EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 31. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1982, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 31
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1982, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1982.3.02

УДК 519.6 : 517.988.6

Б. ШИФРИН

МЕТОД ИТЕРАЦИЙ И УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА НАВЬЕ—СТОКСА

(Представил А. Хумал)

1. Уравнения, связанные с задачей Навье—Стокса

Поля скоростей и давлений вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области $\Omega \subset R^m$ при условии прилипания на границе описываются в стационарном случае системой уравнений *

$$-\nu\Delta \mathbf{u}+u_k\mathbf{u}_{x_k}=\mathbf{f}-\nabla p, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0 \quad \text{при} \quad x\in\Omega, \tag{1}$$
$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega}=0.$$

Пусть $H=(\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))^2$, $J=\{\mathbf{v}\in H:\operatorname{div}\mathbf{v}=0\}$. Задача (1) в слабой форме состоит в нахождении такого $\mathbf{u}\in J$, что (см. [1–2])

$$a_\nu(\mathbf{u},\mathbf{w})+k(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{w})=(\mathbf{f},\mathbf{w}) \qquad \forall\mathbf{w}\in J. \tag{2}$$

Здесь $(\mathbf{f},\mathbf{w}):=\int_\Omega f_i w_i\,dx$, $a_\nu(\mathbf{u},\mathbf{w})_H:=\nu(\mathbf{u},\mathbf{w})=\nu(\mathbf{u}_{x_l},\mathbf{w}_{x_l})$, $k(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=(u_j\mathbf{v}_{x_j},\mathbf{w})$.

Ниже рассматривается уравнение более общего вида

$$\tilde{a}(\mathbf{u}_V,\mathbf{w}_V)+\tilde{k}(\mathbf{u}_V,\mathbf{u}_V,\mathbf{w}_V)=f^*(\mathbf{w}_V) \qquad \forall\mathbf{w}_V\in V\ (\mathbf{f}\in V^*). \tag{3}$$

Уравнения такого рода возникают при аппроксимации или «возмущении» уравнения (2) в связи с введением того или иного численного метода (конечноразностные или конечноэлементные или галеркинские аппроксимации, метод штрафа, искажение конвективного члена и т. д.). Здесь V — некоторое гильбертово пространство (чаще всего, но не обязательно, $\dim V<\infty$); предполагается, что $\forall\mathbf{u}_V,\mathbf{v}_V,\mathbf{w}_V$ (ниже $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$) имеем

$$\tilde{\nu}\|\mathbf{u}\|^2_V\leqslant\tilde{a}(\mathbf{u},\mathbf{u})\leqslant\tilde{\mu}\|\mathbf{u}\|^2_V, \qquad N_V:=\sup_{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\neq0}\frac{|\tilde{k}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})|}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|}<\infty. \tag{4}$$

Задачу (2) можно трактовать как частный случай (3) с $V=J$, $\tilde{\nu}=\nu$. Достаточным условием однозначной разрешимости (2) является (см., напр., [3]) неравенство

$$\|f^*\|_{V^*}<cN_V^{-1}\tilde{\nu}^2 \tag{5}$$

с $c=1$. Обоснование этого результата опирается на специфическое свойство формы k: $k(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{u})=0\quad\forall\mathbf{u}\in J$.

В случае общего вида уравнения (3) дело осложняется тем, что

* Здесь принято традиционное соглашение о суммировании по повторяющимся индексам, $m=2$ или 3.

форма $\tilde{k}$ может уже не обладать аналогичным свойством, а также не быть трилинейной (см. [4]).

В данной работе рассматриваются простейшие итерационные процессы для решения (3); одновременно исследуются условия однозначной разрешимости в сравнительно общей ситуации. Показывается, что при замене (2) на (3) достаточное условие (5) сохраняет силу со значением $c = 1/4$ (тут требуется ряд уточнений; в частности, имеется в виду однозначная разрешимость в окрестности нуля). Для некоторых конкретных уравнений это значение c указано в [5, 6]. В случае трилинейной формы $\tilde{k}$ оказываются эффективными результаты [7], касающиеся процесса Ньютона—Канторовича.

Уравнение (3) рассматривается ниже в равносильной операторной форме; мы полагаем

$$\tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \equiv (A\mathbf{u}, \mathbf{w})_V, \qquad \tilde{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv (\mathfrak{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w})_V.$$

Наличие скалярного произведения в V не является существенным в рамках нашего подхода.

2. Описание класса уравнений

2.1. Ниже X, F — банаховы пространства; $A \in L(X, F)$ — непрерывно обратимый оператор,

$$\|A^{-1}\|_{F\to X} \leqslant \nu^{-1} \qquad (\nu > 0). \tag{6}$$

Рассмотрим уравнение вида

$$Ax + \mathfrak{K}(x, x) = f, \tag{7}$$

где отображение $\mathfrak{K}: X \times X \to F$ обладает, по предположению, следующими свойствами **:

а) $\mathfrak{K}(x, 0) = 0$,

б) $\|\mathfrak{K}(x^1, y) - \mathfrak{K}(x^2, y)\| \leqslant N_1 \|x^1 - x^2\| \|y\|$, (П1)

в) $\|\mathfrak{K}(x, y^1) - \mathfrak{K}(x, y^2)\| \leqslant N_2 \|y^1 - y^2\| \|x\|$

$$(\forall x^1, x^2, y^1, y^2, x, y \in X).$$

Отметим, что условия (П1) влекут за собой $\mathfrak{K}(0, y) = 0$ и

$$\|\mathfrak{K}(x, y)\| \leqslant N_{\min} \|x\| \|y\| \qquad (N_{\min} := \min(N_1, N_2)). \tag{8}$$

Таким образом, эти условия симметричны относительно x, y; учитывая это, примем для определенности $N_1 \leqslant N_2$, т. е. $N_1 = N_{\min}$, $N_2 = N_{\max}$; ниже $\overline{N}_i = (N_1 + N_2)/2$.

