EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 30. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1981, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 30
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1981, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1981.3.08

УДК 551.521.3 : 551.510.42 : 517.948 : 518.12

Ю. КНЯЗИХИН

О ВЛИЯНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ НА РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ АТМОСФЕРНОЙ ОПТИКИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОГЛОЩАЮЩИХ КОМПОНЕНТ АТМОСФЕРЫ

(Представил Г. Кузмин)

В настоящей работе исследуется оценка погрешности, вызванной упрощением расчета многократно рассеянной солнечной радиации при решении обратной задачи по определению поглощающих компонент атмосферы. Обратная задача определения распределения концентрации водяного пара для сферической модели атмосферы решается с учетом и без учета многократно рассеянного излучения. Проводится сравнение вариантов решения.

1. Модель атмосферы. Постановка задачи

Рассмотрим следующую модель атмосферы. На сферическую поверхность падает параллельный поток солнечного излучения. Атмосфера разбита на n слоев, в каждом из которых концентрация η_i поглощающей компоненты атмосферы взята постоянной $(i=1, 2, \ldots, n)$. В точке S вне атмосферы находится спутник, измеряющий интенсивность солнечного излучения, рассеянного атмосферой и приходящего в точку S по l различным направлениям. Значение интенсивности в направлении с номером k, которое соответствует параметру поглощения $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, обозначим через $J_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ и будем рассматривать как функцию параметра η.

Пусть нам известны значения I_k интенсивностей солнечного излучения, приходящего в точку S по направлению с номером k. Рассмотрим обратную задачу определения параметра η по известным значениям I_k интенсивностей [1], т. е. рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$J_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = I_k, \quad k=1, 2, \ldots, l,$$

или в векторной форме

$$J(\eta) = I. \tag{1}$$

Представим вектор-функцию $J(\eta)$ в виде

$$J(\eta) = h(\eta) + g(\eta), \tag{2}$$

где $h(\eta)$ — вектор значений интенсивностей однократно рассеянного и приходящего в точку S солнечного излучения, а $g(\eta)$ — вектор, учитывающий все остальное излучение

$$g(\eta)=J(\eta)-h(\eta).$$

При решении задачи (1) нам нужно располагать значениями вектор-функции $J(\eta)$ в некоторых точках $\eta\in R^n$. Наибольшие затруднения [2, 3] вызывает расчет функции $g(\eta)$ в выражении (2). Поэтому в целях некоторого упрощения методики расчета ее заменяют некоторой функцией $\tilde{g}(\eta)$. В частности, если нам известно, что значение $g(\eta)$ интенсивности многократно рассеянного и приходящего в точку S солнечного излучения мало по сравнению с $h(\eta)$, то можно положить $\tilde{g}(\eta)=0$.

Запишем уравнение (1) в виде

$$h(\eta)-u(\eta)=0, \tag{3}$$

где $u(\eta)=I-\tilde{g}(\eta)$. Вместо уравнения (3) рассмотрим уравнение

$$h(\eta)-\tilde{u}(\eta)=0, \tag{4}$$

где $\tilde{u}(\eta)=I-\tilde{g}(\eta)$.

В настоящей работе изучается «отклонение» решения $\tilde{\eta}$ задачи (4) от истинного решения (3). Численно сравнивается решение задачи (3), где η есть распределение концентрации водяного пара, и решение задачи (4), где $\tilde{g}(\eta)=0$. Расчеты проведены для модели атмосферы [4].

2. Математическая постановка задачи

Пусть на множестве

$$[a^0, b^0]=\{x\in R^n;\ \overset{0}{a}_j\leqslant x_j\leqslant \overset{0}{b}_j,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$$

заданы непрерывные функции

$$h,\ g,\ \tilde{g}: R^n\to R^l.$$

Введем частичную упорядоченность на $[a^0, b^0]$ при помощи отношения [5]

$$x\leqslant y\Leftrightarrow y-x\in K=\{z\in R^n;\ z_j\geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}.$$

Предположим, что функции $h, g, \tilde{g}$ монотонно убывают, т. е. для любых $v, u\in R^n$ таких, что $v\leqslant u$, следует

$$h(u)\leqslant h(v),\quad g(u)\leqslant g(v),\quad \tilde{g}(u)\leqslant\tilde{g}(v).$$

Для каждого вектора $v\in R^n$ с координатами v_j определим вектор $|v|$ с координатами $|v_j|$. Предположим, что для любого $\eta\in[a^0, b^0]$ имеет место неравенство

$$|g(\eta)-\tilde{g}(\eta)|\leqslant\varepsilon, \tag{5}$$

где ε — вектор, характеризующий погрешность $\tilde{g}(\eta)$.

