EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 31. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1982, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 31
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА, 1982, № 3

УДК 535.41 : 517.94

П. КАРД

К РЕШЕНИЮ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

В предыдущей статье [1] был развит метод нахождения одномерных волновых уравнений, решаемых в замкнутом виде. Было приведено несколько примеров таких уравнений. В настоящей статье мы рассмотрим частный вариант этого метода, обладающий, однако, значительной общностью, поскольку он дает наряду с известными уже уравнениями несколько новых.

Основные формулы предложенного в [1] метода таковы. Волновое уравнение

$$d^2U/dz^2+k^2N^2(G)\Psi_1^4y^4U=0, \tag{1}$$

где k — волновое число, имеет решение

$$U=y^{-1}\Psi_1^{-1}\Theta, \tag{2}$$

если $\Psi_1(G)$ удовлетворяет уравнению

$$d^2\Psi_1/dG^2+q(G)\Psi_1=0, \tag{3}$$

а $\Theta(G)$ — уравнению

$$d^2\Theta/dG^2+[q(G)+k^2h^2N^2(G)-f(y)y^{-4}\Psi_1^{-4}]\Theta=0. \tag{4}$$

Параметры G и y связаны друг с другом формулой

$$\Psi_2(G)/\Psi_1(G)=\int[C+2\int y^{-3}f(y)\,dy]^{-1/2}\,dy, \tag{5}$$

где C — постоянная, а $\Psi_2(G)$ — линейно независимое от Ψ_1 решение уравнения (3), причем

$$\Psi_1\Psi'_2-\Psi'_1\Psi_2=1. \tag{6}$$

Координата z связана с y соотношением

$$z/h=\int y^{-2}[C+2\int y^{-3}f(y)\,dy]^{-1/2}\,dy, \tag{7}$$

где h — постоянная размерности длины (обычно толщина слоя).

Применение метода начинается с выбора функций $q(G)$, $N(G)$ и $f(y)$, не зависящих от k. На эти функции не налагается никаких требований, кроме того, чтобы уравнения (3) и (4) имели известные решения.

Частный вариант метода

Рассматриваемый ниже частный вариант определяется условиями

$$C=0 \tag{8}$$

и

$$f(y)=-Ay^{-m},\qquad m\neq-2,\qquad m\neq-4. \tag{9}$$

Вычисление интеграла в формуле (5) дает

$$\Psi_2/\Psi_1=(m+4)^{-1}[2(m+2)/A]^{1/2}y^{(m+4)/2}. \tag{10}$$

Следовательно,

$$f(y)\,y^{-4}\Psi_1^{-4}=-2(m+2)(m+4)^{-2}\Psi_1^{-2}\Psi_2^{-2} \tag{11}$$

и уравнение (4) получает вид

$$d^2\Theta/dG^2+[q(G)+k^2h^2N^2(G)+2(m+2)(m+4)^{-2}\Psi_1^{-2}\Psi_2^{-2}]\Theta=0. \tag{12}$$

Далее, формула (7) дает

$$z/h+K=m^{-1}[2(m+2)/A]^{1/2}y^{m/2}. \tag{13}$$

Следовательно, согласно формулам (9) и (11),

$$y^4\Psi_1^4=m^{-2}(m+4)^2\Psi_1^2\Psi_2^2(z/h+K)^{-2}. \tag{14}$$

Отсюда получаем волновое уравнение (1) и его решение (2) в виде

$$d^2U/dz^2+k^2m^{-2}(m+4)^2N^2(G)\Psi_1^2\Psi_2^2(z/h+K)^{-2}U=0 \tag{15}$$

и

$$U=(z/h+K)^{1/2}\Psi_1^{-1/2}\Psi_2^{-1/2}\Theta. \tag{16}$$

Итак, реализация метода требует теперь только выбора функций $q(G)$ и $N(G)$ таких, чтобы уравнения (3) и (12) решались в замкнутом виде. Тем самым будем иметь решение (16) волнового уравнения (15). Связь между координатой z и параметром G получается путем исключения y из формул (10) и (13):

$$\Psi_2/\Psi_1=m(m+4)^{-1}[2(m+2)/m^2A]^{-2/m}(z/h+K)^{(m+4)/m}. \tag{17}$$

Далее целесообразно ввести для упрощения формул новые обозначения и новую функцию. Пусть

