

А. ФЛЯЙШЕР

РЕДУКТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ И ТРОЙНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИ

(Представил А. Хумал)

1. Вводные понятия

Пусть G — связная группа Ли с алгеброй Ли \mathfrak{g} и H — замкнутая подгруппа в G с подалгеброй Ли \mathfrak{h} . Если в \mathfrak{g} существует такое подпространство \mathfrak{m} , что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{m}$ (прямая сумма подпространств) и $AdH(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$ (локально $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$), то говорят, что на однородном пространстве G/H задана редуктивная структура $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ [1, 2]. В дальнейшем, говоря о редуктивной структуре $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$, мы будем иметь в виду редуктивную структуру на соответствующем однородном пространстве G/H . Редуктивная структура $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ называется (локально) симметрической [2], если $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$.

Следуя [3], будем называть общей тройной системой (о. т. с.) над полем k конечномерное векторное пространство L над полем k , на котором заданы две алгебраические операции — билинейная и трилинейная

$$\begin{aligned} L \times L &\rightarrow L, & (X, Y) &\rightarrow X \cdot Y, \\ L \times L \times L &\rightarrow L, & (X, Y, Z) &\rightarrow [X, Y, Z], \end{aligned}$$

причем выполняются следующие условия

$$\begin{aligned} X \cdot X &= 0, \\ [X, X, Y] &= 0, \\ [X, Y, Z] + [Y, Z, X] + [Z, X, Y] - (X \cdot Y) \cdot Z - (Y \cdot Z) \cdot X - (Z \cdot X) \cdot Y &= 0, \\ [X, Y, [Z, V, W]] &= [[X, Y, Z], V, W] + \\ &+ [Z, [X, Y, V], W] + [Z, V, [X, Y, W]], \\ [X \cdot Y, Z, V] + [Y \cdot Z, X, V] + [Z \cdot X, Y, V] &= 0, \\ [X, Y, Z \cdot V] + V \cdot [X, Y, Z] + Z \cdot [X, Y, V] &= 0 \end{aligned}$$

для $X, Y, Z, V, W \in L$.

Конечномерная алгебра Ли \mathfrak{g} становится о. т. с., если для $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ положить

$$X \cdot Y = [X, Y], \quad [X, Y, Z] = [[X, Y], Z].$$

С каждой редуктивной структурой на однородном пространстве связана некоторая о. т. с. в силу следующего результата.

Теорема 1. ([4]). Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ — редуктивная структура на однородном пространстве G/H . Если на векторном пространстве \mathfrak{m} определить билинейную и трilinearную операции формулами

$$X \cdot Y = [X, Y]_{\mathfrak{m}}, \quad [X, Y, Z] = (1/4) [[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z],$$

где индексы \mathfrak{m} и \mathfrak{h} обозначают проекцию в соответствующем подпространстве*, то \mathfrak{m} становится о. т. с.

О. т. с. \mathfrak{m} с введенными в теореме 1 операциями называется о. т. с. редуктивной структуры $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$.

Одновременно билинейная композиция в о. т. с. \mathfrak{m} определяет некоторую неассоциативную алгебру (\mathfrak{m}, \cdot) , впервые рассмотренную А. Сэйглом в [5].

В настоящей работе вводится понятие подструктуры редуктивной структуры и доказывается, что нахождение таких подструктур равносильно нахождению подсистем в о. т. с. этой структуры. Исследуется также взаимосвязь между вполне геодезическими подмногообразиями естественно-редуктивного однородного пространства и тройными системами Ли в соответствующей алгебре. Приводится аналог известного результата Э. Картана о связи между вполне геодезическими подмногообразиями симметрического пространства и тройными системами Ли.

2. Подструктуры редуктивной структуры

Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ — редуктивная структура. Следуя [6], назовем подалгебру $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ нормальной в \mathfrak{g} , если

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}.$$

Определение 1. Тройку $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \mathfrak{m}')$ назовем подструктурой редуктивной структуры $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$, если \mathfrak{g}' — нормальная подалгебра в \mathfrak{g} , причем $\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$. Если, кроме того, \mathfrak{g}' — идеал в \mathfrak{g} , то подструктуру $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \mathfrak{m}')$ будем называть идеальной.