Рассмотрим уравнения

$$z(\eta)\equiv h(\eta)-u(\eta)=0, \tag{6}$$

$$\tilde{z}(\eta)\equiv h(\eta)-\tilde{u}(\eta)=0, \tag{7}$$

где $u(\eta)=I-g(\eta)$, а $\tilde{u}(\eta)=I-\tilde{g}(\eta)$. Заметим, что в уравнениях

(6) и (7) функции $u(\eta)$ и $\tilde{u}(\eta)$ монотонно возрастают (т. е. функции $-u(\eta)$ и $-\tilde{u}(\eta)$ монотонно убывают).

Предположим, что уравнения (6) и (7) имеют решения, принадлежащие множеству $[a^0, b^0]$. Обозначим эти решения через η^* и $\tilde{\eta}$ соответственно и исследуем величину $\Delta = |\eta^* - \tilde{\eta}|$.

3. Сходимость приближенных решений

Теорема 1. *Пусть задача* (6) *имеет единственное решение* $\eta^* \in [a^0, b^0]$. *Тогда, если существует решение* η_ε *задачи* (7) *такое, что*

$$\eta_\varepsilon \in [a^0, b^0] \ \forall \ \|\varepsilon\|_1 \leqslant \varepsilon_0,$$

имеет место сходимость

$$\|\eta_\varepsilon - \tilde{\eta}\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad \|\varepsilon\|_1 \to 0,$$

где ε_0 *— некоторое число, а* $\|\cdot\|_1$ *и* $\|\cdot\|_2$ *— некоторые нормы* R^l *и* R^n *соответственно.*

Доказательство. Из соотношения

$$|h(\eta_\varepsilon) - u(\eta_\varepsilon)| = |\tilde{u}(\eta_\varepsilon) - u(\eta_\varepsilon)| \leqslant \varepsilon$$

следует неравенство

$$\|h(\eta_\varepsilon) - u(\eta_\varepsilon)\|_1 \leqslant \|\varepsilon\|_1. \tag{8}$$

Для всех ε таких, что $\|\varepsilon\| \leqslant \varepsilon_0$, множество решений η_ε уравнения (7) компактно. Пусть η_{ε_n} — некоторая сходящаяся подпоследовательность. Тогда, учитывая (8), получим, что $\eta_{\varepsilon_n} \to \eta^*$. Отсюда, ввиду единственности решения уравнения (8), вытекает, что компактное множество решений η_ε уравнения (7) при $\|\varepsilon\| \leqslant \varepsilon_0$ имеет единственную предельную точку η^*. Следовательно,

$$\|\eta_\varepsilon - \eta^*\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad \|\varepsilon\|_1 \to 0.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим множество

$$S(\tilde{\eta}) = \{x \in [a^0, b^0];\ |h(x) - \tilde{u}(\tilde{\eta})| \leqslant \delta(\varepsilon)\},$$

где

$$\delta(\varepsilon) = |\tilde{u}(\tilde{\eta}) - u(\eta^*)|.$$

Из равенства

$$|h(\eta^*) - \tilde{u}(\tilde{\eta})| = |\tilde{u}(\tilde{\eta}) - u(\eta^*)| = \delta(\varepsilon)$$

следует, что решение η^* задачи (6) принадлежит множеству $S(\tilde{\eta})$.

4. Оценка множества $S(\tilde{\eta})$

Приведем алгоритм оценки множества $S(\tilde{\eta})$ для случая $l = n$.