$$m^{-1}(m+4)=g \tag{18}$$

и

$$m(m+4)^{-1}[2(m+2)/m^2A]^{-2/m}=e^M. \tag{19}$$

Кроме того, поскольку в уравнения (12) и (15) и в формулу (16) Ψ_1 и Ψ_2 входят только в виде произведения $\Psi_1\Psi_2$, введем его как новую функцию Φ:

$$\Psi_1\Psi_2=\Phi. \tag{20}$$

Через эту функцию выражается и $q(G)$. В самом деле, так как

$$\Psi_2=\Psi_1\int\Psi_1^{-2}dG, \tag{21}$$

то

$$\Phi=\Psi_1^2\int\Psi_1^{-2}dG. \tag{22}$$

Беря производную по G, находим

$$\Psi_1'/\Psi_1=(\Phi'-1)/2\Phi. \tag{23}$$

Интегрируя, находим

$$\Psi_1=\Phi^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\Phi^{-1}dG\right). \tag{24}$$

Следовательно, согласно формуле (20),

$$\Psi_2=\Phi^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}\int\Phi^{-1}dG\right). \tag{25}$$

Но $q(G) = -\Psi''/\Psi$. Вычисляя из формулы (24) или (25) вторую производную от Ψ_1 или Ψ_2, находим

$$q(G)=(4\Phi^2)^{-1}(\Phi'^2-2\Phi\Phi''-1). \tag{26}$$

С учетом полученного выражения, а также обозначений (18) и (19), перепишем уравнения (12) и (15) в виде

$$d^2\Theta/dG^2+[k^2h^2N^2(G)+(4\Phi^2)^{-1}(\Phi'^2-2\Phi\Phi''-g^{-2})]\Theta=0 \tag{27}$$

и

$$d^2U/dz^2+k^2g^2N^2(G)\Phi^2(G)(z/h+K)^{-2}U=0. \tag{28}$$

Решение последнего уравнения принимает, согласно формуле (16), вид

$$U=(z/h+K)^{1/2}\Phi^{-1/2}\Theta, \tag{29}$$

а вместо формулы (17), в силу соотношений (24) и (25), получаем

$$\int\Phi^{-1}dG=M+g\ln(z/h+K). \tag{30}$$

Наконец, сделаем еще нижеследующее обобщение. Оно применимо к любому одномерному волновому уравнению вида

$$d^2U/dz^2+k^2n^2(z/h)U=0. \tag{31}$$

Легко убедиться непосредственной проверкой, что подстановка

$$z/h=\frac{a\zeta/h+b}{c\zeta/h+d},$$

$$U=(c\zeta/h+d)^{-1}V, \tag{32}$$

где a, b, c, d — постоянные, удовлетворяющие соотношению

$$ad-bc=1, \tag{33}$$

преобразует уравнение (31) к виду

$$d^2V/d\zeta^2+k^2(c\zeta/h+d)^{-4}n^2\left(\frac{a\zeta/h+b}{c\zeta/h+d}\right)V=0. \tag{34}$$

Применим это преобразование к уравнению (28). Заметив, что

$$z/h+K=\frac{(a+Kc)\zeta/h+(b+Kd)}{c\zeta/h+d}$$

и переобозначив $a+Kc\to a$, $b+Kd\to b$, так что условие (33) остается в силе, вернемся к прежним обозначениям переменных (т. е. $\zeta\to z$ и $V\to U$). Тогда получим более общее по сравнению с (28) волновое уравнение

$$d^2U/dz^2+k^2g^2N^2(G)\Phi^2(G)(az/h+b)^{-2}(cz/h+d)^{-2}U=0, \tag{35}$$

решение которого получается из (29) в виде

$$U=(az/h+b)^{1/2}(cz/h+d)^{1/2}\Phi^{-1/2}\Theta. \tag{36}$$

Уравнение (27) остается неизменным, а формула (30) переходит в

$$\int\Phi^{-1}dG=M+g\ln\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right). \tag{37}$$