Замечание 1. Более сильными ограничениями будут (П 2) и (П 3), причем (П 2) означает замену б) (или в)) на б') $\mathfrak{K}(x, y)$ линейно по x (или по y),
(П 3) — требование билинейности и непрерывности $\mathfrak{K}$.
В обоих случаях $N_1 = N_2 \doteq N$.

Уравнение (7) можно записать еще в виде

$$Gx := x + A^{-1}\mathfrak{K}(x, x) = A^{-1}f. \tag{9}$$

В связи с этим введем следующие обозначения:

$$\gamma := \nu^{-1}\|f\|, \quad \beta_i := \nu^{-1} N_i \quad (i = 1, 2), \quad \varkappa_i := 4\gamma\beta_i = 4N_i\nu^{-2}\|f\|. \tag{10}$$

** Ниже вместо $\|x\|_X$, $\|f\|_F$, $\|A^{-1}\|_{F\to X}$ и т. д. мы используем запись $\|x\|$, $\|f\|$, $\|A^{-1}\|$ и т. д.; к недоразумениям это не приводит.

Условимся также для нелинейного отображения $R: X_1 \to X_2$ использовать обозначение $\|R\| = \sup\limits_{x \neq 0} (\|Rx\|/\|x\|)$, если эта величина конечна. Ясно, что при этом $\|R_1 R_2\| \leqslant \|R_1\| \|R_2\|$ $(R_1: X_1 \to X_2,\ R_2: X_2 \to X_3)$.

2.2. Оператор G обратим в окрестности нуля. Это вытекает из формулируемой ниже леммы (см. [8]). Пусть $Ш(0, r) = \{x \in X: \|x\| < r\}$ и пусть отображение $\Psi: Ш(0, r) \to X$ таково, что $\forall x, y \in Ш(0, r)$

$$\Psi(0) = 0, \quad \|\Psi(x) - \Psi(y)\| \leqslant \alpha \|x - y\|, \quad 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{11}$$

Лемма 1. *При условии* (11) *отображение* $\Phi: = \mathrm{I} + \Psi (\Phi(x) = x + \Psi(x))$ *накрывает шар* $Ш(0, (1-\alpha) r)$ *и имеет в нем обратное отображение, удовлетворяющее условию Липшица с константой* $1/(1-\alpha)$.

Отметим, что отображение $\Psi(x) := A^{-1}\mathfrak{R}(x, x)$ удовлетворяет условию (11) с $\alpha = 2\overline{N}\nu^{-1} r = 2\overline{\beta} r$. Действительно, на основе (6) и (П 1) это сразу вытекает из представления

$$A^{-1}(\mathfrak{R}(x^1, x^1) - \mathfrak{R}(x^2, x^2)) = A^{-1}((\mathfrak{R}(x^1, x^1) - \mathfrak{R}(x^1, x^2)) + \\ + (\mathfrak{R}(x^1, x^2) - \mathfrak{R}(x^2, x^2))). \tag{12}$$

Итак, применяя лемму 1 к $G = \mathrm{I} + \Psi$, приходим к выводу, что при достаточно малых $\|f\|$ (или γ) уравнение (9) однозначно разрешимо в шаре $Ш(0, r)$ с $r < (2\overline{\beta})^{-1}$. Этот результат имеет качественный характер: непосредственное применение леммы 1 порождает слишком жесткие ограничения на $\|f\|$.

3. Условия существования решения

3.1. Введем отображения Ψ_a, $L(a): X \to X\ (a \in X)$, положив

$$\Psi_a(x) = A^{-1}\mathfrak{R}(x, a), \qquad L(a)x = x + A^{-1}\mathfrak{R}(x, a) \quad (\forall x \in X). \tag{13}$$

Пусть $D := \{a \in X: \exists L^{-1}(a): X \to X\}$, $S: a \mapsto Sa = L^{-1}(a) A^{-1} f$ $(\forall a \in D)$. Наше уравнение (9), или, что то же самое, $L(x)x = A^{-1}f$, можно, таким образом, представить в области D в виде

$$x = Sx. \tag{14}$$

Покажем, что во всяком случае $D \supset Ш(0, \beta_1^{-1})$. Действительно, при $\|a\| < \beta^{-1}_1$ имеем $\alpha := \nu^{-1} N_1 \|a\| = \beta_1 \|a\| < 1$ и $\|\Psi_a(x) - \Psi_a(y)\| \leqslant \leqslant \nu^{-1} N_1 \|a\| \|x - y\| = \alpha \|x - y\|$ $(\forall x, y \in X)$. Таким образом, по лемме 1 (применимой здесь для $\forall r \geqslant 0$) отображение $L(a)$ накрывает все пространство $X = L(a)X$ и обратимо в нем, причем $L^{-1}(a)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $(1-\alpha)^{-1} = (1 - \beta_1\|a\|)^{-1}$.

Отметим еще, что $L(a)0 = 0$, так что $L^{-1}(a)0 = 0$, а потому $\|L^{-1}(a)x\| = \|L^{-1}(a)x - L^{-1}(a)0\| \leqslant (1 - \beta_1\|a\|)^{-1}\|x\|$, или

$$\|L^{-1}(a)\| \leqslant 1/(1 - \beta_1\|a\|). \tag{15}$$

3.2. Нетрудно указать условия, при которых S отображает в себя некоторый шар $\overline{Ш}(0, r)$ $(r < \beta_1^{-1})$. Имеем

$$\|Sa\| \leqslant \|L^{-1}(a)\| \|A^{-1}\| \|f\| \leqslant \nu^{-1}\|f\|/(1 - \beta_1\|a\|) = \gamma/(1 - \beta_1\|a\|) = \\ = \lambda(\|a\|). \tag{16}$$

