EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 29. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1980, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 29
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1980, № 3

УДК 519.443

П. ПУУСЕМП

ОБ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ СВОЕЙ ПОЛУГРУППОЙ ЭНДОМОРФИЗМОВ В КЛАССЕ ВСЕХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

(Представил А. Хумал)

1. Введение

Известно, что изоморфизм колец эндоморфизмов двух периодических абелевых групп влечет за собой изоморфизм самих этих групп ([1] с. 265). При доказательстве этого утверждения пользуются, как правило, действием сложения эндоморфизмов. Целью настоящей работы является доказательство того, что уже из изоморфизма полугрупп всех эндоморфизмов двух периодических абелевых групп следует изоморфизм самих этих групп.

Введем следующие обозначения: C_t — циклическая группа порядка t; $C(p^\infty)$ — группа типа p^∞; $\mathrm{End}\, G$ — полугруппа всех эндоморфизмов группы G; $\mathrm{Aut}\, G$ — группа всех автоморфизмов группы G; $I(G)$ — совокупность всех идемпотентов полугруппы $\mathrm{End}\, G$; $\langle a\rangle$ — подгруппа, порожденная элементом a; $o(a)$ — порядок элемента a некоторой группы; $K_G(x) = \{y \in \mathrm{End}\, G \mid yx = xy = y\}$; $Q_G(x, y) = \{z \in \mathrm{End}\, G \mid xz = zy = z\}$.

Так как множество $K_G(x)$ образует полугруппу, то будем рассматривать его как полугруппу. Элементы x и y полугруппы $\mathrm{End}\, G$ будем называть ортогональными, если $xy = yx = 0$. Для абелевых групп будем пользоваться аддитивной записью.

2. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Пусть G — некоторая группа и $x, y \in I(G)$. Тогда множество $Q_G(x, y)$ состоит из всевозможных эндоморфизмов z группы G, для которых $z : \mathrm{Ker}\, x \to \langle 1\rangle$ и $z : \mathrm{Im}\, x \to \mathrm{Im}\, y$. Наоборот, каждый гомоморфизм $z : \mathrm{Im}\, x \to \mathrm{Im}\, y$ однозначно распространим на всю группу G так, что $z : \mathrm{Ker}\, x \to \langle 1\rangle$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in I(G)$ и предположим, что $z \in Q_G(x, y)$. Тогда $xz = zy = z$. Поэтому $(\mathrm{Ker}\, x)z = \langle 1\rangle$. Так как

$$\mathrm{Im}\, y = \{g \in G \mid gy = g\} \tag{1}$$

(см. [2], лемма 1.1), то ввиду $zy = z$ получаем включение $(\mathrm{Im}\, x)z \subset \mathrm{Im}\, y$. Пусть, наоборот, $z \in \mathrm{End}\, G$, $(\mathrm{Ker}\, x)z = \langle 1\rangle$ и $(\mathrm{Im}\, x)z \subset \mathrm{Im}\, y$. Поскольку $G = \mathrm{Ker}\, x \lambda \mathrm{Im}\, x$ ([2], лемма 1.1), то $Gz = (\mathrm{Im}\, x)z \subset \mathrm{Im}\, y$, откуда в силу равенства (1) имеем $zy = z$. Так как идемпотент x действует на $\mathrm{Im}\, x = Gx$ тождественно и $(\mathrm{Ker}\, x)x = (\mathrm{Ker}\, x)z = \langle 1\rangle$, то

$xz = z$. Следовательно, $z \in Q_G(x, y)$ и первое утверждение леммы доказано. Второе утверждение леммы следует сразу, ибо имеет место разложение $G = \operatorname{Ker} x \lambda \operatorname{Im} x$. Лемма доказана.

Согласно доказанному, можем отождествить всякий эндоморфизм $z \in Q_G(x, y)$ соответствующим гомоморфизмом $z: \operatorname{Im} x \to \operatorname{Im} y$. Ясно, что при $x, y, u \in I(G)$ всегда $Q_G(x, y) Q_G(y, u) \subset Q_G(x, u)$. Так как $Q_G(x, x) = K_G(x)$, то из леммы 1 сразу следует

Лемма 2. *Если $x \in I(G)$, то $K_G(x) \simeq \operatorname{End}(\operatorname{Im} x)$.*