Вдобавок к формулам (27), (35)—(37) можно написать их параллельный вариант, получаемый заменой

$$\begin{aligned} a &\to (1/2)[a+c+i(a-c)], \\ b &\to (1/2)[b+d+i(b-d)], \\ c &\to (1/2)[-(a-c)-i(a+c)], \\ d &\to (1/2)[-(b-d)-i(b+d)], \end{aligned} \tag{38}$$

причем условие (33) остается в силе, и

$$g \to -ig. \tag{39}$$

Тогда указанные формулы переходят в следующие:

$$d^2\Theta/dG^2+[k^2h^2N^2(G)+(4\Phi^2)^{-1}(\Phi'^2-2\Phi\Phi''+g^{-2})]\Theta=0, \tag{40}$$

$$d^2U/dz^2+4k^2g^2N^2(G)\Phi^2(G)[(a^2+c^2)z^2/h^2+$$

$$+2(ab+cd)z/h+(b^2+d^2)]^{-2}U=0, \tag{41}$$

$$U=[(a^2+c^2)z^2/h^2+2(ab+cd)z/h+(b^2+d^2)]^{1/2}\Phi^{-1/2}\Theta \tag{42}$$

и

$$\int \Phi^{-1}dG=M+2g\arctan\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right). \tag{43}$$

Формулы (27), (35)—(37) или (40)—(43) являются основными. Подходящему выбору подлежат функции $N(G)$ и $\Phi(G)$; именно, выбор должен гарантировать разрешимость уравнения (27) или (40) в замкнутом виде. Уравнение (3) более не участвует в процедуре. Его решения могут быть найдены по формулам (24) и (25) (при функции $q(G)$, задаваемой формулой (26)); однако эти решения для реализации метода не нужны.

Во многих случаях выбор функций $\Phi(G)$ и $N(G)$ приводит к уже известным волновым уравнениям, но в некоторых случаях находим новые результаты. Приведем несколько примеров.

Примеры

1. Пусть

$$\Phi(G)=\operatorname{sh}2AG/2A, \tag{44}$$

где A — постоянная. Принимая в основу формулы (27) и (35)—(37), находим прежде всего из (37)

$$\operatorname{th}AG=B\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^g, \tag{45}$$

где B заменяет e^M. Уравнение для Θ получается в виде

$$d^2\Theta/dG^2+[k^2h^2N^2(G)-A^2+A^2(1-g^{-2})\operatorname{sh}^{-2}2AG]\Theta=0. \tag{46}$$

Чтобы это уравнение решалось в замкнутом виде, положим $N(G)$ постоянной

$$N(G)\equiv N_0A=\text{const} \tag{47}$$

и сделаем

$$g=\pm(2r+1)^{-1}, \qquad r \text{ целое}. \tag{48}$$

Тогда

$$d^2\Theta/dG^2+A^2[k^2h^2N_0^2-1-4r(r+1)\,\mathrm{sh}^{-2}2AG]\Theta=0. \tag{49}$$

В простейшем случае $r=0$, но этот случай не представляет интереса, так как приводит к уже известному волновому уравнению. Если же $r=1$, то линейно независимые решения уравнения (49) пишутся в виде

$$\Theta_{\pm}^{(1)}=\exp\left(\pm iAG\,(k^2h^2N_0^2-1)^{1/2}\right)[1\pm 2i\,(k^2h^2N_0^2-1)^{-1/2}\,\mathrm{cth}\,2AG] \tag{50}$$

(см. [2], с. 526). Решения при $r>1$ могут быть найдены из рекуррентной формулы

$$\Theta^{(r+1)}=-d\Theta^{(r)}/dG+2A\,(r+1)\,\mathrm{cth}\,2AG\cdot\Theta^{(r)}. \tag{51}$$

Волновое уравнение (35), по исключении G с помощью формулы (45), получается в виде:

$$d^2U/dz^2+\frac{k^2N_0^2B^2}{(2r+1)^2}\cdot\frac{(az/h+b)^{\pm\frac{2}{2r+1}-2}(cz/h+d)^{\mp\frac{2}{2r+1}-2}U}{\left[1-B^2\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{\pm\frac{2}{2r+1}}\right]^2}=0. \tag{52}$$