Здесь $\lambda(r)$ — возрастающая на $[0, \beta_1^{-1}[$ функция

$$\lambda(r) := \gamma/(1 - \beta_1 r). \tag{17}$$

Если теперь выбрать r так, чтобы $\lambda(r) \leqslant r$, то согласно (16) при $\|a\| \leqslant r$ получим

$$\|Sa\| \leqslant \lambda(\|a\|) \leqslant \lambda(r) \leqslant r, \tag{18}$$

т. е. $S(\overline{Ш}(0,r)) \subset \overline{Ш}(0,r)$. Итак, достаточно потребовать $\lambda(r) \leqslant r$, или

$$\gamma \leqslant r(1-\beta_1 r). \tag{19}$$

Правая часть (19) максимальна при $r = r^* := (2\beta_1)^{-1}$. Таким образом, при $r = r^*$ получаем наименее обременительное ограничение (гарантирующее $S(\overline{Ш}(0,r)) \subset \overline{Ш}(0,r))$, а именно: $\gamma \leqslant r^*/2 = \beta^{-1}{}_1/4$, или

$$\varkappa_1 := 4\beta_1\gamma = 4N_1\nu^{-2}\|f\| \leqslant 1. \tag{20}$$

Сказанное можно несколько уточнить. Именно, при (20), согласно (16), имеем

$$S(\overline{Ш}(0,r^*)) \subset \overline{Ш}(0,2\gamma) \subset Ш(0,r^*) \ (2\gamma \leqslant (2\beta_1)^{-1}). \tag{21}$$

3.3. Лемма 2. *Пусть* $a^1, a^2 \in Ш(0,\beta_1{}^{-1})$. *Тогда*

$$\|Sa^1 - Sa^2\| \leqslant q\|a^1 - a^2\|,$$

$$q = q(\|a^1\|, \|a^2\|) = \varkappa_2/[4(1-\beta_1\|a^1\|)(1-\beta_1\|a^2\|)]. \tag{22}$$

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\|L(a^2) - L(a^1)\|_{X\to X} \leqslant \nu^{-1}N_2\|a^2-a^1\| = \beta_2\|a^2-a^1\|$; кроме того, $\|L^{-1}(a^i)\| \leqslant (1-\beta_1\|a^i\|)^{-1}$ $(i=1,2)$. Воспользуемся представлением $Sa^1 - Sa^2 = (L^{-1}(a^1) - L^{-1}(a^2))A^{-1}f = L^{-1}(a^2)(L(a^2) - L(a^1))L^{-1}(a^1)A^{-1}f$, откуда $\|Sa^1 - Sa^2\| \leqslant \|L^{-1}(a^1)\|\,\|L^{-1}(a^2)\|\,\|L(a^2) - L(a^1)\|\,\|A^{-1}\|\,\|f\| \leqslant \|L^{-1}(a^1)\|\|L^{-1}(a^2)\|\beta_2\|a^2-a^1\|\gamma \leqslant \beta_2\gamma(1-\beta_1\|a^1\|)^{-1}(1-\beta_1\|a^2\|)^{-1}\|a^2-a^1\|$, что совпадает с (22).

Замечание 2. Если $\|a^1\|, \|a^2\| \leqslant r < \beta_1{}^{-1}$, то получаем

$$q \leqslant (\varkappa_2/4)(1-\beta_1 r)^{-2}. \tag{23}$$

В частности, при $r = r^*$ неравенство (23) дает $q \leqslant \varkappa_2$, т. е.

$$\|Sa^1 - Sa^2\| \leqslant \varkappa_2\|a^1 - a^2\|. \tag{24}$$

Применяя к отображению S теорему о сжимающем отображении (на основе (21) и (24)), приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие*

$$\varkappa_2 := 4\beta_2\gamma = 4N\nu^{-2}\|f\| < 1 \quad (\varkappa_2 = \varkappa_{\max}). \tag{25}$$

Тогда уравнение (7) *однозначно разрешимо в шаре* $\overline{Ш}(0,r^*)$, $r^* = (2\beta_1)^{-1}$, *причем решение* $x^* \in Ш(0,2\gamma) \subset \overline{Ш}(0,r^*)$.

4. Неявный итерационный процесс

Рассмотрим для уравнения (7) итерации вида

$$Ax^{m+1} + \mathfrak{R}(x^{m+1}, x^m) = f \tag{26}$$

или $L(x^m)x^{m+1} = x^{m+1} + A^{-1}\mathfrak{R}(x^m, x^{m+1}) = A^{-1}f$. Если предположить, что $x^m \in D$ (т. е. $\exists L^{-1}(x^m)$), то это же уравнение можно записать в виде

$$x^{m+1} = Sx^m. \tag{27}$$

Лемма 3. *Пусть* $\|x^0\| \leqslant r^* = (2\beta_1)^{-1}$ *и* $\varkappa_1 \leqslant 1$. *Тогда процесс* (26) *определен на каждом шаге и представим в виде* (27). *Если же, более* *того, $\varkappa_2 < 1$, то процесс сходится к решению $x^* \in \overline{Ш}(0, 2\gamma) \subset Ш(0, r^*)$ со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $\varkappa_2$* (мы следуем здесь терминологии [9], с. 27).

Доказательство вытекает из установленных в (П 3) свойств оператора S и теоремы о сжимающем отображении.

Ниже показывается, что показатель геометрической прогрессии $\varkappa_2$ на самом деле завышен; уточняются и результаты теоремы 1.

