EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 29. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1980, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 29
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1980, № 3

УДК 519.443

П. ПУУСЕМП

ОБ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ СВОЕЙ ПОЛУГРУППОЙ ЭНДОМОРФИЗМОВ

(Представил А. Хумал)

1. В [1, 2] было показано, что каждая периодическая абелева группа определяется своим кольцом эндоморфизмов, т. е. изоморфизм колец эндоморфизмов двух периодических абелевых групп влечет за собой изоморфизм самих этих групп. В [3] было доказано, что каждая конечная абелева группа G определяется уже своей полугруппой всех эндоморфизмов $\operatorname{End} G$ (в классе всех групп), т. е. из изоморфизма $\operatorname{End} G \simeq \operatorname{End} H$, где H — некоторая другая группа (не обязательно абелева), следует изоморфизм групп G и H. В настоящей работе этот результат обобщается и доказывается, что всякая периодическая абелева группа, порядки элементов которой ограничены в совокупности, определяется своей полугруппой всех эндоморфизмов.

Кроме общепринятых и упомянутых обозначений, будем придерживаться следующих: $Z(G)$ — центр группы G; $g^{\cdot}$ — внутренний автоморфизм, порожденный элементом g; $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядков элементов периодической группы G; $\langle g\rangle$ — циклическая подгруппа, порожденная элементом g группы G; $\operatorname{Im} x$ — образ эндоморфизма x; $\operatorname{Ker} x$ — ядро эндоморфизма x.

2. Следуя [4] (с. 303), назовем эндоморфизмы x и y группы G суммируемыми, если $gh=hg$ для каждых $g\in\operatorname{Im} x$ и $h\in\operatorname{Im} y$. Отображение, переводящее всякий элемент $g\in G$ в элемент $(gx)(gy)$, называется в случае суммируемых эндоморфизмов суммой x и y, т. е. $g(x+y)=(gx)(gy)$. Отображение $x+y$ будет эндоморфизмом группы G. Эндоморфизмы x и y будем называть ортогональными, если $xy=yx=0$.

В силу [3] (с. 79, 85 и 86) имеют место следующие две леммы.

Лемма 1. *Если идемпотенты $x_1, \ldots, x_n$ полугруппы $\operatorname{End} G$ попарно-ортогональны и суммируемы, то существует сумма $x_1+\ldots+x_n$, которая является тоже идемпотентом, и*

$$\operatorname{Ker}(x_1+\ldots+x_n)=\bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{Ker} x_i,\qquad \operatorname{Im}(x_1+\ldots+x_n)=\prod_{i=1}^{n}\operatorname{Im} x_i,$$

$$G=\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{Ker} x_i\Big)\lambda\Big(\prod_{i=1}^{n}\operatorname{Im} x_i\Big).$$

Лемма 2. *Если $\varphi:\operatorname{End} G\to\operatorname{End} H$ — изоморфизм (G и H — некоторые группы) и $x_1, \ldots, x_n$ — попарно-ортогональные и суммируемые идемпотенты из $\operatorname{End} G$, то идемпотенты $x_1\varphi, \ldots, x_n\varphi$ также попарно-ортогональны, суммируемы и*

$$(x_1+\ldots+x_n)\varphi=(x_1\varphi)+\ldots+(x_n\varphi).$$

3. Пусть группа $G=\prod_{i\in I} G_i$ является внутренним прямым произведением своих подгрупп G_i, $i\in I$. Обозначим через π_i проекцию группы G на ее подгруппу G_i. Предположим, что H — некоторая другая группа, для которой $\operatorname{End} G \simeq \operatorname{End} H$. Пусть $\varphi:\operatorname{End} G\to\operatorname{End} H$ — соответствующий изоморфизм и $\tau_i=\pi_i\varphi$, $H_i=\operatorname{Im}\tau_i=H\tau_i$ $(i\in I)$. Докажем при сделанных предположениях следующие леммы.

Лемма 3. *Если* $\tau\in\operatorname{End} H$ *и* $\tau_i\tau=0_H$ *при каждом* $i\in I$, *то* $\tau=0_H$.

Действительно, тогда $0_G=0_H\varphi^{-1}=(\tau_i\tau)\varphi^{-1}=(\tau_i\varphi^{-1})(\tau\varphi^{-1})=$ $=\pi_i(\tau\varphi^{-1})$ и $G_i(\tau\varphi^{-1})=(G_i\pi_i)(\tau\varphi^{-1})=G_i(\pi_i(\tau\varphi^{-1}))=G_i0_G=\{1\}$ при каждом $i\in I$. Следовательно, $\tau\varphi^{-1}=0_G$ и $\tau=0_G\varphi=0_H$.