Лемма 3. *Пусть абелева группа A разлагается на прямую сумму $A = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus C$, где a, b — p-элементы, для которых $o(b) \leqslant o(a)$, и ε_a, ε_b — проекции группы A на подгруппы $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ соответственно. Если $\xi \in Q_A(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$, $a\xi = b$, то существует единственный $\pi \in Q_A(\varepsilon_a, \varepsilon_a + \varepsilon_b)$, так что $\pi\varepsilon_a = \varepsilon_a$ и $\pi\varepsilon_b = \xi$. При этом $\pi = \varepsilon_a + \xi$.*

Доказательство. Пусть выполнены предположения леммы. Определим гомоморфизм $\pi: \operatorname{Im} \varepsilon_a = \langle a \rangle \to \operatorname{Im}(\varepsilon_a + \varepsilon_b) = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$ равенством $a\pi = a + b$. В силу $o(b) \leqslant o(a)$ отображение π действительно определяет гомоморфизм, а также эндоморфизм из $Q_A(\varepsilon_a, \varepsilon_a + \varepsilon_b)$, причем $a\pi = a + b = a\varepsilon_a + a\xi = a(\varepsilon_a + \xi)$, т. е. $\pi = \varepsilon_a + \xi$. Так как $\xi, \varepsilon_a, \pi\varepsilon_a \in Q_A(\varepsilon_a, \varepsilon_a + \varepsilon_b)$ и $a(\pi\varepsilon_a) = (a + b)\varepsilon_a = a\varepsilon_a$, $a(\pi\varepsilon_b) = (a + b)\varepsilon_b = b = a\xi$, то $\pi\varepsilon_a = \varepsilon_a$ и $\pi\varepsilon_b = \xi$. Если еще $\tau \in Q_A(\varepsilon_a, \varepsilon_a + \varepsilon_b)$ и $\tau\varepsilon_a = \varepsilon_a$, $\tau\varepsilon_b = \xi$, то $a\tau = sa + tb$ для некоторых целых чисел s, t и

$$a = a\varepsilon_a = a(\tau\varepsilon_a) = (sa + tb)\varepsilon_a = sa,$$

$$b = a\xi = a(\tau\varepsilon_b) = (sa + tb)\varepsilon_b = tb,$$

т. е. $s = t = 1$ и $a\tau = a + b = a\pi$, $\tau = \pi$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть абелева группа A разлагается на прямую сумму $A = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \oplus B$ и ε_a, ε_b — проекции группы A на подгруппы $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ соответственно. Если $\alpha \in Q_A(\varepsilon_a, 1)$ и $\beta \in Q_A(\varepsilon_b, 1)$, то во множестве $Q_A(\varepsilon_a + \varepsilon_b, 1)$ существует единственный элемент ξ, так что $\varepsilon_a\xi = \alpha$, $\varepsilon_b\xi = \beta$. При этом $\xi = \alpha + \beta$.*

Доказательство. Пусть выполнены предположения леммы. Определим $\xi \in Q_A(\varepsilon_a + \varepsilon_b, 1)$ равенством $\xi = \alpha + \beta$. Тогда $\varepsilon_a\xi = \varepsilon_a(\alpha + \beta) = \varepsilon_a\alpha + \varepsilon_a\beta = \alpha + 0 = \alpha$ и, аналогично, $\varepsilon_b\xi = \beta$. Предположим, что $\tau \in Q_A(\varepsilon_a + \varepsilon_b, 1)$ и $\varepsilon_a\tau = \alpha$, $\varepsilon_b\tau = \beta$. Тогда $a\tau = (a + 0)\tau = (a\varepsilon_a + a\varepsilon_b)\tau = a(\varepsilon_a\tau) + a(\varepsilon_b\tau) = a\alpha + a\beta = a(\alpha + \beta)$. Аналогично, $b\tau = b(\alpha + \beta)$. Следовательно, $\tau = \alpha + \beta = \xi$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если G и H некоторые группы, $x \in I(G)$, $\operatorname{Im} x$ — конечная абелева группа и $\operatorname{End} G \simeq \operatorname{End} H$, то $\operatorname{Im} x \simeq \operatorname{Im} x^*$, где x^* — образ идемпотента x при изоморфизме $\operatorname{End} G \simeq \operatorname{End} H$.*

Доказательство. Пусть выполнены предположения леммы. Ясно, что $K_G(x) \simeq K_H(x^*)$. По лемме 2 $\operatorname{End}(\operatorname{Im} x) \simeq \operatorname{End}(\operatorname{Im} x^*)$. Тогда $\operatorname{Im} x \simeq \operatorname{Im} x^*$, ибо каждая конечная абелева группа определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех групп (см. [2], теорема 4.2). Лемма доказана.

