+\eta)^{2p/(2p+1)}+c_6n(\delta+\eta)^{(2p+2)/(2p+1)}+c_7(\delta+\eta)^{-1/(2p+1)}n^{-p-1/2}.$$

Минимизируя последнюю оценку по n, получим $n=c_{p,r}(\delta+\eta)^{-2/(2p+1)}$ и заодно оценку (5). Доказательство теоремы 1 завершено.

Доказательство теоремы 2 для правила останова (Π_1). Пусть $n=n(\delta,\eta)$ — индекс останова. Тогда $\|r_n\| \leqslant b_1\delta+b_*\eta$ и из (41) получим

$$\|\psi_n\| \leqslant \|F_t\psi_0\|+c_1n(\delta+\eta)t^{1/2}+c_2(\delta+\eta)/t^{1/2}. \qquad (43)$$

Если в процессе $\eta\to 0$, $\delta\to 0$ индекс останова $n(\delta,\eta)$ остается ограниченным, то первое утверждение (6) очевидно, а второе получим, выбрав в (43) $t=(\delta+\eta)^a$, $a\in(0,2)$.

Пусть теперь $n(\delta,\eta)\to\infty$ при $\delta,\eta\to 0$. Из (30) для $k=n(\delta,\eta)-1$ следует

$$b_1\delta+b_*\eta \leqslant \|r_k\| \leqslant \varrho(k,\delta,\eta)k^{-1/2}+b(\delta+\eta\|u_*\|),$$

или $c_3(\delta+\eta)k^{1/2} \leqslant \varrho(k,\delta,\eta)$, откуда вытекает первое утверждение из (6), а второе гарантирует уже теорема 1.

Пусть выполнено (4). Аналогично (41) и (43) можем записать

$$\|\psi_n\| \leqslant t^p\|v\|+c_1(\delta+\eta)nt^{1/2}+c_2(\delta+\eta)/t^{1/2}+(1+|\ln\eta|)\eta^{\min(1,2p)}.$$

Минимизируя первый и третий член по t, имеем

$$t=[c_2(\delta+\eta)/(2p\|v\|)]^{2/(2p+1)},$$

$$\|\psi_n\|\leqslant c_3(\delta+\eta)^{2p/(2p+1)}+c_4(\delta+\eta)^{(2p+2)/(2p+1)}n. \qquad (44)$$

Если $n(\delta,\eta)$ остается ограниченным при $\delta,\eta\to 0$, то выполнение (7) и (8) уже очевидно. Если же $n\to\infty$ при $\delta,\eta\to 0$, то из (31) для $k=n(\delta,\eta)-1$

$$b_1\delta+b_*\eta\leqslant\|r_k\|\leqslant\varrho(k,\delta,\eta)k^{-p-1/2}+b(\delta+\eta\|u_*\|),$$

или $c_5(\delta+\eta)k^{2/(2p+1)}\leqslant\varrho(k,\delta,\eta)$. Последнее вместе с (44) завершает доказательство правила останова (Π_1).

Доказательство теоремы 2 для правила останова (Π_2) основывается на изложенном и проводится по схеме из [5].

4. Так как информация об итерационном методе

$$u_{n+1}=Ru_n \qquad (45)$$

использовалась лишь в виде свойств (10), (11), (12), то результаты можно обобщить. Справедлива

Теорема 3. *Утверждения леммы 3, леммы 4, теоремы 1 и теоремы 2 справедливы для любого итерационного процесса (45) со свойствами (10), (11), (12). Здесь $R:U\to U$ любой (может быть и нелинейный) оператор, зависящий от f_δ, A_η.*

Основные результаты настоящей статьи анонсированы в [15].

В заключение автор выражает глубокую благодарность Г. Вайникко за постановку задачи и за многие полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, М., «Наука», 1979.
2. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П., Теория линейных некорректных задач и ее применение, М., «Наука», 1978.
3. Бакушинский А. Б., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **10**, № 1, 210—213 (1970).
4. Крянев А. В., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **14**, № 1, 25—35 (1974).
5. Вайникко Г. М., Автоматика и телемеханика, № 3, 84—92 (1980).
6. Емелин И. В., Красносельский М. А., Докл. АН СССР, **244**, № 4, 805—808 (1979).
7. Алифанов О. М., Румянцев С. В., Докл. АН СССР, **248**, № 6, 1289—1291 (1979).
8. Трушников В. Н., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **19**, № 4, 822—829 (1979).
9. Гилязов С. Ф., Вестн. Моск. ун-та, **15**, № 3, 26—32 (1980).
10. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я., Приближенное решение операторных уравнений, М., «Наука», 1969.
11. Фридман В. М., Докл. АН СССР, **128**, № 4, 482—484 (1959).
12. Kammerer, W. J., Nashed, M. Z., Appl. Anal., **1**, № 2, 143—159 (1971).
13. Вайникко Г. М., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **22**, № 3, 547—563 (1982).
14. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е., Интегральные операторы в пространстве суммируемых функций, М., «Наука», 1966.
15. Сарв Л. Э., В кн.: Тезисы конференции «Численное решение краевых задач и интегральных уравнений», Тарту, 1981, с. 86—88.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
3/XII 1981

L. SARV

MITTELINEAARSETE ITERATSIOONIMEETODITE PERE MITTEKORREKTSETE ÜLESANNETE LAHENDAMISEKS

On vaadeldud operaatorvõrrandit (1), mille operaatori $A \in \mathfrak{L}(U, F)$ (U, F on Hilberti ruumid) kujutishulk $\mathfrak{R}(A)$ võib olla lahtine, s. t. pöördoperaator (kui ta eksisteerib) pole tõkestatud, ning operaatori A ja võrrandi parema poole f asemel on antud nende ligikaudsed lähendid A_η ja f_δ. Operaatorvõrrandi lahendamiseks on kasutatud iteratsioonimeetodite peret (2). Parameetri α erinevate väärtuste korral kuuluvad vaadeldavasse peresse kiireima languse ($\alpha=0$) ja vähima hälbe ($\alpha=1$) meetodid.

Mittekorrektse ülesande lahendamisel tuleb iteratsioonid teatud sammul peatada. Artiklis on vaadeldud peatumisindeksi aprioorset etteandmist (teoreem 1) ja valikut hälbe järgi (teoreem 2). Mõlemal juhul on tõestatud koonduvus ning antud ka koonduvuskiiruse hinnangud.

L. SARV

A FAMILY OF NONLINEAR ITERATION METHODS FOR ILL-POSED PROBLEMS

Let A be a bounded linear operator between two Hilbert spaces, with the range of A not necessarily closed. Operator equation (1) is examined, where instead of exact A and f their approximations A_η and f_δ are given. For solving (1) the family of iteration methods (2) is used. From (2) we get for $\alpha=0$ the method of steepest descent and for $\alpha=1$ the method of minimal deviations.

The regularization of ill-posed problems by iteration methods is usually realized by stopping the iterations at a certain step. In the present paper the theorems of convergence are proven and error estimations are deduced for a priori given stopping index and for stopping according to deviation.