Лемма 4. *Для каждого* $i\in I$ *имеет место разложение* $H=$ $=\operatorname{Ker}\tau_i\times\operatorname{Im}\tau_i=\operatorname{Ker}\tau_i\times H_i$.

Доказательство. Пусть $i\in I$. Обозначим через π_i^* проекцию группы G на ее подгруппу $\prod_{j\in I\setminus\{i\}} G_j$. Тогда идемпотенты π_i и π_i^* полугруппы $\operatorname{End} G$ ортогональны, суммируемы и $\pi_i+\pi_i^*=1_G$. По лемме 2 идемпотенты $\tau_i=\pi_i\varphi$ и $\pi_i^*\varphi$ полугруппы $\operatorname{End} H$ также ортогональны, суммируемы и $(\pi_i+\pi_i^*)\varphi=\pi_i\varphi+\pi_i^*\varphi$. Поэтому $\tau_i+\pi_i^*\varphi=1_H$ и по лемме 1 имеем $H=\operatorname{Im} 1_H=\operatorname{Im}\tau_i\times\operatorname{Im}(\pi_i^*\varphi)$. Ввиду ортогональности идемпотентов τ_i и $\pi_i^*\varphi$ ясно, что $\operatorname{Im}(\pi_i^*\varphi)=$ $=\operatorname{Ker}\tau_i$. Следовательно, $H=\operatorname{Im}\tau_i\times\operatorname{Ker}\tau_i$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Подгруппы* $K=\bigcap_{i\in I}\operatorname{Ker}\tau_i$ *и* H_i, $i\in I$, *порождают в группе* H *прямое произведение*

$$K\times\prod_{i\in I}H_i=\Big(\bigcap_{i\in I}\operatorname{Ker}\tau_i\Big)\times\Big(\prod_{i\in I}H_i\Big). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $1, 2, \ldots, n$ — произвольный конечный набор различных индексов из множества I. Тогда проекции $\pi_1,\ldots,\pi_n$ попарно-ортогональны и суммируемы. По лемме 2 идемпотенты $\tau_1,\ldots,\tau_n$ полугруппы $\operatorname{End} H$ тоже ортогональны, суммируемы и в силу леммы 1

$$\operatorname{Im}(\tau_1+\ldots+\tau_n)=\prod_{k=1}^{n}\operatorname{Im}\tau_k=\prod_{k=1}^{n}H_k, \tag{2}$$

$$\operatorname{Ker}(\tau_1+\ldots+\tau_n)=\bigcap_{k=1}^{n}\operatorname{Ker}\tau_k.$$

В силу произвольности выбора числа n и набора $1,\ldots,n$ из равенства (2) следует, что подгруппы H_i, $i\in I$, порождают в группе H прямое произведение $\prod_{i\in I}H_i$.

Предположим, что $g\in(\bigcap_{i\in I}\operatorname{Ker}\tau_i)\cap(\prod_{i\in I}H_i)$. Тогда существуют такие $1,\ldots,n\in I$, что $g\in(\bigcap_{k=1}^{n}\operatorname{Ker}\tau_k)\cap(\prod_{k=1}^{n}H_k)$, т. е. $g\in\operatorname{Ker}(\tau_1+\ldots$ $\ldots+\tau_n)\cap\operatorname{Im}(\tau_1+\ldots+\tau_n)$. Так как $\tau_1+\ldots+\tau_n$ является идемпотентом и $\operatorname{Ker}\tau\cap\operatorname{Im}\tau=\{1\}$ для каждого идемпотентного эндоморфизма группы H, то $g=1$ и, следовательно,

$$\Big(\bigcap_{i\in I}\operatorname{Ker}\tau_i\Big)\cap\Big(\prod_{i\in I}H_i\Big)=\{1\}. \tag{3}$$

В силу леммы 4 ясно, что каждый элемент группы $\bigcap_{i\in I}\operatorname{Ker}\tau_i$ перестановочен с каждым элементом группы $\prod_{i\in I}H_i$. Поэтому из равенства (3) следует равенство (1). Лемма доказана.