Предположим, что группа A абелева и $x \in I(A)$. Тогда $A = \operatorname{Ker} x \lambda \operatorname{Im} x = \operatorname{Ker} x \oplus \operatorname{Im} x$ (см. [2], лемма 1.1) и x является проекцией группы A на ее подгруппу $\operatorname{Im} x$. В дальнейшем будем через x^T обозначать проекцию группы A на подгруппу $\operatorname{Ker} x$. Назовем идемпотент x^T ортогональным дополнением к идемпотенту x. Ясно, что

$(x^T)^T = x$. Для $x \in I(A)$ его ортогональное дополнение определено однозначно равенствами $xx^T = x^T x = 0$ и $x + x^T = x^T + x = 1$.

Лемма 6. *Пусть группа A абелева и идемпотенты $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I(A)$ попарно-ортогональны. Если* $\mathrm{End}\, A \simeq \mathrm{End}\, B$, *где B — некоторая другая абелева группа, то*

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^* = x_1^* + x_2^* + \ldots + x_n^*,$$

где x^* — образ элемента $x \in \mathrm{End}\, A$ при изоморфизме $\mathrm{End}\, A \simeq \mathrm{End}\, B$.

Доказательство этой леммы непосредственно вытекает из следствий 1.9, 1.11 и 1.12 работы [2]. При $n = 2$ и $x_2 = x_1{}^T$ из леммы 6 следует, что $(x_1{}^T)^* = (x_1{}^*)^T$.

Лемма 7. *Если* $\mathrm{End}\, C(p^\infty) \simeq \mathrm{End}\, C(q^\infty)$, *то $p = q$.*

Доказательство. В силу [1] (с. 372) группа $\mathrm{Aut}\, C(p^\infty)$ изоморфна группе $C_{p-1} \oplus J_p$, если $p > 2$, и группе $C_2 \oplus J_2$, если $p = 2$ (J_p — аддитивная группа кольца целых p-адических чисел). Группа J_p является группой без кручения. Поэтому из изоморфизма $\mathrm{End}\, C(p^\infty) \simeq \mathrm{End}\, C(q^\infty)$ следует изоморфизм $J_p \simeq J_q$. Тогда изоморфны также кольца эндоморфизмов групп J_p и J_q, т. е. кольца целых p-адических и q-адических чисел (см. [1], с. 256). Последний изоморфизм возможен лишь при $p = q$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если группа A абелева и* $\mathrm{End}\, A \simeq \mathrm{End}\, C(p^\infty)$, *то* $A \simeq C(p^\infty)$.

Доказательство. Пусть группа A абелева и $\mathrm{End}\, A \simeq \mathrm{End}\, C(p^\infty)$. Так как полугруппа $\mathrm{End}\, C(p^\infty)$ изоморфна мультипликативной полугруппе кольца целых p-адических чисел ([1], с. 256), то полугруппа $\mathrm{End}\, A$ бесконечна и лишена делителей нуля. В [3] доказано, что такая группа A изоморфна группе C_q или группе $C(q^\infty)$ для некоторого простого числа q. Случай $A \simeq C_q$ исключается, ибо полугруппа $\mathrm{End}\, A$ бесконечна. Поэтому $A \simeq C(q^\infty)$ и $\mathrm{End}\, A \simeq \mathrm{End}\, C(p^\infty) \simeq \mathrm{End}\, C(q^\infty)$. В силу леммы 7 $p = q$. Следовательно, $A \simeq C(p^\infty)$. Лемма доказана.

3. Основная теорема

Основным результатом нашей работы является следующая

Теорема. *Если полугруппы всех эндоморфизмов двух периодических абелевых групп A и B изоморфны, то группы A и B изоморфны.*

Для доказательства теоремы нам потребуется еще ряд лемм.

Лемма 9. *Если A — делимая периодическая абелева группа, B — периодическая абелева группа и* $\mathrm{End}\, A \simeq \mathrm{End}\, B$, *то $A \simeq B$.*

Доказательство. Пусть выполнены предположения леммы. Обозначим через x^* образ элемента $x \in \mathrm{End}\, A$ при изоморфизме $\mathrm{End}\, A \simeq \mathrm{End}\, B$. Ввиду делимости группы A имеем $A = \oplus_{i \in J} A_i$, $A_i \simeq C(p_i^\infty)$ (см. [4], с. 124). Обозначим через ε_i проекцию группы A на прямое слагаемое A_i. Ясно, что множество $T = \{\varepsilon_i | i \in J\}$ является системой попарно-ортогональных идемпотентов полугруппы $\mathrm{End}\, A$, причем имеет место

Условие. *Если $\varepsilon \in I(A)$ и $\varepsilon_i \varepsilon = 0$ для каждого $i \in J$, то $\varepsilon = 0$.*

Тогда $T^* = \{\varepsilon_i{}^* | i \in J\}$ является системой попарно-ортогональных идемпотентов полугруппы $\mathrm{End}\, B$ и $K_A(\varepsilon_i) \simeq K_B(\varepsilon_i{}^*)$.