Легко видеть, что два уравнения, соответствующие двум знакам в экспоненте, сводятся одно к другому. В самом деле, если в уравнении с нижним знаком умножим числитель и знаменатель на $\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{\frac{4}{2r+1}}$ и заменим $B\to B^{-1}$, то получим уравнение с верхним знаком. Поэтому ограничимся одним (верхним) знаком и напишем

$$d^2U/dz^2+\frac{k^2N_0^2B^2}{(2r+1)^2}\cdot\frac{(az/h+b)^{-\frac{4r}{2r+1}}(cz/h+d)^{-\frac{4(r+1)}{2r+1}}U}{\left[1-B^2\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{\frac{2}{2r+1}}\right]^2}=0. \tag{53}$$

Решение этого уравнения, согласно формулам (36), (44) и (45), есть

$$U=(az/h+b)^{\frac{r}{2r+1}}(cz/h+d)^{\frac{r+1}{2r+1}}\left[1-B^2\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{\frac{2}{2r+1}}\right]^{1/2}\Theta^{(r)}. \tag{54}$$

В случае $r=1$ уравнение (53) принимает вид

$$d^2U/dz^2+\frac{k^2N_0^2B^2}{9}\cdot\frac{(az/h+b)^{-4/3}(cz/h+d)^{-8/3}U}{\left[1-B^2\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{2/3}\right]^2}=0, \tag{55}$$

а его решение, в силу формул (45), (48), (50) и (54), есть

$$U(z)=(az/h+b)^{1/3}(cz/h+d)^{2/3}\left[1-B^2\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{2/3}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\exp\left\{\pm(i/2)\,(k^2h^2N_0^2-1)^{1/2}\ln\frac{1+B\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{1/3}}{1-B\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{1/3}}\right\}\times$$

$$\times\left\{1\pm i(k^2h^2N_0^2-1)^{-1/2}\left[B\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{1/3}+B^{-1}\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{-1/3}\right]\right\}. \quad (56)$$

2. Второй пример аналогичен предыдущему:

$$\Phi(G)=\sin 2AG/2A. \quad (57)$$

Тогда

$$\tan AG=B\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^g \quad (58)$$

и

$$d^2\theta/dG^2+[k^2h^2N^2+A^2+A^2(1-g^{-2})\sin^{-2}2AG]\theta=0. \quad (59)$$

Полагая, как и в первом примере, $N(G)$ равным $N_0A=\text{const}$ и g равным $\pm(2r+1)^{-1}$ (см. формулы (47) и (48)), находим

$$d^2\theta/dG^2+A^2[k^2h^2N_0^2+1-4r(r+1)\sin^{-2}2AG]\theta=0. \quad (60)$$

При $r=1$ линейно независимые решения этого уравнения суть

$$\theta_\pm^{(1)}=\exp(\pm iAG(k^2h^2N_0^2+1)^{1/2})[1\pm 2i(k^2h^2N_0^2+1)^{-1/2}\operatorname{ctg}2AG], \quad (61)$$

тогда как при $r>1$ решения находятся из рекуррентной формулы

$$\theta^{(r+1)}=-d\theta^{(r)}/dG+2A(r+1)\operatorname{ctg}2AG\cdot\theta^{(r)}. \quad (62)$$

Волновое уравнение, в котором можем принять g равным только $(2r+1)^{-1}$, находим в виде

$$d^2U/dz^2+\frac{k^2N_0^2B^2}{(2r+1)^2}\cdot\frac{(az/h+b)^{-\frac{4r}{2r+1}}(cz/h+d)^{-\frac{4(r+1)}{2r+1}}U}{\left[1+B^2\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{\frac{2}{2r+1}}\right]^2}=0, \quad (63)$$

а решение его есть

$$U=(az/h+b)^{\frac{r}{2r+1}}(cz/h+d)^{\frac{r+1}{2r+1}}\left[1+B^2\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{\frac{2}{2r+1}}\right]^{1/2}\theta^{(r)}. \quad (64)$$

В случае $r=1$ уравнение (63) будет

$$d^2U/dz^2+\frac{k^2N_0^2B^2}{9}\cdot\frac{(az/h+b)^{-4/3}(cz/h+d)^{-8/3}U}{\left[1+B^2\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{2/3}\right]^2}=0, \quad (65)$$