Так как $[\mathfrak{h}', \mathfrak{m}'] \subset \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$, то подструктура $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \mathfrak{m}')$ сама является редуктивной структурой и поэтому обладает о. т. с. \mathfrak{m}' .

Определение 2. Векторное подпространство \mathfrak{n} в о. т. с. \mathfrak{m} называется подсистемой, если

$$\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}, \quad [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n},$$

и идеалом, если

$$\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}, \quad [\mathfrak{n}, \mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{n}.$$

Теорема 2. Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ — редуктивная структура и \mathfrak{m} ее о. т. с.

а) Если $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \mathfrak{m}')$ — подструктура структуры $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$, то ее о. т. с. \mathfrak{m}' является подсистемой в \mathfrak{m} .

б) Для всякой подсистемы \mathfrak{m}' в о. т. с. \mathfrak{m} существует такая подструктура $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \mathfrak{m}')$ структуры $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$, для которой \mathfrak{m}' является ее о. т. с.

Доказательство. а) Покажем, что $\mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}'$ и $[[\mathfrak{m}', \mathfrak{m}']_{\mathfrak{h}'}, \mathfrak{m}'] \subset$

* В дальнейшем проекцию вектора или подпространства из \mathfrak{g} на \mathfrak{h} (соответственно на \mathfrak{m}) будем обозначать индексом \mathfrak{h} (соответственно \mathfrak{m}).

$\subset m'$. Произведение $m' \cdot m'$ содержится в m (по определению) и в g' (так как g' — подалгебра в g), поэтому $m' \cdot m' \subset m \cap g' = m'$, тем самым первое утверждение доказано. Далее, $[m', m']_{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{h}$ и $[m', m']_{\mathfrak{h}} \subset g'$, следовательно, $[m', m']_{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{h} \cap g' = \mathfrak{h}'$. Но тогда $[[m', m']_{\mathfrak{h}}, m'] \subset m'$, так как (g', \mathfrak{h}', m') — редуکتивная структура, что доказывает и второе утверждение.

б) Положим $g' = [m', m']_{\mathfrak{h}} + m'$. Для $X, Y, Z, V \in m'$ имеем

$$[X, Y] = [X, Y]_{\mathfrak{h}} + X \cdot Y \in g', \quad (1)$$

$$[[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z] \in m' \subset g', \quad (2)$$

так как m' — подсистема в m . Далее,

$$[[X, Y]_{\mathfrak{h}}, [Z, V]_{\mathfrak{h}}] = [[X, Y]_{\mathfrak{h}}, [Z, V]] - [[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z \cdot V]; \quad (3)$$

$$[[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z \cdot V] \in m' \subset g'; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} [[X, Y]_{\mathfrak{h}}, [Z, V]] &= -[Z, [V, [X, Y]_{\mathfrak{h}}]] - [V, [[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z]] = \\ &= -[Z, [V, [X, Y]_{\mathfrak{h}}]]_{\mathfrak{h}} - [Z, [V, [X, Y]_{\mathfrak{h}}]]_{m'} \end{aligned} \quad (5)$$

$$- [V, [[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z]]_{\mathfrak{h}} - [V, [[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z]]_{m'} \in [m', m']_{\mathfrak{h}} + m',$$

так как m' — подсистема в m . Из соотношений (1)–(5) следует, что g' — подалгебра в g и подструктура $(g', [m', m']_{\mathfrak{h}}, m')$ — искомая.

Теорема 3. Пусть (g, \mathfrak{h}, m) — редуکتивная структура, m — ее о. т. с. и $\mathfrak{h} = [m, m]_{\mathfrak{h}}$.

а) Если (g', \mathfrak{h}', m') — идеальная подструктура структуры (g, \mathfrak{h}, m) , то ее о. т. с. m' есть идеал в m .

б) Обратно: для всякого идеала m' в о. т. с. m существует такая идеальная подструктура (g', \mathfrak{h}', m') структуры (g, \mathfrak{h}, m) , для которой m' является ее о. т. с.

