EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 29. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1980, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 29
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1980, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1980.3.15

УДК 517.37

Эбу ТАММ

ОДНА ФОРМУЛА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРАЛА

Ebu TAMM. MITMEMÕÕTMELISE INTEGRAALI TEISENDAMISE VALEM

Ebu TAMM. A FORMULA FOR TRANSFORMING THE MULTI-DIMENSIONAL INTEGRAL

(Представил Н. Алумяэ)

В стохастических экстремальных задачах часто встречается функция вероятности

$$v(x,t)=P[f(x,\xi)<t], \tag{1}$$

где переменный вектор $x\in R^n$, случайный вектор $\xi\in R^s$, $f:R^n\times R^s\to R^1$, $t\in R^1$ и P обозначает вероятность. Если существует функция плотности вероятности $p(y)$ вектора ξ, то $v(x,t)$ представима в виде s-мерного интеграла

$$v(x,t)=\int\limits_{\{y:f(x,y)<t\}} p(y)\,dy. \tag{1а}$$

В [1] при изучении задачи $\min\limits_{x\in R^n} v(x,t)$ оказалось полезным использовать другое интегральное представление функции $v(x,t)$:

$$v(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{\Sigma_\tau} \frac{p(y)}{\|f'_y(x,y)\|}\,dS_\tau, \tag{1б}$$

где $\Sigma_\tau=\{y:f(x,y)=\tau\}$ и dS_τ обозначает дифференциал гиперповерхности Σ_τ. Формула (1б) при выполнении определенных условий непосредственно получается из (1а) с помощью формулы (IV, 10; 56) [2].

Однако реальные задачи часто содержат более общую функцию

$$w(x,T)=P[g(x,\xi)<T], \tag{2}$$

где $g:R^n\times R^s\to R^m$, $T\in R^m$ фиксирован. Чтобы можно было функцию (2) представить в виде, аналогичном (1б), докажем теорему, которая является прямым обобщением теоремы 108 [2].

Теорема. *Пусть Y — открытое множество евклидова пространства R^s и пусть h, $h=(h_1,\ldots,h_m)$ — дифференцируемая функция, определенная на Y и имеющая значения в R^m, $m\leqslant s$. Допустим, что существуют индексы $i_1, i_2, \ldots, i_m$, $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_m\leqslant s$, такие, что для всех $y\in Y$, $y=(y_1,\ldots,y_s)$,*

$$\det G(y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_{i_1}} & \dots & \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_{i_m}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial h_m(y)}{\partial y_{i_1}} & \dots & \frac{\partial h_m(y)}{\partial y_{i_m}} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Если через Σ_τ обозначить $(s-m)$-мерную поверхность, определенную уравнением $h(y)=\tau$, через $H^2(y)$ — сумму квадратов всех миноров матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_{i_1}} & \dots & \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_{i_m}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial h_m(y)}{\partial y_{i_1}} & \dots & \frac{\partial h_m(y)}{\partial y_{i_m}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_{i_{m+1}}} & \dots & \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_{i_s}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial h_m(y)}{\partial y_{i_{m+1}}} & \dots & \frac{\partial h_m(y)}{\partial y_{i_s}} \end{pmatrix}$$

и если $\mathfrak{f}$ является функцией, определенной на Y, имеющей значения в банаховом пространстве F и интегрируемой по мере объемов dy в R^s, то для почти всех значений τ функция $(|\det G^{-1}(y)|)/\sqrt{1+H^2(y)}\,\mathfrak{f}(y)$ интегрируема на Σ_τ относительно поверхностной меры dS_τ и

$$\int\limits_Y \mathfrak{f}(y)\,dy = \int\limits_{R^m} d\tau \int\limits_{\Sigma_\tau} \frac{|\det G^{-1}(y)|}{\sqrt{1+H^2(y)}}\,\mathfrak{f}(y)\,dS_\tau. \tag{3}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $i_1 = s-m+1,\ i_2 = s-m+2,\ \dots,\ i_m = s$. В таком случае (см. [2], с. 308)

$$\begin{aligned} y_{s-m+1} &= \varphi_1(y_1, \dots, y_s), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_s &= \varphi_m(y_1, \dots, y_s), \end{aligned} \tag{4}$$