Обозначим корни уравнения $\lambda(r) = r$ или, что то же самое, $\beta_1 r^2 - r + \gamma = 0$ через $r_1, r_2 (r_1 \leqslant r_2)$, так что

$$r_1 = (1 - \sqrt{1 - 4\beta_1\gamma})/(2\beta_1) = (1 - \sqrt{1 - \varkappa_1})/(2\beta_1), \quad r_2 = (1 + \sqrt{1 - \varkappa_1})/(2\beta_1). \tag{28}$$

Лемма 4. *Уравнение* (7) *не имеет решений в области*

$$\Omega = \{x \in X : r_1 < \|x\| < r_2\}.$$

Доказательство. Легко видеть, что при $\|x\| := r \in]r_1, r_2[$ имеем $\lambda(r) < r$, откуда, согласно (16), получаем $\|Sx\| \leqslant \lambda(\|x\|) < \|x\|$. Следовательно, уравнение $Sx = x$, равносильное уравнению (7) в $\Omega \subset D$, не имеет решений в Ω.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$\varkappa_1 = 4N_1\nu^{-2}\|f\| < 1, \quad \theta := \varkappa_2(1 + \sqrt{1 - \varkappa_1})^{-2} < 1. \tag{29}$$

Тогда: 1) *уравнение* (7) *имеет в шаре* $Ш(0, r_2)$ *единственное решение* x^*, *причем* $x^* \in \overline{Ш}(0, r_1)$;

2) *при любом выборе* $x^0 \in Ш(0, \tilde{r})$, $\tilde{r} := \beta_1^{-1}(1 - \sqrt{\varkappa_2}/2)$ *процесс* (26) *однозначно определен и сходится к* x^* *с оценкой*

$$\|x^* - x^m\| \leqslant c(\theta + \varepsilon)^m (\forall \varepsilon > 0, \ c = c(\|x^0\|, \varepsilon)). \tag{30}$$

Если же $x^0 \in \overline{Ш}(0, r_1)$, *то, более того,*

$$\|x^* - x^m\| \leqslant \frac{\theta^m}{1 - \theta} \|x^1 - x^0\| \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{31}$$

Замечание 3. Нетрудно проверить, что $r_1 < \tilde{r} < r_2$. Оценка (30) означает сходимость со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой сколь угодно близок к θ.

Замечание 4. Предположения (29), очевидно, слабее требования $\varkappa_2 < 1$ леммы 3. Более того, (29) слабее и ограничения $\bar{\varkappa} := (\varkappa_1 + \varkappa_2)/2 < 1$. Действительно, условие $\theta < 1$ можно записать и так: $\varkappa_2 < (1 + \sqrt{1 - \varkappa_1})^2 = 2 + 2\sqrt{1 - \varkappa_1} - \varkappa_1$ или

$$\bar{\varkappa} := (\varkappa_1 + \varkappa_2)/2 < 1 + \sqrt{1 - \varkappa_1}. \tag{32}$$

Доказательство теоремы 2: 1. При $\|a^1\|, \|a^2\| \leqslant r$ имеем (см. (23))

$$\|Sa^1 - Sa^2\| \leqslant q_r \|a^1 - a^2\|, \quad q_r := (\varkappa_2/4)(1 - \beta_1 r)^{-2} \quad (r < \beta_1^{-1}). \tag{33}$$

Пусть $q_r < 1$. Это, как легко проверить, означает, что

$$r < \beta_1^{-1}(1 - \sqrt{\varkappa_2}/2) = \tilde{r}.$$

Отметим еще, что при $r = r_1$ непосредственное вычисление дает $q_{r_1} = \varkappa_2(1 + \sqrt{1 - \varkappa_1})^{-2} = \theta$, т. е. θ есть коэффициент сжатия.

2. С другой стороны, имеем

$$S(\overline{Ш}(0,r))\subset\overline{Ш}(0,r) \quad \text{при} \quad r_1\leqslant r\leqslant r_2. \tag{34}$$

Действительно, согласно (16) при $\|x\|\leqslant r$ получим $\|Sx\|\leqslant\lambda(\|x\|)\leqslant\leqslant\lambda(r)\leqslant r$. Теперь видно, что при $r_1\leqslant r<\tilde r$ оператор S удовлетворяет в шаре $\overline{Ш}(0,r)$ условиям теоремы о сжимающем отображении. Итак, уравнение $Sx=x$ имеет единственное решение x^* в $\overline{Ш}(0,r_1)$ (и в $\overline{Ш}(0,r)$). По лемме 4 оно будет единственным и в $Ш(0,r_2)$.

3. Та же теорема о сжимающем отображении гарантирует сходимость итераций x^m к x^* с оценкой (31) при $\|x^0\|\leqslant r_1$ и более медленную — при $r_1\leqslant\|x^0\|<\tilde r$ (в (31) $\theta=q_{r_1}$ заменяется на $q_{\|x^0\|}$). В последнем случае, однако, сходимость будет ускоряться: по данному $\delta>0$ мы найдем m_0 такое, что $\|x^{m_0}\|\leqslant\|x^*\|+\delta\leqslant r_1+\delta$, но δ, в свою очередь, можно найти по данному $\varepsilon>0$ так, чтобы выполнялось $\theta==q_{r_1}\leqslant q_{(r_1+\delta)}\leqslant q_{r_1}+\varepsilon=\theta+\varepsilon$ (коэффициент сжатия q_r есть непрерывная возрастающая функция $r\in[r_1,\tilde r[$). Отсюда легко приходим к оценке (30). Теорема доказана.

5. Явный итерационный процесс

5.1. Исходное уравнение (7) можно представить в виде

$$x=Tx, \quad Tx\equiv A^{-1}f-A^{-1}\mathfrak{K}(x,x)\ (T:X\to X). \tag{35}$$

Из соотношения (12) следует, что оператор T липшицев в любом шаре:

$$\|Tx_1-Tx_2\|\leqslant 2\bar\beta r\|x_1-x_2\| \quad \text{при} \quad \|x_1\|,\ \|x_2\|\leqslant r \quad (\bar\beta:=\nu^{-1}\bar N). \tag{36}$$

Ниже рассматривается итерационный процесс $x^{m+1}=Tx^m$ или

$$Ax^{m+1}=f-\mathfrak{K}(x^m,x^m). \tag{37}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2:

$$\varkappa_1<1, \quad \theta:=\varkappa_2(1+\sqrt{1-\varkappa_1})^{-2}<1. \tag{38}$$