Обозначим $B_i = \operatorname{Im} \varepsilon_i^*$. Согласно лемме 5 имеем $B_i = \operatorname{Im} \varepsilon_i^* \simeq \operatorname{Im} \varepsilon_i \simeq C(p_i^\infty)$. В силу ортогональности системы T^* ясно, что

$$B_i \cap (B_1 + \ldots + B_n) = \langle 0 \rangle$$

при различных i, 1, ..., n из множества индексов J. Поэтому подгруппы B_i, $i \in J$, порождают прямую сумму $C = \oplus_{i \in J} B_i \simeq \oplus_{i \in J} C(p_i^\infty)$ в группе B. Группа C как делимая подгруппа выделяется в виде прямого слагаемого из группы B:

$$B = C \oplus D = (\oplus_{i \in J} B_i) \oplus D.$$

Обозначим через ε^* проекцию группы B на подгруппу D. Тогда $\varepsilon^* \in I(B)$, $\oplus_{i \in J} B_i \subset \operatorname{Ker} \varepsilon^*$ и $\varepsilon_i^* \varepsilon^* = 0^*$ для каждого $i \in J$. Поэтому $\varepsilon \in I(A)$ и $\varepsilon_i \varepsilon = 0$ для каждого $i \in J$. Согласно условию имеем $\varepsilon = 0$. Следовательно, $\varepsilon^* = 0^*$, $D = \langle 0 \rangle$ и $B = C = \oplus_{i \in J} B_i \simeq \oplus_{i \in J} A_i = A$, ибо $B_i \simeq A_i \simeq C(p_i^\infty)$ для каждого $i \in J$. Лемма доказана.

Если A — периодическая абелева группа, то через A_p будем обозначать примарную p-компоненту группы A.

Лемма 10. *Если A — редуцированная периодическая абелева группа, $A = \oplus_{p \in P} A_p$ ($A_p \neq \langle 0 \rangle$ при $p \in P$), B — периодическая абелева группа и $\operatorname{End} A \simeq \operatorname{End} B$, то $B = \oplus_{p \in P} B_p$ и $\operatorname{End} A_p \simeq \operatorname{End} B_p$ для каждого $p \in P$.*

Доказательство. Пусть выполнены предположения леммы. Обозначим через x^* образ элемента $x \in \operatorname{End} A$ при изоморфизме $\operatorname{End} A \simeq \operatorname{End} B$ и через ε_p проекцию группы A на подгруппу A_p. В силу редуцированности группы A группа A_p обладает нетривиальным циклическим прямым слагаемым $\langle a_p \rangle$ (см. [4], с. 140, следствие 27.3):

$$A_p = \langle a_p \rangle \oplus \bar{A}_p, \quad p \in P.$$

Тогда

$$A = \langle a_p \rangle \oplus \bar{A}_p \oplus (\oplus_{q \in P \setminus \{p\}} A_q).$$

Обозначим через δ_p проекцию группы A на подгруппу $\langle a_p \rangle$ и рассмотрим множество

$$T_p = \{x \in I(A) \mid Q_A(\delta_p, x) = \{0\}\}.$$

Предположим, что $x \in T_p$. Тогда $Q_A(\delta_p, x) = \{0\}$. Согласно определению множества $Q_A(\delta_p, x)$ это означает, что всякий гомоморфизм $\operatorname{Im} \delta_p = \langle a_p \rangle \to \operatorname{Im} x$ является нулевым. Отсюда следует, что группа $\operatorname{Im} x$ лишена неединичных p-элементов. Следовательно,

$$T_p = \{x \in I(A) \mid \operatorname{Im} x \text{ — } p'\text{-группа}\}. \qquad (2)$$

Поэтому и $\varepsilon_p{}^T \in T_p$.

