

Эбу ТАММ

ОДНА ФОРМУЛА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРАЛА

Ebu TAMM. MITMEMOOTMELISE INTEGRAALI TEISENDAMISE VALEM

Ebu TAMM. A FORMULA FOR TRANSFORMING THE MULTI-DIMENSIONAL INTEGRAL

(Представил Н. Алумяэ)

В стохастических экстремальных задачах часто встречается функция вероятности

$$v(x, t) = P[f(x, \xi) < t], \quad (1)$$

где переменный вектор $x \in R^n$, случайный вектор $\xi \in R^s$, $f: R^n \times R^s \rightarrow R^1$, $t \in R^1$ и P обозначает вероятность. Если существует функция плотности вероятности $p(y)$ вектора ξ , то $v(x, t)$ представима в виде s -мерного интеграла

$$v(x, t) = \int_{\{y: f(x, y) < t\}} p(y) dy. \quad (1a)$$

В [1] при изучении задачи $\min_{x \in R^n} v(x, t)$ оказалось полезным использовать другое интегральное представление функции $v(x, t)$:

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^t d\tau \int_{\Sigma_\tau} \frac{p(y)}{\|f'_y(x, y)\|} dS_\tau, \quad (1б)$$

где $\Sigma_\tau = \{y: f(x, y) = \tau\}$ и dS_τ обозначает дифференциал гиперповерхности Σ_τ . Формула (1б) при выполнении определенных условий непосредственно получается из (1a) с помощью формулы (IV, 10; 56) [2].

Однако реальные задачи часто содержат более общую функцию

$$w(x, T) = P[g(x, \xi) < T], \quad (2)$$

где $g: R^n \times R^s \rightarrow R^m$, $T \in R^m$ фиксирован. Чтобы можно было функцию (2) представить в виде, аналогичном (1б), докажем теорему, которая является прямым обобщением теоремы 108 [2].

Теорема. Пусть Y — открытое множество евклидова пространства R^s и пусть h , $h = (h_1, \dots, h_m)$ — дифференцируемая функция, определенная на Y и имеющая значения в R^m , $m \leq s$. Допустим, что существуют индексы i_1, i_2, \dots, i_m , $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq s$, такие, что для всех $y \in Y$, $y = (y_1, \dots, y_s)$,

Формулы (6) определяют регулярное отображение $\Phi: U \rightarrow Y$, $u \in U$, $u = (u_1, \dots, u_{s-m}, \tau_1, \dots, \tau_m)$, якобиан которого имеет вид

$$\Phi'(u) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial u_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial u_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_{s-m}} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial u_{s-m}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial \tau_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_m} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial \tau_m} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Поскольку $s - m$ независимых векторов

$$\Phi'_{u_1} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial y_s}{\partial u_1} \right) = \left(1, 0, \dots, 0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial u_1} \right), \quad (8)$$

$$\Phi'_{u_{s-m}} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_{s-m}}, \dots, \frac{\partial y_s}{\partial u_{s-m}} \right) = \left(0, 0, \dots, 1, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_{s-m}}, \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial u_{s-m}} \right)$$

находятся на касательной плоскости поверхности Σ_τ , то дифференциал dS_τ этой поверхности выражается через детерминант Грама [3] векторов $\Phi'_{u_1}, \dots, \Phi'_{u_{s-m}}: dS_\tau = \sqrt{\Gamma(\Phi'_{u_1}, \dots, \Phi'_{u_{s-m}})} du_1 \dots du_{s-m}$. Используя, кроме того, теорему Фубини, получим

$$\begin{aligned} \int_Y \mathbf{f}(y) dy &= \int_U \mathbf{f}(\Phi(u)) |\det \Phi'(u)| du = \\ &= \int_{R^m} d\tau \int_{\Sigma_\tau} \frac{\mathbf{f}(\Phi(u)) |\det \Phi'(u)|}{\sqrt{\Gamma(\Phi'_{u_1}, \dots, \Phi'_{u_{s-m}})}} dS_\tau. \end{aligned}$$

Поскольку $\Gamma(\Phi'_{u_1}, \dots, \Phi'_{u_{s-m}})$ равняется сумме квадратов всех миноров $(s - m)$ -го порядка матрицы $(\Phi'_{u_1}^T \dots \Phi'_{u_{s-m}}^T)^T$ [3], то, учитывая (5) и (8), $\sqrt{\Gamma(\Phi'_{u_1}, \dots, \Phi'_{u_{s-m}})} = \sqrt{1 + H^2(y)}$. Наконец, так как $|\det \Phi'(u)| = |\det G^{-1}(y)|$, получим формулу (3). Теорема доказана. Следствие. Если функция $g(x, y)$ как функция от y удовлетворяет условиям, наложенным в теореме на функцию $h(y)$, то

$$\begin{aligned} w(x, T) &= P[g(x, \xi) < T] = \int_{\{y: g(x, y) < T\}} p(y) dy = \\ &= \int_{\{\tau: \tau < T\}} d\tau \int_{\Sigma_{x, \tau}} \frac{|\det G^{-1}(x, y)|}{\sqrt{1 + H^2(x, y)}} p(y) dS_{x, \tau}. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамм Э., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 28, № 1, 17—24 (1979).
2. Шварц Л., Анализ, М., «Мир», 1972.
3. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1953.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
29/II 1980