Обозначим

$$M=K\times\prod_{i\in I}H_i=\Big(\bigcap_{i\in I}\operatorname{Ker}\tau_i\Big)\times\Big(\prod_{i\in I}H_i\Big). \tag{4}$$

Лемма 6. *Если группы G_i конечны и цикличны $(i \in I)$, то $H_i \simeq G_i$ $(i \in I)$ и группа H коммутативна.*

Доказательство. Пусть выполнены предположения леммы. Из изоморфизма $\operatorname{End} G \simeq \operatorname{End} H$ следует, в силу [3] (лемма 1.6), изоморфизм $\operatorname{End}(\operatorname{Im} \pi_i) \simeq \operatorname{End}(\operatorname{Im} \tau_i)$, т. е. $\operatorname{End} G_i \simeq \operatorname{End} H_i$ $(i \in I)$. Так как каждая конечная абелева группа определяется своей полугруппой эндоморфизмов [3] (теорема 4.2), то $G_i \simeq H_i$ $(i \in I)$ и первое утверждение леммы доказано.

Для доказательства второго утверждения покажем сначала, что $M \subset Z(H)$. Пусть $g \in M$. Поскольку группы H_i, $i \in I$, цикличны, то в силу разложения (1) и ортогональности идемпотентов τ_i ясно, что $\tau_i g^{\cdot} = \tau_i$ при каждом $i \in I$. Поэтому $(\tau_i g^{\cdot})\varphi^{-1} = \tau_i \varphi^{-1}$, т. е. $\pi_i(g^{\cdot}\varphi^{-1}) = \pi_i$ при каждом $i \in I$. Если теперь $b \in G_i$, то $b = b\pi_i = b(\pi_i(g^{\cdot}\varphi^{-1})) = (b\pi_i)(g^{\cdot}\varphi^{-1}) = b(g^{\cdot}\varphi^{-1})$. Следовательно, $g^{\cdot}\varphi^{-1} | G_i = 1_G | G_i$ при каждом $i \in I$, т. е. $g^{\cdot}\varphi^{-1} = 1_G$ и $g^{\cdot} = 1_H$. Последнее равенство означает, что $g \in Z(H)$. Отсюда следует включение $M \subset Z(H)$.

Пусть $g \in H$. Тогда $\tau_i g^{\cdot} = \tau_i$ $(i \in I)$, ибо $M \subset Z(H)$. Теперь, по аналогии, $g \in Z(H)$. Следовательно, $H = Z(H)$ и группа H коммутативна. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если группы G_i $(i \in I)$ цикличны и порядки элементов группы G ограничены в совокупности, то порядки элементов группы H также ограничены в совокупности.*

Доказательство. По предположению леммы существует такое натуральное число n, что $g^n = 1$ для каждого $g \in G$. В силу изоморфизма $G_i \simeq H_i$ $(i \in I)$ при каждом $g \in \prod_{i \in I} H_i$ выполняется равенство $g^n = 1$. Поэтому отображение $\tau : g \to g^n$, $g \in H$, удовлетворяет равенствам $\tau_i \tau = 0_H$, $i \in I$. Так как группа H абелева в силу леммы 6, то $\tau \in \operatorname{End} H$. В силу леммы 3 $\tau = 0_H$, т. е. $g^n = 1$ для каждого $g \in H$. Лемма доказана.

Теорема. *Всякая периодическая абелева группа, порядки элементов которой ограничены в совокупности, определяется своей полугруппой всех эндоморфизмов в классе всех групп.*

Доказательство. Пусть G — абелева группа, порядки элементов которой ограничены в совокупности. Тогда группа G разлагается на внутреннее прямое произведение своих циклических подгрупп G_i, $i \in I$ (см. [5], с. 107). Можно считать, что порядки подгрупп G_i являются степенями простых чисел.

Предположим, что полугруппы $\operatorname{End} G$ и $\operatorname{End} H$, где H — некоторая другая группа, изоморфны. Покажем, что тогда группы G и H изоморфны. Будем предполагать, что φ, H_i, τ_i и M имеют свои прежние значения.

По лемме 7 порядки элементов группы H ограничены в совокупности, а по лемме 6 группа H является абелевой. Поэтому порядки элементов группы H/M также ограничены в совокупности и группа H/M разлагается на прямое произведение своих циклических подгрупп:

$$H/M = \prod_{j \in J} \langle g_j M \rangle. \tag{5}$$

Можно считать, что это разложение таково, что порядки элементов g_j являются степенями простых чисел.

