

П. КАРД

## К ТЕОРИИ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

P. KARD. ÜHEMÕÕTMELISTE LAINEVORRANDITE TEOORIAST

P. KARD. ON THE THEORY OF THE ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATIONS

В [1, 2] было найдено несколько форм показателя преломления  $n(z)$ , при которых одномерное волновое уравнение

$$d^2U/dz^2 + k^2 n^2 U = 0, \quad (1)$$

где  $k$  — волновое число, решается в бесселевых функциях. Здесь мы приведем еще два уравнения этого рода.

Во-первых, если в формулах (40) и (41) статьи [1] положим

$$p=1, \quad A=0, \quad B=(1+Ck^2h^2)^{1/2}, \quad v=(1/4+Sk^2h^2)^{1/2}, \quad (2)$$

где  $C$  и  $S$  — безразмерные постоянные, то получим

$$G(z) = (1+Ck^2h^2)^{1/2} \arctan\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right), \quad ad-bc=1 \quad (3)$$

и

$$g^2(z) = k^2[(a^2+c^2)z^2/h^2 + 2(ab+cd)z/h + (b^2+d^2)]^{-2} \times \\ \times \left\{ C - S \arctan^{-2}\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right) \right\}. \quad (4)$$

Во-вторых, если в формулах (50) и (51) той же статьи положим

$$p=1, \quad A=0, \quad B=(Ck^2h^2-1/4)^{1/2}, \quad v=(1/4+Sk^2h^2)^{1/2}, \quad (5)$$

то получим

$$G(z) = (Ck^2h^2-1/4)^{1/2} \ln\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right), \quad ad-bc=1 \quad (6)$$

и

$$g^2(z) = k^2(az/h+b)^{-2}(cz/h+d)^{-2} \left\{ C - S \ln^{-2}\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right) \right\}. \quad (7)$$

Согласно формулам (3) и (10) той же статьи [1], имеем в этих двух случаях следующие волновые уравнения с их решениями

$$d^2U/dz^2 + k^2[(a^2+c^2)z^2/h^2 + 2(ab+cd)z/h + (b^2+d^2)]^{-2} \times \\ \times \left\{ C - S \arctan^{-2}\left(\frac{az/h+b}{cz/h+d}\right) \right\} U = 0, \quad (8)$$

$$U(z) = [(a^2 + c^2)z^2/h^2 + 2(ab + cd)z/h + (b^2 + d^2)]^{1/2} \times \\ \times \arctan^{1/2} \left( \frac{az/h + b}{cz/h + d} \right) Z_{(1/4 + Sh^2h^2)^{1/2}} \left( (1 + Ck^2h^2)^{1/2} \arctan \left( \frac{az/h + b}{cz/h + d} \right) \right) \quad (9)$$

и

$$d^2U/dz^2 + k^2(az/h + b)^{-2}(cz/h + d)^{-2} \left\{ C - S \ln^{-2} \left( \frac{az/h + b}{cz/h + d} \right) \right\} U = 0, \quad (10)$$

$$U(z) = (az/h + b)^{1/2}(cz/h + d)^{1/2} \ln^{1/2} \left( \frac{az/h + b}{cz/h + d} \right) \times \\ \times Z_{(1/4 + Sh^2h^2)^{1/2}} \left( (Ck^2h^2 - 1/4)^{1/2} \ln \left( \frac{az/h + b}{cz/h + d} \right) \right). \quad (11)$$

Отметим, что мы могли бы вместо  $A = 0$  положить в обоих случаях  $A = -KB$ , где  $K$  — новая безразмерная постоянная. Тогда получились бы сходные формулы, с заменой только везде

$\arctan \left( \frac{az/h + b}{cz/h + d} \right)$  и  $\ln \left( \frac{az/h + b}{cz/h + d} \right)$  на  $\arctan \left( \frac{az/h + b}{cz/h + d} \right) - K$  и  $\ln \left( \frac{az/h + b}{cz/h + d} \right) - K$ . Достигнутая этим, казалось бы, большая общность является, однако, иллюзорной. В самом деле, пусть

$$\arctan \left( \frac{az/h + b}{cz/h + d} \right) - K = \arctan \left( \frac{a_1z/h + b_1}{c_1z/h + d_1} \right); \quad (12)$$

тогда

$$\begin{aligned} a_1 &= a \cos K - c \sin K, & c_1 &= c \cos K + a \sin K, \\ b_1 &= b \cos K - d \sin K, & d_1 &= d \cos K + b \sin K, \end{aligned} \quad (13)$$

причем

$$a_1d_1 - b_1c_1 = 1 \quad (14)$$

и

$$\begin{aligned} a_1^2 + c_1^2 &= a^2 + c^2, \\ a_1b_1 + c_1d_1 &= ab + cd, \\ b_1^2 + d_1^2 &= b^2 + d^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Опустив индекс 1, мы придем к прежним формулам (8) и (9), где  $K = 0$ . Положив, равным образом, во втором случае

$$\ln \left( \frac{az/h + b}{cz/h + d} \right) - K = \ln \left( \frac{a_1z/h + b_1}{c_1z/h + d_1} \right), \quad (16)$$

имеем

$$\begin{aligned} a_1 &= a \exp(-K/2), & c_1 &= c \exp(K/2), \\ b_1 &= b \exp(-K/2), & d_1 &= d \exp(K/2), \end{aligned} \quad (17)$$

причем

$$\begin{aligned} a_1c_1 &= ac, \\ a_1d_1 + b_1c_1 &= ad + bc, \\ b_1d_1 &= bd, \end{aligned} \quad (18)$$



и формула (14) тоже выполняется. Следовательно, и в этом случае получаются прежние формулы (10) и (11), где  $K = 0$ .

В заключение отметим, что уравнение (8) является обобщением уравнения (47) в [2]. Если примем в последнем, согласно вышесказанному,  $K = 0$ , то оно получается как частная форма уравнения (8) при  $C = 0$  и  $S = -q^2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кард П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 29, № 1, 1—7 (1980).
2. Кард П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 29, № 2, 113—119 (1980).

Тартуский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
7/IV 1980