Установим, что идемпотент $\varepsilon_p{}^T$ является двусторонней единицей множества T_p. Пусть $x \in T_p$. В силу равенства (2) $\operatorname{Im} x \subset \operatorname{Ker} \varepsilon_p$ и $\operatorname{Im} \varepsilon_p \subset \operatorname{Ker} x$, т. е. $\varepsilon_p x = x \varepsilon_p = 0$. Поэтому

$$x = x1 = x(\varepsilon_p + \varepsilon_p^T) = x\varepsilon_p + x\varepsilon_p^T = 0 + x\varepsilon_p^T = x\varepsilon_p^T.$$

Аналогично $x = \varepsilon_p{}^T x$. Следовательно, $\varepsilon_p{}^T$ — двусторонняя единица множества T_p.

Рассмотрим теперь группу B. Предположим, что $B = \otimes_{q \in Q} B_q$, и обозначим через π_q проекцию группы B на ее подгруппу B_q. Так как $\operatorname{Im}\delta_p = \langle a_p\rangle$ — ненулевая циклическая p-группа $(p\in P)$ и по лемме 5 $\operatorname{Im}\delta_p^* \simeq \langle a_p\rangle$, то $P\subset Q$.

Покажем, что $\operatorname{End} A_p \simeq \operatorname{End} B_p$ для каждого $p\in P\subset Q$. Пусть $p\in P$. По определению множества $Q(\cdot,\ \cdot)$ ясно, что $(Q_A(\delta_p, x))^* = Q_B(\delta_p^*, x^*)$. Поэтому

$$T_p^* = \{x^*\in I(B)\,|\,Q_B(\delta_p^*, x^*) = \{0^*\}\},$$

причем $(\varepsilon_p{}^T)^*$ — двусторонняя единица множества T_p^*, ибо $\varepsilon_p{}^T$ — двусторонняя единица множества T_p. Аналогично тому, как это делалось при T_p, можно убедиться, что

$$T_p^* = \{x^*\in I(B)\,|\,\operatorname{Im} x^* \text{ — } p'\text{-группа}\} \tag{3}$$

и $\pi_p{}^T$ является двусторонней единицей множества T_p^*. Так как двусторонняя единица определена однозначно, то $(\varepsilon_p{}^T)^* = \pi_p{}^T$. Поэтому $\pi_p = (\pi_p{}^T)^T = ((\varepsilon_p{}^T)^*)^T = ((\varepsilon_p{}^T)^T)^* = \varepsilon_p^*$. В силу изоморфизма $K_A(\varepsilon_p) \simeq K_B(\varepsilon_p^*) = K_B(\pi_p)$ и леммы 2 $\operatorname{End} A_p \simeq \operatorname{End} B_p$.

Установим, наконец, равенство $P = Q$. По равенству (2) ясно, что

$$\bigcap\nolimits_{p\in P} T_p = \{x\in I(A)\,|\,\operatorname{Im} x \text{ — } P'\text{-группа}\}.$$

Согласно равенству $A = \oplus_{p\in P} A_p$ это означает, что $\bigcap_{p\in P} T_p = \{0\}$. Поэтому и $\bigcap_{p\in P} T_p^* = \{0^*\}$. В силу равенства (3) имеем

$$\bigcap\nolimits_{p\in P} T_p^* = \{x^*\in I(B)\,|\,\operatorname{Im} x^* \text{ — } P'\text{-группа}\} = \{0^*\}. \tag{4}$$

Если $P\neq Q$, то существует $q\in Q\setminus P$. Тогда $\pi_q\neq 0^*$, $\pi_q\in I(B)$ и $\operatorname{Im}\pi_q$ является ненулевой P'-группой. Это противоречит равенству (4). Следовательно, $P = Q$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Если A — неограниченная редуцированная периодическая абелева p-группа, то группа A имеет неограниченную базисную подгруппу.*

Доказательство. Группа A имеет базисную подгруппу B, причем $B = \oplus_{n=1}^{\infty} B_n$, где B_n — прямая сумма групп C_{p^n} или $B_n = \langle 1\rangle$ (см. [4], с. 162—164). Предположим от противного, что группа B ограничена. Тогда существует число $k > 0$ такое, что $B_k = B_{k+1} = \ldots = \langle 0\rangle$, $B = B_1\oplus\ldots\oplus B_{k-1}$ и $A = B\oplus C$ для некоторой подгруппы C. Группа C лишена ненулевого циклического прямого слагаемого, ибо группа $B_1\oplus\ldots\oplus B_n$ является максимальным p^n-ограниченным прямым слагаемым группы A (см. [4], с. 166, теорема 33.2). Отсюда следует, что $C = \langle 0\rangle$, так как при $C\neq\langle 0\rangle$ в силу редуцированности группы C следовало бы существование ненулевого циклического прямого слагаемого для группы C (см. [4], с. 140). Поэтому $A = B = B_1\oplus\ldots\oplus B_{k-1}$, т. е. группа A ограничена. Это противоречит предположениям леммы. Следовательно, базисная подгруппа B группы A тоже неограничена. Лемма доказана.