Рассмотрим последовательности векторов $(a^p)_{p \in N}$ и $(b^p)_{p \in N}$, координаты которых $a_j{}^p$ и $b_j{}^p$ удовлетворяют уравнениям

$$h_j(b_1^p, \ldots, b_{j-1}^p, a_j^p, b_{j+1}^{p-1}, \ldots, b_n^{p-1}) = \xi_j,$$
$$h_j(a_1^p, \ldots, a_{j-1}^p, b_j^p, a_{j+1}^{p-1}, \ldots, a_n^{p-1}) = \zeta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

где $h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ означает j-ю координату вектора $h(x)$, а ξ_j и ζ_j есть j-я координата векторов $\tilde{u}(\eta) + \delta(\varepsilon)$ и $\tilde{u}(\eta) - \delta(\varepsilon)$ соответственно.

Обозначим

$$c_j^p(t) = h_j(b_1^p, \ldots, b_{j-1}^p, t, b_{j+1}^{p-1}, \ldots, b_n^{p-1}),$$
$$d_j^p(t) = h_j(a_1^p, \ldots, a_{j-1}^p, t, a_{j+1}^{p-1}, \ldots, a_n^{p-1}).$$

В силу предположения относительно функции $h(x)$ функции $c_j^p(t)$ и $d_j^p(t)$ являются непрерывными и монотонно убывающими на $[a_j^0, b_j^0]$.

Лемма 1. *Пусть существуют первые члены* $a^1, b^1 \in [a^0, b^0]$ *последовательности* (9). *Тогда*

$$S(\tilde{\eta}) \subseteq [a^1, b^1] \subseteq [a^0, b^0]. \tag{10}$$

Доказательство проведем методом математической индукции. Покажем, что

$$\forall\, \alpha \in S(\tilde{\eta}) \Rightarrow \alpha_1 \in [a_1^1, b_1^1] \subseteq [a_1^0, b_1^0].$$

Пусть $\alpha \in S(\tilde{\eta})$. Тогда, по определению $S(\tilde{\eta})$, имеем

$$\zeta_1 \leqslant h_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leqslant h_1(\alpha_1, a_2^0, \ldots, a_n^0) = d_1^1(\alpha_1),$$
$$\xi_1 \geqslant h_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \geqslant h_1(\alpha_1, b_2^0, \ldots, b_n^0) = c_1^1(\alpha_1).$$

Отсюда

$$\alpha_1 \in \{t \in R;\ d_1^1(t) \geqslant \zeta_1,\ c_1^1(t) \leqslant \xi_1\}.$$

Учитывая, что $d_1^1(t) \geqslant c_1^1(t)$ при $t \in [a_1^0, b_1^0]$ и $\zeta_1 \leqslant \xi_1$, получим

$$\{t \in R;\ d_1^1(t) \geqslant \zeta_1,\ c_1^1(t) \leqslant \xi_1\} = [a_1^1, b_1^1],$$

где a_1^1 и b_1^1 удовлетворяют уравнениям

$$d_1^1(b_1^1) = \zeta_1, \quad c_1^1(a_1^1) = \xi_1.$$

Пусть утверждение доказано для $(j-1)$ координат. Тогда

$$\zeta_j \leqslant h_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leqslant h_j(a_1^1, \ldots, a_{j-1}^1, \alpha_j, a_{j+1}^0, \ldots, a_n^0) = d_j^1(\alpha_j),$$
$$\xi_j \geqslant h_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \geqslant h_j(b_1^1, \ldots, b_{j-1}^1, \alpha_j, b_{j+1}^0, \ldots, b_n^0) = c_j^1(\alpha_j).$$

Отсюда

$$\alpha_j \in \{t \in R;\ d_j^1(t) \geqslant \zeta_j,\ c_j^1(t) \leqslant \xi_j\} = [a_j^1, b_j^1],$$

где a_j^1 и b_j^1 удовлетворяют уравнениям

$$d_j^1(t) = \zeta_j, \quad c_j^1(t) = \xi_j.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $c_j{}^p(t) \leqslant d_j{}^p(t)$ *и* $a^{p-1} \leqslant b^{p-1}$. *Тогда неравенства*

$$c_j^p(a_j^{p-1}) \geqslant \xi_j, \quad d_j^p(b_j^{p-1}) \leqslant \zeta_j, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{11}$$

