

П. КАРД

## К ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ПЛЕНОК ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ СВЕТА

P. KARD. MITTENOMOGEENSETE OPTILISTE KILEDE TEORIAST VALGUSE KALDU LANGE-  
MISE PUHUL

P. KARD. ON THE THEORY OF THE INHOMOGENEOUS OPTICAL FILMS IN THE CASE OF  
OBLIQUE INCIDENCE OF LIGHT

В предыдущей статье [1] был предложен новый метод решения одномерных волновых уравнений, расширяющий круг уравнений, имеющих решение в замкнутом виде. Там же этот метод был применен к нахождению матрицы интерференции неоднородной пленки при нормальном падении света. В настоящем сообщении мы рассмотрим возможности этого метода в случае наклонного падения света, поляризованного перпендикулярно плоскости падения.

Волновое уравнение имеет в этом случае вид

$$d^2U/dz^2 + k^2(n^2(z) - p^2)U = 0, \quad (1)$$

где

$$p = n_0 \sin \theta_0, \quad (2)$$

$n_0$  — показатель преломления исходной среды и  $\theta_0$  — угол падения. Положим

$$s = n^{1/2}, \quad (3)$$

$$u = \int n(z) dz \quad (4)$$

и

$$A = sU. \quad (5)$$

Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$A^{-1}d^2A/du^2 - s^{-1}d^2s/du^2 + k^2(1 - p^2s^{-4}) = 0. \quad (6)$$

Если положим

$$d^2s/du^2 + f(u)s = 0, \quad (7)$$

то  $A$  удовлетворяет уравнению

$$d^2A/du^2 + [f(u) + k^2(1 - p^2s^{-4})]A = 0. \quad (8)$$

Таким образом, уравнение (1) сведено к системе уравнений (7) и (8). Если при некоторой заданной функции  $f(u)$  оба эти уравнения имеют

решения в замкнутом виде, то, обозначив одно из решений уравнения (7) через  $s_1$ , получим замкнутое решение уравнения (1), согласно формуле (5), в виде

$$U = s_1^{-1} A. \quad (9)$$

Зависимость показателя преломления  $n$  от координаты  $z$  определяется формулами

$$n = s_1^2 \quad (10)$$

и

$$z = \sigma^{-1}(s_2/s_1) + \text{const}, \quad (11)$$

вытекающими из формул (3) и (4). В формуле (11)  $s_2$  — линейно независимое от  $s_1$  решение уравнения (7), а

$$\sigma = s_1 ds_2/du - s_2 ds_1/du \quad (12)$$

— его вронскиан.

В отличие от случая нормального падения света изложенный метод не привел до сих пор для наклонного падения к обнаружению новых примеров уравнений вида (1), разрешимых в замкнутой форме. Тем не менее метод заслуживает внимания как путь возможного обнаружения подобных примеров в будущем. Помимо этого, он может быть полезен для исследования уже известных уравнений. Приведем как иллюстрацию сказанного один пример. Примем в уравнении (1)

$$n(z) = a^2(1 + bz/h)^{-1}, \quad (13)$$

где  $h$  — толщина слоя, а  $a$  и  $b$  — безразмерные числа. Для решения волнового уравнения

$$d^2U/dz^2 + k^2 \left[ \frac{a^4}{(1 + bz/h)^2} - p^2 \right] U = 0 \quad (14)$$

возьмем

$$f = -b^2/4a^4h^2. \quad (15)$$

Тогда уравнение (7) получит вид

$$d^2s/du^2 - (b^2/4a^4h^2)s = 0, \quad (16)$$

решения которого примем в виде:

$$s_1 = a \exp(-bu/2a^2h), \quad (17)$$

$$s_2 = a \exp(bu/2a^2h).$$

Отсюда

$$\sigma = b/h \quad (18)$$

и, согласно формуле (11),

$$z = (h/b) [\exp(bu/a^2h) - 1], \quad (19)$$

а в силу формулы (10)

$$n = a^2 \exp(-bu/a^2h). \quad (20)$$

Исключая  $u$  из формул (19) и (20), находим

$$n(z) = a^2(1 + bz/h)^{-1},$$

что совпадает с заданной формулой (13). Остается решить уравнение (8), принимающее в данном случае вид



$$d^2A/du^2 + [k^2 - b^2/4a^4h^2 - (k^2p^2/a^4) \exp(2bu/a^2h)]A = 0. \quad (21)$$

Это уравнение сводится, как известно, к уравнению Бесселя и его решение таково:

$$A(u) = Z_\nu((ikhpb/b) \exp(bu/a^2h)), \quad (22)$$

где  $Z_\nu$  — функция Бесселя порядка  $\nu$  и

$$\nu = \left( \frac{1}{4} - \frac{a^4h^2k^2}{b^2} \right)^{1/2}. \quad (23)$$

Окончательно получаем решение уравнения (14), согласно формулам (9), (17), (19) и (22), в виде

$$U(z) = (1+bz/h)^{1/2} Z_\nu((ikhpb/b)(1+bz/h)). \quad (24)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кард П. Об одномерных волновых уравнениях, решаемых в замкнутом виде. — Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 1977, т. 26, № 3, с. 252—259.

Тартуский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
6/II 1978