Лемма 12. *Если A — неограниченная редуцированная периодическая абелева p-группа, B — периодическая абелева p-группа и* $\operatorname{End} A \simeq \operatorname{End} B$, *то группы A и B изоморфны.*

Доказательство. Пусть выполнены предположения леммы. По лемме 11 группа A имеет неограниченную базисную подгруппу. Поэтому существуют элементы $a_1, a_2, \ldots$ группы A такие, что

$$A = \langle a_1\rangle \oplus \ldots \oplus \langle a_k\rangle \oplus A_k;$$
$$A_k = \langle a_{k+1}\rangle \oplus A_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots; \qquad (5)$$
$$o(a_k) = p^{n_k}, \quad 1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots$$

(см. [4], с. 163). Обозначим через ε_k проекцию группы A на ее подгруппу $\langle a_k\rangle$ относительно указанных прямых разложений. Тогда $\operatorname{Im}\varepsilon_k = \langle a_k\rangle$ и $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\}$ — бесконечная система попарно-ортогональных идемпотентов. Система $\{\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \ldots\}$ (x^* — образ элемента $x \in \operatorname{End} A$ при изоморфизме $\operatorname{End} A \simeq \operatorname{End} B$) состоит также из попарно-ортогональных идемпотентов. По лемме 6 $(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k)^* = \varepsilon_1^* + \ldots + \varepsilon_k^*$. Поэтому индукцией по k легко убедиться, что в группе B имеют место аналогичные разложения:

$$B = \operatorname{Im}\varepsilon_1^* \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im}\varepsilon_k^* \oplus B_k,$$
$$B_k = \operatorname{Im}\varepsilon_k^* \oplus B_{k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

причем ε_k^* — проекция группы B на $\operatorname{Im}\varepsilon_k^*$ относительно таких прямых разложений. По лемме 5 $\operatorname{Im}\varepsilon_k^* \simeq \operatorname{Im}\varepsilon_k = \langle a_k\rangle$. Поэтому существуют $c_k \in B$, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что $\operatorname{Im}\varepsilon_k^* = \langle c_k\rangle \simeq \langle a_k\rangle$.

Определим для каждых $i, j \in \{1, 2, \ldots\}$, $i \geqslant j$, эндоморфизмы $\xi_{ij} \in Q_A(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ следующим образом: $a_i\xi_{ij} = a_j$. Тогда эндоморфизмы ξ_{ij} $(i \geqslant j)$ характеризуются свойствами:

1) из $\xi_{ij}\xi = 0$, $\xi \in K_A(\varepsilon_j)$ следует $\xi = 0$;

2) $\xi_{ij}\xi_{jk} = \xi_{ik}$ $(i \geqslant j \geqslant k)$;

3) $\xi_{ii} = \varepsilon_i$

(первое свойство следует из равенства $K_A(\varepsilon_j) = Q_A(\varepsilon_j, \varepsilon_j)$ и описания множества $Q_A(\cdot\,, \cdot)$). В силу изоморфизма $\operatorname{End} A \simeq \operatorname{End} B$ эндоморфизмы ξ_{ij}^* группы B принадлежат множеству $Q_B(\varepsilon_i^*, \varepsilon_j^*)$ и обладают аналогичными свойствами:

1*) из $\xi_{ij}^*\xi^* = 0^*$, $\xi^* \in K_B(\varepsilon_j^*)$ следует $\xi^* = 0^*$;

2*) $\xi_{ij}^*\xi_{jk}^* = \xi_{ik}^*$ $(i \geqslant j \geqslant k)$;

3*) $\xi_{ii}^* = \varepsilon_i^*$.

Из включения $\xi_{ij}^* \in Q_B(\varepsilon_i^*, \varepsilon_j^*)$ следует, что $c_i\xi_{ij}^* \in \langle c_j\rangle$ $(i \geqslant j)$. Свойство 1*) означает, что $\langle c_i\xi_{ij}^*\rangle = \langle c_j\rangle$. Индукцией по k легко убедиться, что элементы $c_1, c_2, \ldots$ можно выбрать так, чтобы $c_{k+1}\xi_{k+1,k} = c_k$. В силу свойств 2*) и 3*) тогда $c_i\xi_{ij}^* = c_j$ $(i \geqslant j)$.