являются необходимыми и достаточными условиями существования решений $a_j^p,\ b_j^p \in [a_j^{p-1},\ b_j^{p-1}]$ *уравнений*

$$c_j^p(t) = \xi_j, \quad d_j^p(t) = \zeta_j, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{12}$$

Доказательство. Ввиду монотонности функций $c_j{}^p(t)$ и $d_j{}^p(t)$ необходимым и достаточным условием существования в $[a_j^{p-1},\ b_j^{p-1}]$ решений уравнения (12) есть

$$c_j^p(a_j^{p-1}) \geqslant \xi_j, \quad c_j^p(b_j^{p-1}) \leqslant \xi_j, \quad d_j^p(a_j^{p-1}) \geqslant \xi_j, \quad d_j^p(b_j^{p-1}) \leqslant \zeta_j. \tag{13}$$

Учитывая, что $c_j{}^p(t) \leqslant d_j{}^p(t)$ и $\zeta_j \leqslant \xi_j$, получим, что неравенства (13) эквивалентны неравенствам (11).

Лемма доказана.

Теорема 2. *Если существуют первые члены* $a^1, b^1 \in [a^0, b^0]$ *в последовательности* (10), *то существуют р-е члены* a^p *и* b^p *в последовательности* (9), *причем*

$$S(\tilde{\eta}) \subseteq [a^p, b^p] \subseteq \ldots \subseteq [a^1, b^1] \subseteq [a^0, b^0].$$

Доказательство проведем методом математической индукции. Для $p=1$ утверждение имеет место в силу леммы 1. Предположим, что утверждение имеет место и для $(p-1)$. Покажем, что тогда $a_j{}^p$ и $b_j{}^p$ существуют и

$$\forall\, \alpha \in S(\tilde{\eta}) \Rightarrow \alpha_j \in [a_j^p, b_j^p] \subseteq [a_j^{p-1}, b_j^{p-1}].$$

Для доказательства последнего утверждения вновь применим метод математической индукции. Пусть $j=1$. Так как $a^0 \leqslant a^1 \leqslant \ldots \leqslant a^{p-1}$ и $b^0 \geqslant b^1 \geqslant \ldots \geqslant b^{p-1}$ (по предположению индукции для $(p-1)$-го шага) и функции $c_j{}^k(t)$ и $d_j{}^k(t)$ убывают, то

$$c_1^1(t) \leqslant c_1^2(t) \leqslant \ldots \leqslant c_1^{p-1}(t) \leqslant c_1^p(t),$$

$$d_1^1(t) \geqslant d_1^2(t) \geqslant \ldots \geqslant d_1^{p-1}(t) \geqslant d_1^p(t).$$

Отсюда

$$\xi_1 = c_1^{p-1}(a_1^{p-1}) \leqslant c_1^p(a_1^{p-1}),$$

$$\zeta_1 = d_1^{p-1}(b_1^{p-1}) \geqslant d_1^p(b_1^{p-1}).$$

Согласно лемме 2, уравнения

$$c_1^p(t) = \xi_1, \quad d_1^p(t) = \zeta_1$$

имеют решения $a_1{}^p,\ b_1{}^p \in [a_1{}^{p-1}, b_1{}^{p-1}]$. Далее, для любого $\alpha \in S(\tilde{\eta}) \subseteq$ $\subseteq [a_1{}^{p-1}, b_1{}^{p-1}]$ верно

$$\zeta_1 \leqslant h_1(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) \leqslant h_1(\alpha_1,\ a_2^{p-1},\ \ldots,\ a_n^{p-1}) = d_1^p(\alpha_1),$$

$$\xi_1 \geqslant h_1(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) \geqslant h_1(\alpha_1,\ b_2^{p-1},\ \ldots,\ b_n^{p-1}) = c_1^p(\alpha_1).$$

Отсюда

$$\alpha_1 \in \{t \in [a_1^{p-1},\ b_1^{p-1}];\ a_1^p(t) \geqslant \zeta_1,\ c_1^p(t) \leqslant \xi_1\} = [a_1^p, b_1^p].$$