Доказательство. а) Покажем, что $m' \cdot m \subset m'$ и $[[m', m]_{\mathfrak{h}}, m] \subset m'$. Действительно, для $X \in m'$, $Y, Z \in m$ имеем $[X, Y] = [X, Y]_{\mathfrak{h}} + X \cdot Y$. Произведение $X \cdot Y$ содержится в m (по определению) и в g' (так как g' — идеал в g), поэтому оно содержится и в их пересечении m' . Далее, $[X, Y]_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h} \cap g' = \mathfrak{h}'$ и тогда $[[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z] \in m'$ в силу редуکتивности структуры (g', \mathfrak{h}', m') .

б) Покажем, что подпространство $g' = [m', m]_{\mathfrak{h}} + m'$ является идеалом в алгебре Ли g . Пусть $X, Y, Z \in m'$, $V, W \in m$, $U \in \mathfrak{h}$. Тогда

$$[X, V] = [X, V]_{\mathfrak{h}} + X \cdot V \in [m', m]_{\mathfrak{h}} + m' = g', \quad (6)$$

$$[[X, V]_{\mathfrak{h}}, W] \in \mathfrak{m}' \subset \mathfrak{g}', \quad (7)$$

так как \mathfrak{m}' — идеал в о. т. с. \mathfrak{m} . Теперь, используя условие $\mathfrak{h} = = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}}$, запишем

$$\begin{aligned} [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}'] &= [[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}}, \mathfrak{m}'] = [[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}}, \mathfrak{m}']_{\mathfrak{m}} \subseteq \\ &\subseteq [[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}], \mathfrak{m}']_{\mathfrak{m}} \subseteq [[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'], \mathfrak{m}]_{\mathfrak{m}} = \\ &= [[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}']_{\mathfrak{h}}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{m}} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}']_{\mathfrak{m}} \cdot \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}', \end{aligned}$$

поэтому

$$[U, X] = [[V, W]_{\mathfrak{h}}, X] \in \mathfrak{m}' \subset \mathfrak{g}'. \quad (8)$$

В заключение докажем включение $[\mathfrak{h}, [\mathfrak{m}', \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}}] \subset \mathfrak{g}'$. Действительно, $[U, [X, V]] = [U, [X, V]_{\mathfrak{h}}] + [U, X \cdot V]$. Как показано выше, скобка $[U, X \cdot V]$ содержится в \mathfrak{m}' . Далее,

$$\begin{aligned} [U, [X, V]] &= -[X, [V, U]] - [V, [U, X]] = \\ &= -[X, [V, U]]_{\mathfrak{h}} - X \cdot [V, U] - [V, [U, X]]_{\mathfrak{h}} - V \cdot [U, X] \in \mathfrak{g}', \end{aligned}$$

следовательно,

$$[U, [X, V]_{\mathfrak{h}}] \in \mathfrak{g}'. \quad (9)$$

Из соотношений (6) — (9) следует, что \mathfrak{g}' — идеал в \mathfrak{g} и подструктура $(\mathfrak{g}', [\mathfrak{m}', \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}}, \mathfrak{m}')$ — искомая.

3. Естественно-редуктивные структуры и тройные системы Ли

Пусть на алгебре Ли \mathfrak{g} задана билинейная симметрическая невырожденная $ad(\mathfrak{g})$ -инвариантная форма B . Рассмотрим однородное пространство G/H , на котором редуктивная структура задается подпространством

$$\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \mid B(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{h}\},$$

и предположим, что ограничение формы B на подалгебре \mathfrak{h} невырождено. Поскольку в этом случае для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ имеем

$$\begin{aligned} B(X \cdot Y, Z) &= B([X, Y] - [X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z) = B([X, Y], Z) = \\ &= B(X, [Y, Z]) = B(X, Y \cdot Z), \end{aligned}$$

то G/H является естественно-редуктивным пространством [7]. Соответствующую структуру $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ будем называть естественно-редуктивной.

Определение 3. Подпространство \mathfrak{n} конечномерной вещественной алгебры Ли \mathfrak{g} называется тройной системой Ли (т. с. Ли) в \mathfrak{g} , если $[\mathfrak{n}, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]] \subset \mathfrak{n}$.

