

Ю. ЭНГЕЛЬБРЕХТ

## О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

(Представлена Н. Алумяэ)

На возможность существования уединенных волн — солитонов — в нелинейной диспергирующей среде указывалось в [1-3]. Причинами дисперсии волн деформации в твердой среде могут быть микроструктура материала [4], последствие [5] и боковые границы волноводов [6], а нелинейность обуславливается конечностью деформации и физическими эффектами (напр., модель теории упругости типа Мэрнагана). Асимптотический анализ таких нелинейных волновых процессов возможен путем построения уравнений переноса вдоль соответствующих характеристик с помощью предложенного в [7, 8] модифицированного лучевого метода. Такой подход был предпринят при изучении распространения звуковых волн в жидкости [9], радиоволн [7] и электромагнитных волн в плазме [2, 3, 8]. Однако во всех этих работах построение уравнений переноса проводилось без учета взаимодействия отдельных волн. В [10, 11], где исследовались ударные волны в жидкости и волны деформации в твердой среде, было показано, что взаимодействие этих волн может быть учтено с помощью фазовых функций  $\Phi_i$ , характеризующих фазовые сдвиги.

Пусть  $\zeta_i$  и  $\sigma$  — фазовая и пространственная переменные. Тогда амплитудные факторы  $\beta_i$  ( $\zeta_i, \sigma$ ) определяются из решений соответствующих уравнений переноса, а взаимодействие моделируется изменением фазовой переменной  $\zeta_i$ , являющейся функцией от  $\Phi_i$ . Фазовые функции  $\Phi_i$  определяются из отдельных соотношений. В настоящей работе были поставлены две цели: продемонстрировать эффективность такого аналитического подхода [11] к решению задачи взаимодействия солитонов и сравнить полученные результаты с данными численного решения задачи [1].

Волновой процесс в нелинейной слабодиспергирующей среде описывается матричным уравнением [8, 11]

$$I(\partial \mathbf{U} / \partial t) + A(\mathbf{U})(\partial \mathbf{U} / \partial X) + \varepsilon \sum_p B_{rs}(\partial^p \mathbf{U} / \partial X^r \partial t^s) = 0, \\ r+s=p, \quad p \geq 3, \quad (1)$$

и при нулевых начальных данных ставится краевая задача с условием

$$\mathbf{U}(X, t) \big|_{X=0} = \vec{\varphi}(t). \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{U}$  — вектор неизвестных полевых величин,  $A(\mathbf{U})$ ,  $B_{rs}$  — матрицы, характеризующие свойства среды,  $I$  — единичная матрица,  $\varepsilon$  — малый



параметр. Исходя из предпосылок теории упругости, за малый параметр в твердой среде обычно принимается величина, характеризующая интенсивность краевого воздействия. Для получения более компактной записи выбираем

$$\varepsilon = 3/2 |1 + m_0| \alpha_0 c_0^{-1}, \quad m_0 = 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) (\lambda + 2\mu)^{-1},$$

где  $\lambda, \mu$  — параметры Лямэ,  $\gamma_i, i = 1, 2, 3$  — модули упругости третьего порядка,  $\alpha_0$  — максимальная амплитуда начальной скорости,  $c_0$  — скорость продольной волны в рамках линейной модели.

Асимптотический анализ с привлечением лучевого метода [11] позволяет разложить волновой процесс на отдельные волны со скоростями  $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ . После введения лучевых координат

$$\xi_i = [c_i t - X - \varepsilon \Phi_i(X, t)] \tau_c^{-1}, \quad \sigma = \varepsilon X \tau_c^{-1}$$

можно вывести уравнения переноса для продольных волн (ограничимся уравнениями переноса первого порядка)

$$\partial \beta_i / \partial \sigma + \text{sign}(1 + m_0) \beta_i (\partial \beta_i / \partial \xi_i) - \Omega^{-2} (\partial^3 \beta_i / \partial \xi_i^3) = 0 \quad (3)$$

и определить фазовые функции из соотношений

$$\Phi_i = 3/2 (1 + m_0) \sum_{j \neq i} (c_i - c_j)^{-1} \alpha_0 \int_0^{\xi_j} \beta_j d\xi, \quad j \neq i. \quad (4)$$