Тогда при любом x^0, *таком что* $\|x^0\|<(2\bar\beta)^{-1}$, *процесс* (37) *сходится к решению* $x^*\in\overline{Ш}(0,r_1)\subset Ш(0,r_2)$ (*единственному в* $Ш(0,r_2)$) *с оценкой*

$$\|x^*-x^m\|\leqslant c(\theta'+\varepsilon)^m, \quad \theta':=\bar\varkappa(1+\sqrt{1-\varkappa_1})^{-1}(\forall\varepsilon>0, \quad c=c(\varepsilon,\|x^0\|)). \tag{39}$$

Если же $\|x^0\|\leqslant r_1$ *то, более того*,

$$\|x^*-x^m\|\leqslant\frac{(\theta')^m}{1-\theta'}\|x^1-x^0\|. \tag{40}$$

Замечание 5. То, что $(2\bar\beta)^{-1}<r_2=(1+\sqrt{1-\varkappa_1})(2\beta_1)^{-1}$, очевидно; то, что $(2\bar\beta)^{-1}>r_1$, будет видно из доказательства. Отметим, что если $\varkappa_1<1$, то условие $\theta<1$ влечет за собой $\theta'<1$ (верно и обратное): см. замечание 4 (неравенство (32)).

Доказательство теоремы 3. Покажем, что

$$T(\overline{Ш}(0,r))\subset\overline{Ш}(0,r) \quad \text{при} \quad r_1\leqslant r\leqslant r_2 \tag{41}$$

(напомним, что r_1, r_2 — корни уравнения $\beta_1 r^2 - r + \gamma = 0$, так что $\beta_1 r^2 + \gamma \leqslant r$ при $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$). Действительно, согласно (35), (6) и (8) имеем при $\|x\| \leqslant r$

$$\|Tx\| \leqslant \|A^{-1}\| \|f\| + \|A^{-1}\| \|\mathfrak{K}(x, x)\| \leqslant$$
$$\leqslant \nu^{-1}\|f\| + \nu^{-1} N_1 \|x\|^2 = \beta_1 \|x\|^2 + \gamma, \tag{42}$$

$\|Tx\| \leqslant \beta_1 r^2 + \gamma \leqslant r$. Этим (41) доказано.

С другой стороны, согласно (36), T будет сжатием с коэффициентом $q_r' := 2\bar{\beta} r$ при $r < (2\bar{\beta})^{-1}$. В частности, при $r = r_1$ имеем

$$q'_{r_1} = 2\bar{\beta}(1 - \sqrt{1 - \varkappa_1})(2\beta_1)^{-1} =$$
$$= \bar{\varkappa}(1 - \sqrt{1 - \varkappa_1})\varkappa_1^{-1} = \bar{\varkappa}(1 + \sqrt{1 - \varkappa_1})^{-1} = \theta' < 1.$$

Теперь из теоремы о сжимающем отображении следует сходимость процесса $x^{m+1} = Tx^m$ с оценкой (40) при $\|x^0\| \leqslant r_1$ и более медленная — при $\|x^0\| \leqslant r < (2\bar{\beta})^{-1}$ (в (40) $\theta' = q'_{r_1}$ заменяется на q'_r). В последнем случае, однако, мы после конечного числа шагов попадем в шар $\text{Ш}(0, r_1 + \delta)$ $(\forall \delta > 0)$, и потому имеет место оценка (39) (см. аналогичное рассуждение при доказательстве теоремы 2; $q'_r = 2\bar{\beta} r$ — непрерывная возрастающая функция r).

5.2. Сравним скорости сходимости явного и неявного процессов. Можно показать, что справедлива формула

$$\frac{\theta}{\theta'} = 1 - \frac{N_1}{\bar{N}} \frac{1 - \theta'}{1 + \sqrt{1 - \varkappa_1}}. \tag{43}$$

Таким образом, наши оценки предписывают более быструю сходимость неявному процессу. В случае $N_1 = N_2 = \bar{N}$ $(\varkappa_1 = \varkappa_2 = \bar{\varkappa} := \varkappa)$ формула (43) дает $\theta/\theta' = 1/(1 + \sqrt{1 - \varkappa})$, что легко получить и непосредственно.

Отметим, что выбрав $x^0 = 0$, имеем $\|x^1 - x^0\| = \|x^1\| = \|A^{-1}f\| \leqslant \gamma$ (легко проверить, что $S0 = T0 = A^{-1}f = x^1$); тем самым оценки (31) и (40) весьма конкретизируются. Однако точнее здесь оказывается простая оценка

$$\|x^* - x^m\| \leqslant q^m \|x^* - x^0\| = q^m \|x^*\| \leqslant q^m r_1, \tag{44}$$

где $q = \theta'$ для явного процесса и $q = \theta$ для неявного.

5.3. Смешанный итерационный процесс

$$Ax^{m+1} + \mathfrak{K}(\sigma x^m + (1 - \sigma) x^{m+1}, x^m) = f \quad (0 \leqslant \sigma \leqslant 1) \tag{45}$$

сходится при основном предположении (29) и при $\|x^0\| \leqslant r_1$ с оценкой типа (31), где θ заменяется на $\theta_\sigma := \sigma\theta' + (1 - \sigma)\theta$ (при $x^0 = 0$ верно (44) с $q = \theta_\sigma$).

6. Предельный случай: $\varkappa = 1$

6.1. Пусть $N_1 = N_2 := N$ и допустим ***, что

$$\varkappa = 4\beta\gamma = 4N\nu^{-2}\|f\| = 1, \tag{46}$$

т. е. уравнение $\beta r^2 - r + \gamma = 0$ имеет два равных корня $r_1 = r_2 = 1/(2\beta)$. Ниже используется идея мажоранты [7]. Пусть X — банахово про-

*** Здесь, очевидно, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$.

странство, $y^k \in X$ $(k=0, 1, 2\ldots)$, $t_k \in]-\infty, +\infty[$. Условимся называть последовательность t_k оценивающей (для y^k), если

$$\|y^{k+1}-y^k\| \leqslant t_{k+1}-t_k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{47}$$