Теорема 4. *Естественно-редуктивная структура $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ является симметрической тогда и только тогда, когда \mathfrak{m} является т. с. Ли.*

Доказательство. Если $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ — симметрическая структура, то $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ и поэтому $[\mathfrak{m}, [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]] \subset \mathfrak{m}$. Обратно, пусть \mathfrak{m} — т. с. Ли. Тогда из равенств

$$B([\mathfrak{h}, \mathfrak{m}], [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) = B(\mathfrak{h}, [\mathfrak{m}, [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]]) = 0$$

следует $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ и $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ — симметрическая структура.

Определение 4. *Редуктивная структура $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ называется изотропно-неприводимой [2], если \mathfrak{m} не содержит собственных $\text{ad } \mathfrak{h}$ -инвариантных подпространств.*

Лемма. *Подструктура $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \mathfrak{m}')$ естественно-редуктивной изотропно-неприводимой структуры $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ является симметрической тогда и только тогда, когда \mathfrak{m}' является т. с. Ли.*

Доказательство. Если $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \mathfrak{m}')$ — симметрическая структура, то $[\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'] \subset \mathfrak{h}'$ и потому $[\mathfrak{m}', [\mathfrak{m}', \mathfrak{m}']] \subset \mathfrak{m}'$. Обратно, пусть \mathfrak{m}' — т. с. Ли. В силу изотропной неприводимости структуры $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ имеем $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}'] = \mathfrak{m}$ и тогда

$$\begin{aligned} B(\mathfrak{m}, [\mathfrak{m}', \mathfrak{m}']) &= B([\mathfrak{h}, \mathfrak{m}'], [\mathfrak{m}', \mathfrak{m}']) = \\ &= B(\mathfrak{h}, [\mathfrak{m}', [\mathfrak{m}', \mathfrak{m}']]) = 0, \end{aligned}$$

следовательно, $[\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'] \subset \mathfrak{h}$. Но \mathfrak{g}' — подалгебра в \mathfrak{g} , потому $[\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' = \mathfrak{h}'$.

Приводимая ниже теорема А. М. Васильева [6], уточненная Я. Сенте [8] на случай однородных пространств с редуктивной структурой, дает геометрическую характеристику подструктур редуктивной структуры.

Теорема 5. *Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ — редуктивная структура на $M = G/H$. Если касательное пространство $T_o(M)$ к M в точке $o = H$ отождествить, как обычно с \mathfrak{m} , то однородное подмногообразие M , соответствующее подструктуре $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \mathfrak{m}')$, является вполне геодезическим относительно естественной связности, индуцированной редуктивной структурой. Обратно: если M' — вполне геодезическое подмногообразие в M , $o \in M'$ и все геодезические в M' являются траекториями однопараметрических подгрупп, порожденных элементами из \mathfrak{m} , то существует редуктивная подструктура $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \mathfrak{m}')$, для которой $T_o(M') = \mathfrak{m}'$.*

Следующая теорема, частично сформулированная в [9], распространяет известный результат Э. Картана о связи между вполне геодезическими подмногообразиями симметрического пространства и т. с. Ли на однородные пространства с естественно-редуктивной структурой.

Теорема 6. *Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ — естественно-редуктивная изотропно-неприводимая структура на $M = G/H$ и \mathfrak{m} — касательное пространство $T_o(M)$ к M в точке $o = H$. Пусть, далее, \mathfrak{s} — т. с. Ли, содержащаяся в \mathfrak{m} . Тогда существует вполне геодезическое относительно естественной связности подмногообразие M' такое, что $T_o(M') = \mathfrak{s}$, причем в M' индуцируется симметрическая структура. Обратно: если M' — вполне геодезическое относительно естественной связности подмногообразие в M с симметрической структурой и $o \in M'$, то существует т. с. Ли $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{m}$ такая, что $T_o(M') = \mathfrak{s}$.*

Доказательство. Пусть \mathfrak{s} — т. с. Ли. Тогда подпространство

$$g' = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] + \mathfrak{s}$$

является нормальной подалгеброй в \mathfrak{g} , задающей одновременно симметрическую структуру. По теореме 5 соответствующее g' многообразие M' будет вполне геодезическим относительно естественной связности с симметрической структурой $(g', [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}], \mathfrak{s})$.