а его решение запишется в виде

$$U(z)=(az/h+b)^{1/3}(cz/h+d)^{2/3}\left[1+B^2\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{2/3}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\exp\left\{\pm i(k^2h^2N_0^2+1)^{1/2}\arctan\left[B\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{1/3}\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{1\pm i(k^2h^2N_0^2+1)^{1/2}\left[B^{-1}\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{-1/3}-B\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)^{1/3}\right]\right\}. \quad (66)$$

3. В третьем примере положим

$$\Phi(G)=G^4-A^2G^2 \quad (67)$$

и

$$g=1/2A^3. \tag{68}$$

Тогда, согласно формуле (27),

$$d^2\theta/dG^2+[k^2h^2N^2(G)-A^2G^{-4}-2G^{-2}]\theta=0. \tag{69}$$

Выберем

$$N^2(G)=B^2G^{-4}+C^2G^{-2}. \tag{70}$$

Тогда

$$d^2\theta/dG^2+[(k^2h^2B^2-A^2)G^{-4}+(k^2h^2C^2-2)G^{-2}]\theta=0. \tag{71}$$

Решение этого уравнения есть

$$\theta(G)=G^{1/2}Z_{(9/4-k^2h^2C^2)^{1/2}}(G^{-1}(k^2h^2B^2-A^2)^{1/2}), \tag{72}$$

где Z — функция Бесселя. Из формулы (37) находим

$$\frac{az/h+b}{cz/h+d}=P(G+A)^{-1}(G-A)\exp(2A/G), \tag{73}$$

где P — постоянная, равная e^{-2MA^3}. Параметр G не поддается исключению. Волновое уравнение (35) получается в виде

$$d^2U/dz^2+(k^2/4A^6)(B^2+C^2G^2)(G^2-A^2)^2(az/h+b)^{-2}(cz/h+d)^{-2}U=0, \tag{74}$$

а решение его, согласно формулам (36), (67) и (72), есть

$$U=(az/h+b)^{1/2}(cz/h+d)^{1/2}G^{-1/2}(G^2-A^2)^{-1/2}\times$$
$$\times Z_{(9/4-k^2h^2C^2)^{1/2}}(G^{-1}(k^2h^2B^2-A^2)^{1/2}). \tag{75}$$

Отметим, что в частном случае $C=0$ решение выражается в элементарных функциях. Именно, уравнение

$$d^2U/dz^2+(k^2/4A^6)B^2(G^2-A^2)^2(az/h+b)^{-2}(cz/h+d)^{-2}U=0 \tag{76}$$

имеет решения

$$U_\pm=(az/h+b)^{1/2}(cz/h+d)^{1/2}(G^2-A^2)^{-1/2}\times$$
$$\times[1\pm iG(k^2h^2B^2-A^2)^{-1/2}]\exp(\pm iG^{-1}(k^2h^2B^2-A^2)^{1/2}), \tag{77}$$

причем соотношение (73) остается неизменным.

4. Четвертый пример аналогичен предыдущему, только вместо (67) берется

$$\Phi(G)=-G^4-A^2G^2 \tag{78}$$

и используются формулы (40)—(43). Для g берем то же значение $1/2A^3$, что и раньше (см. формулу (68)). Функцию $N(G)$ тоже выбираем в прежнем виде (см. формулу (70)). Тогда для θ получается уравнение

$$d^2\theta/dG^2+[(k^2h^2B^2+A^2)G^{-4}+(k^2h^2C^2-2)G^{-2}]\theta=0, \tag{79}$$

решение которого есть

$$\theta(G)=G^{1/2}Z_{(9/4-k^2h^2C^2)^{1/2}}(G^{-1}(k^2h^2B^2+A^2)^{1/2}). \tag{80}$$

Формула (43) дает

$$\frac{az/h+b}{cz/h+d}=\tan(\arctan(G/A)+A/G-P), \tag{81}$$

где P — произвольная постоянная, равная MA^3. Волновое уравнение (41) получается в виде

$$d^2U/dz^2+k^2A^{-6}(B^2+C^2G^2)(G^2+A^2)^2\times$$
$$\times[(a^2+c^2)z^2/h^2+2(ab+cd)z/h+(b^2+d^2)]^{-2}U=0, \tag{82}$$