и мажорирующей, если, кроме того,

$$\|y^k\| \leqslant t_k. \tag{48}$$

Лемма 5. *Пусть $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ оценивается некоторой ограниченной сверху последовательностью $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда найдутся $t^* \in]-\infty, +\infty[$, $y^* \in X$ такие, что $t_k \leqslant t^*$, $t_k \to t^*$, $y^k \overset{X}{\to} y^*$ $(k \to \infty)$, причем*

$$\|y^*-y^k\| \leqslant t^*-t_k. \tag{49}$$

Действительно, t_k не убывает в силу (47), а потому (при $k \to \infty$) $t_k \to \sup\limits_k t_k := t^*$. Вместе с $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ фундаментальна и $\{y_k\}$, так как

$$\|y^{k+p}-y^k\| \leqslant \sum_{i=k}^{k+p} \|y^{i+1}-y^i\| \leqslant \sum_{i=k}^{k+p} (t_{i+1}-t_i) = t_{k+p}-t_k. \tag{50}$$

Тем самым $\exists y^* \in X : y^n \overset{X}{\to} y^*$ $(n \to \infty)$. Перейдя в (50) к пределу при $p \to \infty$, получим (49).

6.2. Рассмотрим в предположении (46) процесс

$$x^0=0, \qquad x^n=Sx^{n-1} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{51}$$

Отметим, что $x^1=S0=A^{-1}f$. Процесс (51) определен на каждом шаге и равносилен неявному процессу (26), причем $\|x^n\| < (2\beta)^{-1}=2\gamma$ (это верно вообще при любом $x^0 \in Ш(0, (2\beta)^{-1})$, см. раздел 4).

Напомним, что уравнение $\beta r^2 - r + \gamma = 0$ можно записать в виде $\lambda(r) := \gamma/(1-\beta r) = r$. Нам понадобится тождество

$$\lambda(q)-\lambda(p) = \frac{\beta\gamma(q-p)}{(1-\beta q)(1-\beta p)} = \frac{\varkappa(q-p)}{4(1-\beta q)(1-\beta p)} \quad (p, q \in [0, \beta^{-1}[). \tag{52}$$

В частности, при $q=q^*=r_1=r_2=(2\beta)^{-1}$ имеем $\lambda(q^*)=q^*$, так что

$$q^*-\lambda(p) = \varkappa(q^*-p)/(2(1-\beta p)). \tag{53}$$

Введем последовательность p_n, положив

$$p_0=0, \qquad p_n=\lambda(p_{n-1})=\gamma/(1-\beta p_{n-1}). \tag{54}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что тогда

$$p_n=n/(2\beta(n+1)), \tag{55}$$

так что $p_n \to p^*=(2\beta)^{-1}$, возрастая.

Лемма 6. *Последовательность p_n мажорирует x^n.*

Докажем это индукцией. Имеем $\|x^0\|=0=p_0$, $\|x^1-x^0\|=\|x^1\| \leqslant \leqslant \gamma = p_1 = p_1 - p_0$. Пусть при $1 \leqslant n \leqslant m$ мажорирование проверено: $\|x^n\| \leqslant p_n$, $\|x^n-x^{n-1}\| \leqslant p_n-p_{n-1}$. Тогда согласно (16), (22) и (52) получим $\|x^{m+1}\| = \|Sx^m\| \leqslant \lambda(\|x^m\|) \leqslant \lambda(p_m) = p_{m+1}$, а также

$$\|x^{m+1}-x^m\| = \|Sx^m-Sx^{m-1}\| \leqslant \frac{\varkappa}{4} \frac{\|x^m-x^{m-1}\|}{(1-\beta\|x^m\|)(1-\beta\|x^{m-1}\|)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varkappa(p_m - p_{m-1})}{4(1-\beta p_m)(1-\beta p_{m-1})} = \lambda(p_m) - \lambda(p_{m-1}) = p_{m+1} - p_m.$$

Лемма доказана.

Из лемм 5 и 6 теперь вытекает, что $x^n \xrightarrow{X} x^*$, $\|x^*\| \leqslant (2\beta)^{-1}$. Покажем, следуя [7], что x^* — единственное решение уравнения $Sx = x$ в шаре $\overline{Ш}(0, (2\beta)^{-1})$. Рассмотрим процесс $\tilde{x}^n = S\tilde{x}^{n-1}$ с любым $\tilde{x}^0 \in \overline{Ш}(0, (2\beta)^{-1})$. Убедимся, что

$$\|\tilde{x}^n - x^n\| \leqslant p^* - p_n = 1/(2\beta(n+1)). \tag{56}$$

В самом деле, при $n=0$ (56) очевидно. Если же (56) верно при $n=m$, то, согласно (53) и учитывая, что $\|x^m\| \leqslant p_m$, $\|\tilde{x}^m\| \leqslant (2\beta)^{-1}$, имеем $\|\tilde{x}^{m+1} - x^{m+1}\| = \|S\tilde{x}^m - Sx^m\| \leqslant \frac{\varkappa\|\tilde{x}^m - x^m\|}{4(1-\beta\|\tilde{x}^m\|)(1-\beta\|x^m\|)} \leqslant \varkappa(p^* - p_m)/(2(1-\beta p_m)) = p^* - \lambda(p_m) = p^* - p_{m+1}$. Теперь из (56) получаем

$$\|\tilde{x}^n - x^*\| \leqslant \|\tilde{x}^n - x^n\| + \|x^* - x^n\| \leqslant 2(p^* - p_n) = 1/(\beta(n+1)). \tag{57}$$

В частности, если $\tilde{x} \in \overline{Ш}(0, (2\beta)^{-1})$ и $S\tilde{x} = \tilde{x}$, то, полагая $\tilde{x}^0 = \tilde{x}$, имеем $\tilde{x}^n = \tilde{x}$; поэтому (57) влечет за собой $\tilde{x} = \tilde{x}^*$ (то, что x^* — решение, ясно из непрерывности S в $\overline{Ш}(0, (2\beta)^{-1})$. В итоге приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. *При выполнении условия $\varkappa = 4\beta\gamma = 4N\nu^{-2}\|f\| = 1$ уравнение* (7) *имеет единственное решение x^* в шаре $\overline{Ш}(0, r^*)$ $(r^* = (2\beta)^{-1} = 2\gamma)$. Неявный процесс* (26) *определен и сходится при любом $x^0 \in \overline{Ш}(0, r^*)$ с оценкой*

$$\|x^* - x^n\| \leqslant 2r^*/(n+1) = 1/(\beta(n+1)) = 4\gamma/(n+1). \tag{58}$$