Пусть, теперь, M' — вполне геодезическое относительно естественной связности подмногообразия с симметрической структурой и $o \in M'$. Тогда все геодезические из M' , проходящие через o , являются орбитами однопараметрических подгрупп, порожденных элементами из \mathfrak{m} . Тем самым выполнены условия теоремы 5 и существует подструктура $(g', \mathfrak{h}', \mathfrak{s})$ такая, что $T_o(M') = \mathfrak{s}$. В силу симметричности M' эта подструктура также будет симметрической, а подпространство \mathfrak{s} , согласно лемме, — т. с. Ли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рашевский П. К., В кн.: Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 9, М., Изд-во МГУ, 1952, с. 49—74.
2. Nomizu, K., Amer. J. Math., **76**, 33—65 (1954).
3. Yamaguti, K., J. Sci. Hiroshima Univ., **A21**, № 2, 155—160 (1958).
4. Sagle, A., Nagoya Math. J., **32**, June, 373—394 (1969).
5. Sagle, A., J. Math. and Mech., **16**, № 12, 1381—1393 (1967).
6. Васильев А. М., Докл. АН СССР, **128**, № 2, 223—226 (1959).
7. Kobayashi, S., Nomizu, K., Foundation of Differential Geometry, **2**, Interscience, New York—London, 1969, p. 210—316.
8. Szenthe, J., Period. polytechn. Mech. Eng., **21**, № 2, 111—128 (1977).
9. Фляйшер А., В кн.: Труды геометрического семинара, **6**, М., изд. ВИНТИ, 1974, с. 267—276.

Информационно-вычислительный центр
Министерства финансов ЭССР

Поступила в редакцию
22/IV 1980

A. FLJAISER

REDUKTIIVSED STRUKTUURID JA LIE KOLMIKSÜSTEEMID

Olgu $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ reduktiivne struktuur homogeesel ruumil G/H [1,2] ja \mathfrak{m} tema üldine Lie kolmiksüsteem [3,4]. Artiklis on sisse toodud reduktiivse struktuuri alamstruktuuri mõiste ning tõestatud, et niisuguste alamstruktuuride olemasolu on ekvivalentne alam-süsteemide leidumisega selle struktuuri üldises Lie kolmiksüsteemis. On uuritud loomulikult reduktiivsete ruumide täielikult geodeetiliste alammuutkondade ja Lie kolmiksüsteemide vahelisi seoseid.

A. FLJAISER

REDUCTIVE STRUCTURES AND LIE TRIPLE SYSTEMS

Let $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ be a reductive structure [1,2] on homogeneous space G/H . Following A. Sagle [4], we make \mathfrak{m} into general Lie triple system [3], assuming

$$X \cdot Y = [X, Y]_{\mathfrak{m}} \quad \text{and} \quad [X, Y, Z] = (1/4)[[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z]$$

for $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$.

In the first part of this paper we introduce the notion of substructure of reductive structure as follows. Let $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ be a reductive structure on G/H . The subalgebra $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ is called normal in \mathfrak{g} [6] if

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}.$$

The triple $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \mathfrak{m}')$ is called a reductive substructure of $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ if \mathfrak{g}' is a normal subalgebra in \mathfrak{g} , $\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}$ and $\mathfrak{m}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$. The finding of such substructures, as it is shown, is equivalent to the finding of subsystems in the general Lie triple system \mathfrak{m} . The special case (when \mathfrak{g}' is an ideal in \mathfrak{g}) is studied independently.

In the second part we consider naturally reductive isotropy — irreducible structures $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m})$ on $M = G/H$ and prove that every Lie triple system $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{m}$ defines a totally geodesic symmetric submanifold $S = \pi \cdot \exp(\mathfrak{s})$ with respect to the natural connection corresponding to the given structure. Conversely if $S \subset M$ is a totally geodesic symmetric submanifold with respect to the natural connection of the given structure, then there is a Lie triple system $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{m}$ with $S = \pi \cdot \exp(\mathfrak{s})$. This result generalizes a well-known result of E. Cartan for symmetric spaces.