EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 29. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1980, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 29
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1980, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1980.3.16

УДК 535.41 : 517.94

П. КАРД

К ТЕОРИИ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

P. KARD. ÜHEMÕÕTMELISTE LAINEVÕRRANDITE TEOORIAST

P. KARD. ON THE THEORY OF THE ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATIONS

В [1, 2] было найдено несколько форм показателя преломления $n(z)$, при которых одномерное волновое уравнение

$$d^2U/dz^2+k^2n^2U=0, \tag{1}$$

где k — волновое число, решается в бесселевых функциях. Здесь мы приведем еще два уравнения этого рода.

Во-первых, если в формулах (40) и (41) статьи [1] положим

$$p=1, \quad A=0, \quad B=(1+Ck^2h^2)^{1/2}, \quad \nu=(1/4+Sk^2h^2)^{1/2}, \tag{2}$$

где C и S — безразмерные постоянные, то получим

$$G(z)=(1+Ck^2h^2)^{1/2}\arctan\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right), \qquad ad-bc=1 \tag{3}$$

и

$$g^2(z)=k^2[(a^2+c^2)z^2/h^2+2(ab+cd)z/h+(b^2+d^2)]^{-2}\times$$
$$\times\left\{C-S\arctan^{-2}\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)\right\}. \tag{4}$$

Во-вторых, если в формулах (50) и (51) той же статьи положим

$$p=1, \quad A=0, \quad B=(Ck^2h^2-1/4)^{1/2}, \quad \nu=(1/4+Sk^2h^2)^{1/2}, \tag{5}$$

то получим

$$G(z)=(Ck^2h^2-1/4)^{1/2}\ln\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right), \qquad ad-bc=1 \tag{6}$$

и

$$g^2(z)=k^2(az/h+b)^{-2}(cz/h+d)^{-2}\left\{C-S\ln^{-2}\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)\right\}. \tag{7}$$

Согласно формулам (3) и (10) той же статьи [1], имеем в этих двух случаях следующие волновые уравнения с их решениями

$$d^2U/dz^2+k^2[(a^2+c^2)z^2/h^2+2(ab+cd)z/h+(b^2+d^2)]^{-2}\times$$
$$\times\left\{C-S\arctan^{-2}\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)\right\}U=0, \tag{8}$$

$$U(z)=[(a^2+c^2)z^2/h^2+2(ab+cd)z/h+(b^2+d^2)]^{1/2}\times$$
$$\times\arctan^{1/2}\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)Z_{(1/4+Sk^2h^2)^{1/2}}\left((1+Ck^2h^2)^{1/2}\arctan\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)\right)\quad(9)$$

и

$$d^2U/dz^2+k^2(az/h+b)^{-2}(cz/h+d)^{-2}\left\{C-S\ln^{-2}\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)\right\}U=0,\quad(10)$$

$$U(z)=(az/h+b)^{1/2}(cz/h+d)^{1/2}\ln^{1/2}\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)\times$$
$$\times Z_{(1/4+Sk^2h^2)^{1/2}}\left((Ck^2h^2-1/4)^{1/2}\ln\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)\right).\quad(11)$$

Отметим, что мы могли бы вместо $A=0$ положить в обоих случаях $A=-KB$, где K — новая безразмерная постоянная. Тогда получились бы сходные формулы, с заменой только везде

$\arctan\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)$ и $\ln\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)$ на $\arctan\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)-K$ и $\ln\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)-K$. Достигнутая этим, казалось бы, бóльшая общность является, однако, иллюзорной. В самом деле, пусть

$$\arctan\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)-K=\arctan\left(\frac{a_1z/h+b_1}{c_1z/h+d_1}\right);\quad(12)$$

тогда

$$a_1=a\cos K-c\sin K,\qquad c_1=c\cos K+a\sin K,$$
$$b_1=b\cos K-d\sin K,\qquad d_1=d\cos K+b\sin K,\quad(13)$$

причем

$$a_1d_1-b_1c_1=1\quad(14)$$

и

$$a_1^2+c_1^2=a^2+c^2,$$
$$a_1b_1+c_1d_1=ab+cd,\quad(15)$$
$$b_1^2+d_1^2=b^2+d^2.$$

Опустив индекс 1, мы придем к прежним формулам (8) и (9), где $K=0$. Положив, равным образом, во втором случае

$$\ln\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right)-K=\ln\left(\frac{a_1z/h+b_1}{c_1z/h+d_1}\right),\quad(16)$$

имеем

$$a_1=a\exp(-K/2),\qquad c_1=c\exp(K/2),$$
$$b_1=b\exp(-K/2),\qquad d_1=d\exp(K/2),\quad(17)$$

причем

$$a_1c_1=ac,$$
$$a_1d_1+b_1c_1=ad+bc,\quad(18)$$
$$b_1d_1=bd,$$

и формула (14) тоже выполняется. Следовательно, и в этом случае получаются прежние формулы (10) и (11), где $K=0$.

В заключение отметим, что уравнение (8) является обобщением уравнения (47) в [2]. Если примем в последнем, согласно вышесказанному, $K=0$, то оно получается как частная форма уравнения (8) при $C=0$ и $S=-q^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кард П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **29**, № 1, 1—7 (1980).
2. Кард П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **29**, № 2, 113—119 (1980).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 7/IV 1980