Если же $x^0 = 0$, то

$$\|x^* - x^n\| \leqslant r^*/(n+1) = 1/(2\beta(n+1)) = 2\gamma/(n+1) \quad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{59}$$

6.3. Рассмотрим при том же предположении (46) явный процесс

$$x^0 = 0, \quad x^n = Tx^{n-1} \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{60}$$

Отметим, что $x^1 = T0 = A^{-1}f$. Нам понадобятся неравенства

$$\|Tz_2 - Tz_1\| \leqslant \beta(\|z_2\| + \|z_1\|)\|z_2 - z_1\|, \tag{61}$$

$$\|Tz\| \leqslant \varphi(\|z\|) := \beta\|z\|^2 + \gamma \quad (\forall z_1, z_2, z \in X;\ \varphi(t) = \beta t^2 + \gamma). \tag{62}$$

((62) совпадает с (42); (61) вытекает из формулы (12)). Введем последовательность $t_n: t_0 = 0$, $t_n = \varphi(t_{n-1}) = \beta t_{n-1}^2 + \gamma$.

Лемма 7. *Последовательность t_n мажорирует x^n.*

Действительно, имеем $\|x^0\| = t_0 = 0$, $\|x_1 - x_0\| = \|x_1\| = \|A^{-1}f\| \leqslant \gamma = t_1 = t_1 - t_0$. Пусть при $1 \leqslant n \leqslant m$ выполнено $\|x^m\| \leqslant t_m$, $\|x^m - x^{m-1}\| \leqslant t_m - t_{m-1}$. Тогда на основе (61) и (62) получим $\|x^{m+1}\| = \|Tx^m\| \leqslant \varphi(\|x^m\|) \leqslant \varphi(t_m) = t_{m+1}$, а также $\|x^{m+1} - x^m\| = \|Tx^m - Tx^{m-1}\| \leqslant \beta(\|x^m\| + \|x^{m-1}\|)\|x^m - x^{m-1}\| \leqslant \beta(t_m + t_{m-1})(t_m - t_{m-1}) = \beta t_m^2 - \beta t_{m-1}^2 = \varphi(t_m) - \varphi(t_{m-1}) = t_{m+1} - t_m$.

Лемма доказана индукцией по n.

Лемма 8. *Последовательность t_n сходится к $t^* = (2\beta)^{-1}$ с оценкой*

$$1/(2\beta(n+1)) \leqslant t^* - t_n \leqslant 1/(\beta(n+2)) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (63)$$

Доказательство. Положим $\tau_n = \beta t_n$. Тогда $\tau_0 = 0$, $\tau_n = \beta(\beta t^2_{n-1} + \gamma) = \tau^2_{n-1} + 1/4$, или $\tau_n - \tau_{n-1} = (1/2 - \tau_{n-1})^2$. Вводя $\varepsilon_n = 1/2 - \tau_n = \beta(t^* - t_n)$, приходим к рекуррентной формуле $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = \varepsilon^2_n$ или $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \varepsilon^2_n = \varepsilon_n(1 - \varepsilon_n)$ $(\varepsilon_0 = 1/2)$.

Докажем по индукции равносильное (63) неравенство

$$1/(2(n+1)) \leqslant \varepsilon_n \leqslant 1/(n+2) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (64)$$

При $n = 0$ (64) очевидно. Далее, $\varepsilon_{n+1} = \chi(\varepsilon_n)$, где $\chi(p) := p(1-p)$ не убывает при $0 \leqslant p \leqslant 1/2$. Поэтому из предположения $\varepsilon_n \leqslant 1/(n+2)$ следует

$$\varepsilon_{n+1} = \chi(\varepsilon_n) \leqslant \chi\left(\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \leqslant \frac{1}{n+2}\left(1 - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{n+3}.$$

Этим правая часть неравенства (64) доказана.

С другой стороны, если $\varepsilon_n \geqslant 1/(2(n+1))$, то $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n(1 - \varepsilon_n) \geqslant$

$$\geqslant \frac{1}{2(n+1)}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2(n+2)}.$$

Лемма доказана.

Теперь из лемм 1, 7 и 8 вытекает

Теорема 5. *Пусть* $\varkappa = 4\beta\gamma = 4N\nu^{-2}\|f\| = 1$ $(N_1 = N_2 = N)$. *Тогда явный процесс* (60) *с* $x^0 = 0$ *сходится к решению* $x^* \in \overline{Ш}(0, r^*)$ *(единственному в этом шаре) с оценкой*

$$\|x^* - x^n\| \leqslant t^* - t_n \leqslant 1/(\beta(n+2)) = 4\gamma/(n+2) = 2r^*/(n+2) \qquad (65)$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

(*здесь* $t^* = r^* = r_1 = r_2 = (2\beta)^{-1} = 2\gamma$).

Добавим еще, что (аналогично изложенному в разделе 6.2) процесс сходится в действительности при $\forall x^0 \in \overline{Ш}(0, r^*)$ (оценка, вообще говоря, ухудшается вдвое).

Замечание 6. Более тщательный анализ приводит к оценке

$$1/(\beta(n + \ln n + c_1)) \leqslant t^* - t_n \leqslant 1/(\beta(n + \ln n + c_2)) \qquad (n \geqslant 3), \qquad (66)$$

где $c_1 = 5/2$, $c_2 = (3 - \ln 2)/2 \approx 1{,}15$.