причем

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_s} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_{s-m+1}} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial y_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial h_m}{\partial y_{s-m+1}} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial y_s} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial y_{s-m}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial h_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial y_{s-m}} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Следовательно, $(s-m)$-мерную поверхность $\Sigma_\tau = \{y : h(y) = \tau\}$ можно представить параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1, \\ &\cdots \\ y_{s-m} &= u_{s-m}, \\ y_{s-m+1} &= \varphi_1(u_1, \dots, u_{s-m}, \tau_1, \dots, \tau_m), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_s &= \varphi_m(u_1, \dots, u_{s-m}, \tau_1, \dots, \tau_m). \end{aligned} \tag{6}$$

Формулы (6) определяют регулярное отображение $\Phi: U \to Y$, $u \in U$, $u = (u_1, \ldots, u_{s-m}, \tau_1, \ldots, \tau_m)$, якобиан которого имеет вид

$$\Phi'(u) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial u_1} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial u_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_{s-m}} & \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial u_{s-m}} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial \tau_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_m} & \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial \tau_m} \end{matrix} \right\|. \tag{7}$$

Поскольку $s - m$ независимых векторов

$$\Phi'_{u_1} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial y_s}{\partial u_1} \right) = \left(1, 0, \ldots, 0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial u_1} \right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{8}$$

$$\Phi'_{u_{s-m}} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_{s-m}}, \ldots, \frac{\partial y_s}{\partial u_{s-m}} \right) = \left(0, 0, \ldots, 1, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_{s-m}}, \ldots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial u_{s-m}} \right)$$

находятся на касательной плоскости поверхности Σ_τ, то дифференциал dS_τ этой поверхности выражается через детерминант Грама [3] векторов $\Phi'_{u_1}, \ldots, \Phi'_{u_{s-m}}: dS_\tau = \sqrt{\Gamma(\Phi'_{u_1}, \ldots, \Phi'_{u_{s-m}})}\, du_1 \ldots du_{s-m}$. Используя, кроме того, теорему Фубини, получим

$$\int_Y \mathbf{f}(y)\, dy = \int_U \mathbf{f}(\Phi(u))\, |\det \Phi'(u)|\, du =$$

$$= \int_{R^m} d\tau \int_{\Sigma_\tau} \frac{\mathbf{f}(\Phi(u))\, |\det \Phi'(u)|}{\sqrt{\Gamma(\Phi'_{u_1}, \ldots, \Phi'_{u_{s-m}})}}\, dS_\tau.$$

Поскольку $\Gamma(\Phi'_{u_1}, \ldots, \Phi'_{u_{s-m}})$ равняется сумме квадратов всех миноров $(s-m)$-го порядка матрицы $(\Phi'^{\mathrm{T}}_{u_1} \ldots \Phi'^{\mathrm{T}}_{u_{s-m}})^{\mathrm{T}}$ [3], то, учитывая (5) и (8), $\sqrt{\Gamma(\Phi'_{u_1}, \ldots, \Phi'_{u_{s-m}})} = \sqrt{1 + H^2(y)}$. Наконец, так как $|\det \Phi'(u)| = |\det G^{-1}(y)|$, получим формулу (3). Теорема доказана.

Следствие. *Если функция $g(x, y)$ как функция от y удовлетворяет условиям, наложенным в теореме на функцию $h(y)$, то*

$$w(x, T) = P[g(x, \xi) < T] = \int_{\{y: g(x,y) < T\}} p(y)\, dy =$$

$$= \int_{\{\tau: \tau < T\}} d\tau \int_{\Sigma_{x,\tau}} \frac{|\det G^{-1}(x, y)|}{\sqrt{1 + H^2(x, y)}}\, p(y)\, dS_{x,\tau}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамм Э., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 28, № 1, 17—24 (1979).
2. Шварц Л., Анализ, М., «Мир», 1972.
3. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1953.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
29/II 1980