Пусть утверждение доказано для $(j-1)$ координат. Тогда

$$c_j^1(t) \leqslant c_j^2(t) \leqslant \ldots \leqslant c_j^p(t),$$

$$d_j^1(t) \geqslant d_j^2(t) \geqslant \ldots \geqslant d_j^p(t),$$

$$\xi_j = c_j^{p-1}(a_j^{p-1}) \leqslant c_j^p(a_j^{p-1}),$$

$$\zeta_j = d_j^{p-1}(b_j^{p-1}) \geqslant d_j^p(b_j^{p-1}),\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Отсюда, по лемме 2, существуют $a_j{}^p$ и $b_j{}^p$, удовлетворяющие уравнениям

$$c_j^p(a_j^p) = \xi_j,\quad d_j^p(b_j^p) = \zeta_j.$$

Для произвольного $x \in S(\tilde{\eta})$ имеем

$$\zeta_j \leqslant h_j(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \leqslant h_j(a_j^p,\ \ldots,\ a_{j-1}^p,\ x_j,\ a_{j+1}^{p-1},\ \ldots,\ a_n^{p-1}) = d_j^p(x_j),$$

$$\xi_j \geqslant h_j(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \geqslant h_j(b_j^p,\ \ldots,\ b_{j-1}^p,\ x_j,\ b_{j+1}^{p-1},\ \ldots,\ b_n^{p-1}) = c_j^p(x_j),$$

откуда

$$x_j \in \{t \in [a_j^{p-1},\ b_j^{p-1}];\ d_j^p(t) \geqslant \zeta_j,\ c_j^p(t) \leqslant \xi_j\} = [a_j^p,\ b_j^p],$$

что и доказывает теорему.

Из теоремы следует, что

$$S(\tilde{\eta}) \subseteq \bigcap_{p=0}^{\infty} [a^p,\ b^p] = [a^*,\ b^*],$$

$$\Delta = |\tilde{\eta} - \eta^*| \leqslant b^* - a^*.$$

5. Численные результаты

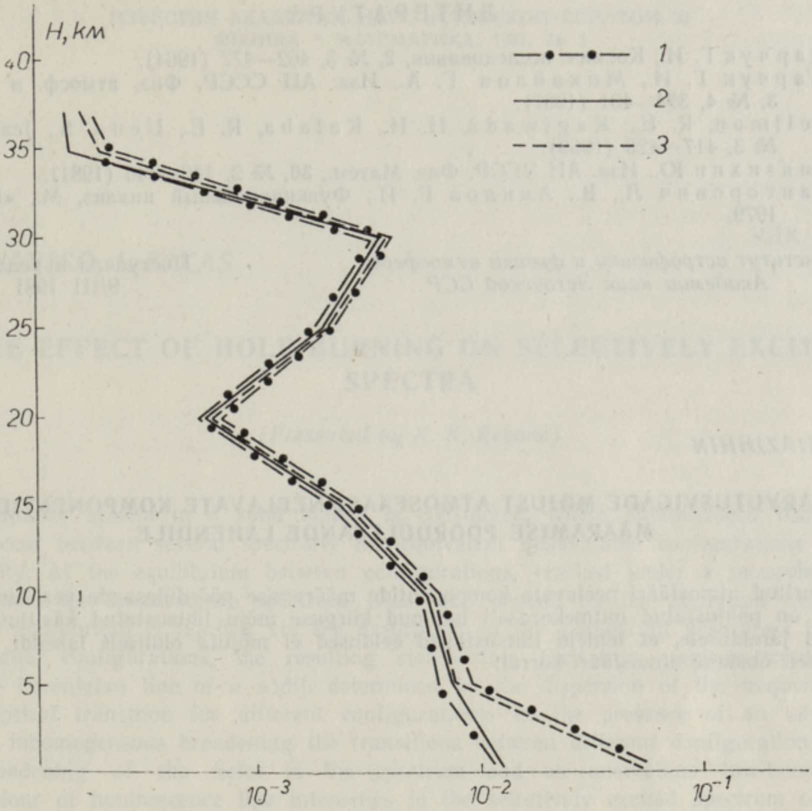
Рассмотрим обратную задачу определения распределения концентрации водяного пара по измеренному из космоса полю яркости атмосферы для модели [4].