Следует отметить, что идея мажоранты применима и к случаю $\varkappa < 1$, причем при выборе $x^0 = 0$ это позволяет несколько усилить оценку скорости сходимости (44), а при выборе $x^0 \neq 0$ — ослабить ограничения на x^0. Так, в условиях теоремы 2 сходимость с оценкой (30) будет уже при $\|x^0\| < r_2$.

7. Метод Ньютона

7.1. Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{K}$ — билинейное непрерывное отображение, что соответствует предположению о трилинейности $\mathfrak{k}(\cdot, \cdot, \cdot)$ (см. (П 1)). Тогда уравнение (7) примет вид $P(x) = 0$, где отображение $P: x \mapsto Ax + \mathfrak{K}(x, x) - f$, как легко убедиться, дважды непрерывно дифференцируемо по Фреше, причем $P'(x) = A + \mathfrak{K}(\cdot, x) + \mathfrak{K}(x, \cdot)$, так что $P'(0) = A$.

Модифицированный процесс Ньютона $x^{n+1} = x^n - (P'(0))^{-1}P(x^n)$ совпадает здесь, как нетрудно проверить, с явным процессом (37).

Замечание 7. Приведенная нами оценка (66) применима и к анализу модифицированного метода Ньютона—Канторовича в общей ситуации (описанной в [7]; $h=1/2$).

7.2. Рассмотрим основной процесс Ньютона (ограничившись выбором $x^0=0$): $x^{n+1}=x^n-(P'(x^n))^{-1}P(x^n)$. В нашей ситуации эти соотношения легко приводятся к виду

$$x^0=0, \quad Ax^{n+1}+\mathfrak{K}(x^{n+1}, x^n)+\mathfrak{K}(x^n, x^{n+1})=\mathfrak{K}(x^n, x^n)-f. \qquad (67)$$

Из результатов Л. В. Канторовича (см. [7]) вытекает следующая

Теорема 6. *При допущении* $\varkappa=4N\nu^{-2}\|f\|<1$ *процесс Ньютона* (67) *сходится к решению* $x^*\in\overline{Ш}(0,r_1)\subset Ш(0,r_2)$ (*оно существует и единственно в* $Ш(0,r_2)$ — *см. разделы***** 4 *и* 6) *с оценкой*

$$\|x^*-x^n\|\leqslant(2^{n+1}\beta)^{-1}\varkappa^{2^n}$$

(*здесь* $\beta=\nu^{-1}N$, $r_1=(1-\sqrt{1-\varkappa})/(2\beta)$, $r_2=(1+\sqrt{1-\varkappa})/(2\beta)$, $\gamma=\nu^{-1}\|f\|$). Эта оценка верна и при $\varkappa=1$ $(r_1=r_2)$.

Отметим, что при $\varkappa<1$ $(h<1/2)$ решение x^* является т. н. простым нулем (несингулярно), и вблизи x^* процесс сходится еще быстрее (см. [9], с. 139 и 142).

Автор глубоко благодарен Г. Вайникко за руководство работой и признателен У. Хямарику за полезное обсуждение 6-го раздела данной работы.

**** Это следует также из самой теории метода Ньютона—Канторовича; критическая константа h из [7] равна здесь $\varkappa/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, М., «Наука», 1970.
2. Лионс Ж.-Л., Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., «Мир», 1972.
3. Girault, V., Raviart, P.-A., Lect. Notes Math., **749**, 104—119 (1979).
4. Ривкинд В. Я., Тр. МИ АН СССР, **125**, 173—186 (1973).
5. Шифрин Б. Ф., В кн.: II симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации, т. 1, Таллин, 1981, с. 112—114.
6. Le Tallec, P., Numer. Math., **35**, № 4, 381—404 (1980).
7. Канторович Л. К., Акилов Г. И., Функциональный анализ, М., «Наука», 1977.
8. Schwartz, J. T., Nonlinear Functional Analysis, Courant Inst. of Math. Sci., New York, Univ., 1965.
9. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я., Приближенное решение операторных уравнений, М., «Наука», 1969.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 1/XII 1981

B. SIFRIN

ITERATSIOONIMEETOD JA LAHENDUVUSTINGIMUSED NAVIER-STOKESI TÜÜPI VÕRRANDI KORRAL

Artiklis on vaadeldud üht võrrandiklassi, kuhu kuuluvad Navier-Stokesi võrrand ja seda aproksimeerivad võrrandid. On leitud selle võrrandiklassi ühese lahenduvuse tingimused (nulli ümbruses), samuti koonduvuskiirused lihtsamate iteratsiooniprotsesside korral.

B. SHIFRIN

ITERATION METHOD AND THE CONDITIONS OF UNIQUE SOLVABILITY FOR THE EQUATIONS OF NAVIER-STOKES TYPE

A number of approximate schemes for Navier-Stokes problem may be presented in general form (3). This one is treated in the article under considerably weak assumptions on $\tilde{k}(\ldots)$. Actually, some additional (specific) properties of the original variational form (2) may be lost after approximation (see, for example, [4]).

Conditions (5), under which equation (3) has a unique solution, occur to be of the same type as for (2), but with replacing $c=1$ by $c=1/4$. More precisely, the uniqueness for (3) is assured only in some ball. All problems are considered in the corresponding operator form.

The analysis of the iterative schemes (26), (37) for (3) is presented. The weak forms of (26), (37) are the following:

$$\tilde{a}(\mathbf{u}^{m+1}, \mathbf{w})+\tilde{k}(\mathbf{u}^{m+1}, \mathbf{u}^{m}, \mathbf{w})=f(\mathbf{w}) \quad \text{and} \quad \tilde{a}(\mathbf{u}^{m+1}, \mathbf{w})+\tilde{k}(\mathbf{u}^{m}, \mathbf{u}^{m}, \mathbf{w})=f(\mathbf{w}) \quad (\forall \mathbf{w} \in V).$$

The estimates for the rate of convergence are established. The idea of majorant, analogous to Kantorovich's one, is applicable to (3) and schemes (26), (37). We use it when the equality is permitted in (5). Some remarks on Newton's method are also presented.