Покажем, что $\pi(M) \cap \pi(H/M) = \varnothing$. От противного предположим, что $\pi(M) \cap \pi(H/M) \neq \varnothing$, и пусть p принадлежит данному пересечению. Тогда группа M содержит элемент c порядка p и существует такой $j_0 \in J$, что порядок элемента g_{j_0} является степенью простого числа p. Теперь можно построить следующую последовательность гомоморфизмов:

$$H \xrightarrow{\varepsilon} H/M = \prod_{j \in J} \langle g_j M \rangle \xrightarrow{\alpha} \langle g_{j_0} M \rangle \xrightarrow{\beta} \langle c \rangle,$$

где ε — естественный гомоморфизм, α — проекция, $(g_{j_0}M)\beta = c$. Обозначим $\tau = \varepsilon\alpha\beta$. Тогда $\tau \in \operatorname{End} H$. Так как $H\tau_i = \operatorname{Im} \tau_i = H_i \subset M \subset \operatorname{Ker} \tau$ $(i \in I)$, то $\tau_i \tau = 0_H$ при каждом $i \in I$. По лемме 3 $\tau = 0_H$. Но по построению $\tau \neq 0_H$. Полученное противоречие показывает, что

$$\pi(M) \cap \pi(H/M) = \varnothing. \tag{6}$$

Из равенств (5) и (6) следует теперь разложение $H = (\prod_{j \in J} \langle g_j \rangle) \times M$, а из равенства (4) — разложение

$$H = K \times (\prod_{i \in I} H_i) \times (\prod_{j \in J} \langle g_j \rangle).$$

Обозначим через μ проекцию группы H на ее подгруппу $K \times (\prod_{j \in J} \langle g_j \rangle)$. Тогда $\mu \in \operatorname{End} H$ и $H\tau_i = H_i \subset \operatorname{Ker} \mu$, т. е. $\tau_i \mu = 0_H$ при каждом $i \in I$. По лемме 3 $\mu = 0_H$. Следовательно, $K \times (\prod_{j \in J} \langle g_j \rangle) = \{1\}$ и $H = \prod_{i \in I} H_i$. Так как в силу леммы 6 группы G_i и H_i изоморфны $(i \in I)$, то группы G и H изоморфны. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baer, R., Ann. Math., **44**, № 2, 192—227 (1943).
2. Kaplansky, I., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **38**, 538—540 (1952).
3. Пуусемп П., Уч. зап. Тартуск. ун-та, № 366, 76—104 (1975).
4. Курош А. Г., Теория групп, М., «Наука», 1967.
5. Фукс Л., Бесконечные абелевы группы, т. 1, М., «Мир», 1974.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 27/III 1980

P. PUUSEMP

PERIOODILISE ABELI RÜHMA MÄÄRATAVUSEST OMA ENDOMORFISMIPOOLRÜHMA ABIL

Artiklis on käsitletud järgmist probleemi: millal isomorfismist $\operatorname{End} A \simeq \operatorname{End} B$ ($\operatorname{End} A$ — rühma A kõigi endomorfismide poolrühm) järeldub rühmade A ja B isomorfism $A \simeq B$. Üldjuhul ei ole sellele küsimusele vastust, mõningaid tulemusi on avaldatud artiklites [1–3]. Näiteks on artiklis [3] tõestatud järgmine tulemus: isomorfismist $\operatorname{End} A \simeq \operatorname{End} B$, kus A on lõplik Abeli rühm, järeldub isomorfism $A \simeq B$. Käesolevas artiklis on näidatud, et isomorfismist $\operatorname{End} A \simeq \operatorname{End} B$, kus A on perioodiline Abeli rühm, mille elementide järgud on tõkestatud, järeldub isomorfism $A \simeq B$.

P. PUUSEMP

ON THE DETERMINITY OF A PERIODIC ABELIAN GROUP BY ITS SEMIGROUP OF ENDOMORPHISMS

Let a group A be fixed and let End A denote the semigroup of all endomorphisms of the group A. If from the isomorphism of semigroups End A and End B follows the isomorphism of groups A and B, then we say that the group A is determined by its semigroup of endomorphisms. In general, the necessary and sufficient conditions for determinity of an arbitrary group by its semigroup of endomorphisms are unknown. Some results on this problem are presented in the papers [1-3]. For example, in the paper [3] it is shown, that from the direct decomposition $A=A_1\times\ldots\times A_n$ and the isomorphism End $A\simeq$End B follows the direct decomposition $B=B_1\times\ldots\times B_n$ with a property End $A_i\simeq$End B_i for any $i\in\{1,\ldots,n\}$. From this result it follows simply that an arbitrary finite abelian group can be determined by its semigroup of endomorphisms (see [3], theorem 4.2). In this paper, using the methods of the paper [3], the last result is generalized. It is shown that from the isomorphism End $A\simeq$End B, where A is a periodic abelian group with bounded orders of its elements, follows the isomorphism of groups A and B.

It should be noted that in great many papers a similar problem for rings of all endomorphisms of abelian groups is considered. For example, it is well known that from the isomorphism of rings of all endomorphisms of two periodic abelian groups A and B follows the isomorphism of groups A and B.