Определим теперь отображение $\varphi: A \to B$, которое является изоморфизмом групп A и B. Пусть $a \in A$. Тогда существует $\alpha \in Q_A(\varepsilon_k, 1)$ такой, что $a = a_k\alpha$ для некоторого k. Действительно, в силу условий (5) и периодичности группы A существует k такой, что $o(a_k) \geqslant o(a)$. Эндоморфизм $\alpha \in Q_A(\varepsilon_k, 1)$ можно выбрать так: $a_k\alpha = a$, $(\operatorname{Ker}\varepsilon_k)\alpha = \langle 0\rangle$.

Определим далее отображение $\varphi: A \to B$ с равенством

$$a\varphi = (a_k\alpha)\varphi = c_k\alpha^*.$$

Покажем, что φ определено корректно, т. е. если к тому же $\beta \in Q_A(\varepsilon_j, 1)$ и $a = a_j\beta$, то $c_k\alpha^* = c_j\beta^*$. Ради определенности предположим, что $j \geqslant k$. Тогда $a_j\xi_{jk} = a_k$, $a_j\xi_{jk}\alpha = a_k\alpha = a = a_j\beta$ и $\xi_{jk}\alpha = \beta$, откуда следует, что $\xi_{jk}^*\alpha^* = \beta^*$ и

$$c_k\alpha^* = (c_j\xi^*_{jk})\alpha^* = c_j(\xi^*_{jk}\alpha^*) = c_j\beta^*.$$

Следовательно, отображение φ определено корректно. Аналогично можно определить отображение $\psi : B \to A$. При этом отображения φ и ψ взаимно обратны. Поэтому отображение φ является биекцией.

Покажем, что φ является гомоморфизмом. Пусть $a, b \in A$ и установим, что $(a+b)\varphi = a\varphi + b\varphi$. Существуют $\alpha \in Q_A(\varepsilon_k, 1)$, $\beta \in Q_A(\varepsilon_l, 1)$ такие, что $a = a_k\alpha$ и $b = a_l\beta$. Можно предполагать, что $k \neq l$ (при $k = l$ имеем $b = a_k\beta = a_{k+1}(\xi_{k+1,k}\beta)$ и вместо β можно рассматривать $\xi_{k+1,k}\beta$). Без ограничения общности положим, что $k \geqslant l$. По лемме 3 существует единственное $\pi \in Q_A(\varepsilon_k, \varepsilon_k + \varepsilon_l)$, удовлетворяющее равенствам $\pi\varepsilon_k = \varepsilon_k$ и $\pi\varepsilon_l = \xi_{kl}$, причем $\pi = \varepsilon_k + \xi_{kl}$. По лемме 4 существует единственное $\xi \in Q_A(\varepsilon_k + \varepsilon_l, 1)$, так что $\varepsilon_k\xi = \alpha$ и $\varepsilon_l\xi = \beta$. При этом $\xi = \alpha + \beta$. Тогда $\pi\xi \in Q_A(\varepsilon_k, 1)$ и

$$\begin{aligned} a_k(\pi\xi) &= (a_k(\varepsilon_k + \xi_{kl}))\xi = (a_k + a_l)\xi = \\ &= a_k\xi + a_l\xi = a_k(\alpha+\beta) + a_l(\alpha+\beta) = \\ &= a_k\alpha + 0 + 0 + a_l\beta = a + b. \end{aligned} \tag{6}$$

Так как при изоморфизме $\operatorname{End} A \simeq \operatorname{End} B$ сохраняется сумма ортогональных идемпотентов (см. лемму 6), то $(\varepsilon_k + \varepsilon_l)^* = \varepsilon_k^* + \varepsilon_l^*$. Этот изоморфизм отображает при каждых $x, y \in I(A)$ множество $Q_A(x, y)$ на множество $Q_B(x^*, y^*)$. Поэтому $\pi^* \in Q_B(\varepsilon_k^*, \varepsilon_k^* + \varepsilon_l^*)$ и $\xi^* \in Q_B(\varepsilon_k^* + \varepsilon_l^*, 1^*)$ являются единственными элементами из этих множеств такими, что $\pi^*\varepsilon_k^* = \varepsilon_k^*$, $\pi^*\varepsilon_l^* = \xi_{kl}^*$, $\varepsilon_k^*\xi^* = \alpha^*$ и $\varepsilon_l^*\xi^* = \beta^*$. По леммам 3 и 4 $\pi^* = \varepsilon_k^* + \xi_{kl}^*$ и $\xi^* = \alpha^* + \beta^*$. Аналогично равенству (6) получаем равенство