Здесь  $\tau_c$  — характерная длина импульса (длина волны),  $\Omega^2$  — параметр дисперсии [5]. Амплитудный фактор  $\beta_i$  связан с вектором  $U_0$  соотношением  $U_0 = \beta_i \alpha_0 \mathbf{r}_i$ , где  $\mathbf{r}_i$  — структурные векторы, обычно равные правым собственным векторам матрицы  $A_0$ . Индекс «0» обозначает первый член в разложении по степеням малого параметра  $\varepsilon$  [11]. Таким образом, каждая отдельная волна описывается уравнением Кортевега—де Вриза (КдВ). Необходимо подчеркнуть, что уравнение (3) является асимптотическим, т. е. волны в области взаимодействия суммируются только с точностью данного приближения. Амплитуды волн до и после взаимодействия, следовательно, равны, но появляются фазовые сдвиги. Из краевой задачи (1), (2) при этом вытекают задачи Коши для уравнений переноса (3) с начальными условиями

$$\beta_i(\xi_i, 0) = \kappa_i(\xi_i).$$

Известно [1-3], что уравнение КдВ допускает автомодельное решение при начальных условиях

$$\kappa_i(\xi_i) = a_i \text{sech}^2(\xi_i D_i^{-1}), \quad D_i = (12 \Omega^{-2} a_i^{-1})^{1/2}, \quad (5)$$

которое описывает солитоны. Известно также, что численное решение уравнений (3) конечно-разностным методом [1, 2] дает изменение фазовых скоростей при взаимодействии двух солитонов. Рассмотрим этот процесс более подробно.

Пусть заданы два начальных солитона (5) с амплитудами  $a_1$  и  $a_2$  ( $a_1 > a_2$ ) и расстоянием между максимумами  $12D_1$ . Имея в виду, что относительная по соотношению  $c_0$  скорость солитонов  $\omega_i$  пропорциональна амплитуде ( $\omega_i = 1/3 a_i$ ) [3], придем к следующему: солитон большей амплитуды  $a_1$ , находившийся вначале сзади, догоняет солитон меньшей амплитуды  $a_2$ , и после их взаимодействия суммарный импульс вновь распадается на два солитона: теперь, однако, солитон большей амплитуды впереди, а солитон меньшей амплитуды сзади.



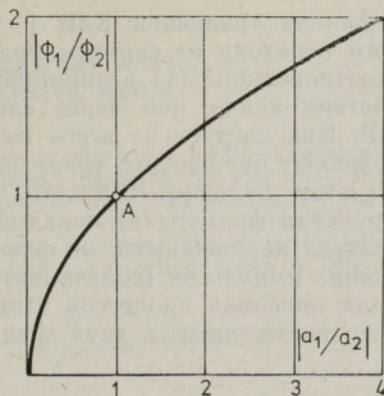
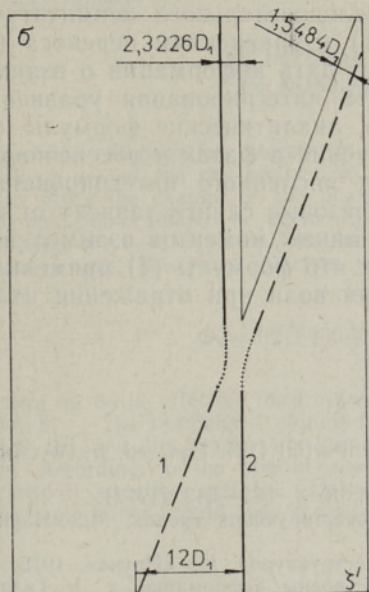


Рис. 2.

◁ Рис. 1.

Для  $a_1 = 180$ ,  $a_2 = 80$  этот процесс на плоскости  $\sigma$ ,  $\zeta'$  изображен на рис. 1, заимствованном из [2]. Здесь  $\Omega = 50$ ,  $\zeta'$  соответствует скорости  $c_0 + \omega_2$ , а линии 1, 2 показывают траектории максимумов солитонов. Численный расчет привел к следующим фазовым сдвигам:  $\epsilon\Phi_1\tau_c^{-1} = -2,3226 D_1$ ,  $\epsilon\Phi_2\tau_c^{-1} = 1,5484 D_1$ ,  $D_1 = 0,0069$ . Относительное смещение траекторий при этом  $\Phi_1/\Phi_2 = -1,5$ . Вычисляем их относительное смещение согласно формуле (4). Из формулы (5) вытекает

$$\int_0^{\tau_i} \beta_j d\zeta = 2D_j.$$

Из (4) при  $i = 1$ ,  $j = 2$  имеем

$$\Phi_1 = 3(1+m_0)(c_2 - c_1)^{-1}D_2$$

и при  $i = 2$ ,  $j = 1$

$$\Phi_2 = 3(1+m_0)(c_1 - c_2)^{-1}D_1,$$

откуда получаем результат  $\Phi_1/\Phi_2 = -1,5$ , полностью совпадающий с данными численного интегрирования [1]. При этом  $\Phi_1 < 0$ ,  $\Phi_2 > 0$ . Амплитуды, полученные в [1], имеют погрешность порядка 0,5%. Если амплитуды взаимодействующих солитонов близки, то в ходе численного решения могут возникнуть и более существенные погрешности. В случае  $a_1 = 110$ ,  $a_2 = 100$  из [1] вытекает  $\Phi_1/\Phi_2 = -1,000$ . Аналитический расчет по формулам (4) показывает, однако, что  $\Phi_1/\Phi_2 = -1,0488$ , т. е. погрешность численного решения составляет около 5%.