а решение его, согласно формулам (42), (78) и (80), есть

$$U=[(a^2+c^2)z^2/h^2+2(ab+cd)z/h+(b^2+d^2)]^{1/2}\times$$
$$\times G^{-1/2}(G^2+A^2)^{-1/2}Z_{(9/4-k^2h^2C^2)^{1/2}}(G^{-1}(k^2h^2B^2+A^2)^{1/2}). \tag{83}$$

В частном случае $C=0$ получаем уравнение

$$d^2U/dz^2+k^2A^{-6}B^2(G^2+A^2)^2[(a^2+c^2)z^2/h^2+2(ab+cd)z/h+(b^2+d^2)]^{-2}U=0, \tag{84}$$

имеющее решения

$$U_\pm=[(a^2+c^2)z^2/h^2+2(ab+cd)z/h+(b^2+d^2)]^{1/2}\times$$
$$\times(G^2+A^2)^{-1/2}[1\pm iG(k^2h^2B^2+A^2)^{-1/2}]\exp(\pm iG^{-1}(k^2h^2B^2+A^2)^{1/2}). \tag{85}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кард П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **30**, № 2, 93—101 (1981).
2. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Изд. 2-е, М., Физматгиз, 1961.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 20/XI 1981

P. KARD

ÜHEMÕÕTMELISTE LAINEVÕRRANDITE LAHENDAMISEST

Kui funktsioonid $N(G)$ ja $\Phi(G)$ ja konstant g on valitud nii, et võrrandi (27) või (40) lahend on tuntud, siis on tuntud ka ühemõõtmelise lainevõrrandi (35) või (41) lahend. Ta avaldub valemiga (36) või (42), kusjuures valem (37) või (43) määrab seose koordinaadi z ja parameetri G vahel (k on lainearv, h pikkuse dimensiooniga konstant, M, a, b, c, d — dimensioonitud konstandid; viimased neli on seotud valemiga (33)). Näited: 1. Võrrandil (53), kus r on mittenegatiivne täisarv, on lahend (54), kusjuures $\theta^{(r)}$ allub rekurrentsele valemile (51). Erijuhul $r=1$ on võrrand kujuga (55) ja ta lahend on (56). 2. Võrrandil (63), kus r on samuti mittenegatiivne täisarv, on lahend (64), kusjuures $\theta^{(r)}$ allub rekurrentsele valemile (62). Erijuhul $r=1$ on võrrand kujuga (65) ja ta lahend on (66). 3. Võrrandi (74) lahend on (75), kusjuures seose z ja G vahel annab valem (73). Erijuhul $C=0$ on võrrand kujuga (76) ja ta lahend on (77). 4. Võrrandi (82) lahend on (83), kusjuures seose z ja G vahel annab valem (81). Erijuhul $C=0$ on võrrand kujuga (84) ja ta lahend on (85).

P. KARD

ON THE SOLUTION OF THE ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATIONS

If the functions $N(G)$ and $\Phi(G)$ and the constant g are chosen so that equation (27) or (40) has a known solution, then is also known the solution of the one-dimensional wave equation (35) or (41). The solution has the form (36) or (42), G being a parameter connected with the co-ordinate z via the formula (37) or (43) (k is the wave number, h a constant with the dimension of length, and M, a, b, c, d are dimensionless constants, last four satisfying the condition (33)). As examples, four equations with their solutions are established as follows: 1. The equation (53) where r is a non-negative integer has the solution (54), $\theta^{(r)}$ satisfying the recursive formula (51). Particularly, when $r=1$, the equation is of the form (55) and its solution is done by (56). — 2. The equation (63), where r is also a non-negative integer, has the solution (64), $\theta^{(r)}$ satisfying the recursive formula (62). Particularly, when $r=1$, the equation is of the form (65) and its solution is done by (66). — 3. The equation (74) has the solution (75), the parameter G being connected with the co-ordinate z via the formula (73). Particularly, when $C=0$, the equation is of the form (76) and its solution is done by (77). — 4. The equation (82) has the solution (83), the parameter G being connected with the co-ordinate z via the formula (81). Particularly, when $C=0$, the equation is of the form (84) and its solution is done by (85).