$$c_k(\pi^*\xi^*) = c_k\alpha^* + c_l\beta^*. \tag{7}$$

В силу определения отображения φ из равенств (6) и (7) следует, что

$$\begin{aligned} (a+b)\varphi &= (a_k(\pi\xi))\varphi = c_k(\pi\xi)^* = c_k(\pi^*\xi^*) = \\ &= c_k\alpha^* + c_l\beta^* = (a_k\alpha)\varphi + (a_l\beta)\varphi = \\ &= a\varphi + b\varphi. \end{aligned}$$

Следовательно, φ является гомоморфизмом. Ранее было установлено, что φ — биекция. Поэтому группы A и B изоморфны. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть A и B — периодические абелевы группы и $\operatorname{End} A \simeq \operatorname{End} B$. Группа A разлагается на прямую сумму $A = F \oplus D$, где D — делимая подгруппа и F — редуцированная подгруппа. Тогда группа B разлагается на прямую сумму $B = K \oplus H$, где $\operatorname{End} F \simeq \operatorname{End} K$ и $\operatorname{End} D \simeq \operatorname{End} H$ (см. [2], теорема 1.13). По лемме 9 группы D и H изоморфны. Докажем, что $F \simeq K$. Ввиду леммы 10 для этого достаточно показать, что $F_p \simeq K_p$. Из этой же леммы следует, что $\operatorname{End} F_p \simeq \operatorname{End} K_p$. Если группа F_p ограничена, то $F_p \simeq K_p$ (см. [5], теорема). Если группа F_p неограничена, то по лемме 12 $F_p \simeq K_p$. Следовательно, $F \simeq K$ и $A \simeq B$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Л., Бесконечные абелевы группы, т. 2, М., «Мир», 1977.
2. Пуусемп П., Уч. зап. Тартуск. ун-та, № 366, 76—104 (1975).
3. Szele, T., Publ. Math. Debrecen, **1**, 89—91 (1949).
4. Фукс Л., Бесконечные абелевы группы, т. 1, М., «Мир», 1974.
5. Пуусемп П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **29**, № 3, 241—245 (1980).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 27/III 1980

P. PUUSEMP

PERIOODILISE ABELI RÜHMA MÄÄRATAVUSEST OMA ENDOMORFISMIPOOLRÜHMAGA PERIOODILISTE ABELI RÜHMADE KLASSIS

On teada, et kahe perioodilise Abeli rühma endomorfismiringide isomorfismist järeldub nende rühmade eneste isomorfism (vt. [1], lk. 265). Artikli [2] tulemuste põhjal on võimalik seda omadust üldistada. Käesolevas töös on näidatud, et juba kahe perioodilise Abeli rühma endomorfismipoolrühmade isomorfismist järeldub nende rühmade isomorfism.

P. PUUSEMP

ON THE DETERMINITY OF A PERIODIC ABELIAN GROUP BY ITS SEMIGROUP OF ENDOMORPHISMS IN THE CLASS OF ALL PERIODIC ABELIAN GROUPS

All the endomorphisms of an abelian group A form a ring. The abelian group A is characterized by this ring. For example, it is well known that from the isomorphism of rings of all endomorphisms of two periodic abelian groups A and B follows the isomorphism of groups A and B (see [1], p. 265). All the endomorphisms of an arbitrary group A form only a semigroup End A. Let $\mathfrak{A}$ be a class of groups and A a fixed group. If from the isomorphism of semigroups of all endomorphisms of groups A and $B \in \mathfrak{A}$ follows the isomorphism of groups A and B then we say that the group A is determined by its semigroup of endomorphisms in the class $\mathfrak{A}$. For arbitrary group A it is interesting to find classes of groups, in which A is determined by its semigroup of endomorphisms. Some results on this problem are presented in the papers [2,5]. For example, in the paper [2] it is shown, that an arbitrary finite abelian group is determined by its semigroup of endomorphisms in the class of all groups. In the paper [5] it is proved that an arbitrary abelian group with bounded orders of its elements is determined by its semigroup of endomorphisms in the class of all groups. In this paper, using the methods and results of the papers [2,5], it is shown that an arbitrary periodic abelian group is determined by its semigroup of endomorphisms in the class of all periodic abelian groups.