В точку S по направлению i поступает однократно рассеянное излучение интенсивностью

$$h_i(\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_n) = c_0 \int_0^{T_i} W(\gamma) \exp(-(\tau + \varrho(\tau)) P(\eta; \tau)\, d\tau,$$

где $c_0 = \pi S$ — солнечная постоянная, T_i — оптическая толщина атмосферы в направлении i, γ — угол между направлением визирования и солнечным лучом, $\varrho(\tau)$ — оптический путь от Солнца до точки, лежащей на линии визирования и находящейся на оптическом расстоянии τ от спутника, $W(\gamma)$ — индикатриса рассеяния, нормированная условием $\int W(\gamma)\, d\omega = 1$, а $P(\eta; \tau)$ — функция пропускания.

Как показали расчеты [4], значение $g(\eta)$ интенсивности многократно рассеянного солнечного излучения в модели атмосферы с небольшими



1 — высотный ход распределения концентрации водяного пара, полученный при решении уравнения (14); *2* — то же при решении уравнения (15); 3 — оценка границ множества $S(\tilde{\eta})$.

оптическими толщинами мало по сравнению со значением $h(\eta)$ интенсивности однократно рассеянного солнечного излучения. Поэтому положим $\tilde{g}(\eta)=0$ и рассмотрим задачу

$$h(\eta)=I. \tag{14}$$

На рисунке показан высотный ход распределения концентрации водяного пара, полученный при решении уравнения (14) и уравнения

$$h(\eta)+g(\eta)=I, \tag{15}$$

а также верхние и нижние границы соответствующего этой задаче множества $S(\tilde{\eta})$, где $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$.

Уравнение (14) решали, используя итерационный процесс (9), где $\xi=\zeta=I$, а уравнение (15) — методом, разработанным в [4]. Как видно из рисунка, при решении рассмотренной обратной задачи для модели атмосферы с малой оптической толщиной многократно рассеянным излучением можно пренебрегать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И., Космич. исследования, **2**, № 3, 462—477 (1964).
2. Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Изв. АН СССР, Физ. атмосф. и океана, **3**, № 4, 394—401 (1967).
3. Bellman, R. E., Kagiwada, H. H., Kalaba, R. E., Ueno, S., Icarus, **11**, № 3, 417—423 (1969).
4. Князихин Ю., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **30**, № 2, 140—146 (1981).
5. Канторович Л., В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, М., «Наука», 1979.

Институт астрофизики и физики атмосферы
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
9/III 1981

J. KNJAZIHHIN

ARVUTUSVIGADE MÕJUST ATMOSFÄÄRI NEELAVATE KOMPONENTIDE MÄÄRAMISE PÖÖRDÜLESANDE LAHENDILE

On uuritud atmosfääri neelavate komponentide määramise pöördülesande vea hinnangut (viga on põhjustatud mitmekordselt hajunud kiirguse mõju lihtsustatud käsitlusest) ja tuldud järeldusele, et tehteid lihtsustavad eeldused ei mõjuta oluliselt lahendi täpsust optiliselt õhukese atmosfääri korral.

J. KNJAZIHHIN

ON THE EFFECT OF CALCULATING ERRORS IN SOLVING THE INVERSE PROBLEM OF ASTROPHYSICS FOR ABSORBING COMPONENTS OF THE ATMOSPHERE

Measurements aboard the orbital station «Salyut-4», in 1975, gave a number of vertical brightness profiles of the atmosphere in the near-infrared region over different geographical areas for different heights of the Sun. The present measurement gives a possibility to solve the inversion problem of these profiles for various components of the atmosphere.

The author has already presented a method for the inversion of water vapour concentration [4]. This paper continues the work. It deals with the estimation of errors made in solving the inversion of the absorbing components of the atmosphere. The errors appear due to inaccuracies in the calculation of multiple scattering. For this purpose a set $S(\tilde{\eta})$ was constructed, including the exact solution. The set was obtained with the help of monotonic sequences (9). The method developed was applied for the estimation of errors made in the inversion of vertical brightness profiles for water vapour concentrations in the transfer model ignoring multiple scattered radiation.