На основе формул (4) была определена также зависимость относительного смещения траекторий солитонов от амплитуд

$$\Phi_1 : \Phi_2 = -(a_1 : a_2)^{1/2}$$

(см. рис. 2). Для солитонов, распространяющихся в одном направлении, кривая на рис. 2 действительна при  $a_1 a_2^{-1} > 1$  (начиная с точки A), для встречных же солитонов она действительна при любых  $a_1$ , если  $a_2 \neq 0$ .



Анализ уравнения КдВ  $[1-3]$  без последовательного асимптотического перехода от системы уравнений (1) к уравнениям переноса (3) и соотношениям (4) в принципе не может дать информации о взаимодействии иначе, чем через сложный путь интегрирования уравнения КдВ. Как следует из всего изложенного, аналитические формулы (4) позволяют без особого труда найти изменения в фазах и обеспечивают при этом большую точность, чем метод численного интегрирования. Структура формул (4) показывает, что фазовые сдвиги зависят от показателя нелинейности, от скоростей и главных моментов взаимодействующих импульсов (солитонов). Отметим, что формулы (4) применимы и для описания процессов взаимодействия волн при отражении их от поверхности раздела двух сред.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Zabusky, N. J., In: Proc. Symp. Non-Linear Partial Diff. Eqs., ed. by W. Ames, New York, Acad. Press, 1967, p. 223—258.
2. Jeffrey, A., Kakutani, T., SIAM Rev., **14**, № 4, 582—643 (1972).
3. Карпман В. И., Нелинейные волны в диспергирующих средах, М., «Наука», 1973.
4. Кунин И. А., Теория упругих сред с микроструктурой, М., «Наука», 1975.
5. Энгельбрехт Ю. К., В сб.: Нелинейные волны деформации, т. I, Таллин, изд-во АН ЭССР, 1978, с. 169—184.
6. Островский Л. А., Сутин А. М., Прикл. мат. и мех., **41**, вып. 3, 531—537 (1977).
7. Gorschkov, K. A., Ostrovsky, L. A., Pelinovsky, E. N., Proc. IEEE, **62**, № 11, 1511—1517 (1974).
8. Taniuti, T., Suppl. Progr. Theor. Phys., № 55, 1—35 (1974).
9. Руденко О. В., Солуян С. И., Теоретические основы нелинейной акустики, М., «Наука», 1975.
10. Tatsumi, T., Tokunaga, H., J. Fluid Mech., **65**, № 3, 581—601 (1974).
11. Engelbrecht, J., Int. J. Non-Linear Mech., **12**, № 3, 189—201 (1977).

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР

\* Поступила в редакцию  
12/I 1979

J. ENGELBRECHT

#### SOLITONIDE INTERAKTSIOON MITTELINEAARSES DISPERGEERUVAS KESKKONNAS

Artiklis on analüüsitud solitonide interaktsiooni kiiremeetodil. On tuletatud valem faasinihete arvutamiseks ning võrreldud kahe solitoni interaktsiooni korral selle abil saadud tulemusi numbrilise integreerimise teel saadud tulemustega [1]. Iga solitoni on kirjeldatud tema transpordivõrrandi abil, interaktsiooni kirjeldamiseks on kasutatud superpositsiooniprintsiipi ning faasinihete arvutust.

J. ENGELBRECHT

ON INTERACTION OF SOLITARY WAVES  
IN NONLINEAR DISPERSIVE MEDIA

The wave propagation process in nonlinear elastic dispersive media is analyzed by making use of the ray method. Beside the transport equation, the successive analysis also gives the change of the phase velocity for the interaction process. In this case the phase co-ordinate is given by  $\xi_i = [c_i t - X - \varepsilon \Phi_i(X, t)] \tau_e^{-1}$ , where  $c_i$  is the velocity,  $\Phi_i$  — the phase function,  $\varepsilon$  — the small parameter and  $\tau_e$  — the effective wave length. The phase function in the process of  $j$  interacting waves is determined by

$$\Phi_i = 3/2(1+m_0) \sum_{j \neq i} (c_i - c_j)^{-1} \alpha_0 \int_0^{\xi_j} \beta_j d\xi, \quad j \neq i,$$

where  $m_0$  is the effective third order modulus of elasticity,  $\alpha_0$  — the maximum amplitude, and  $\beta_j$  — the normalized amplitude function. The interaction of two solitary waves is analyzed and the results are compared with those obtained by numerical integration [1]. According to the present analysis, every single soliton is described by its own transport equation and the interaction leads to the change of the wave path while the amplitudes could be superposed.