EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1978, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1978, № 3

УДК 535.41

П. КАРД

К ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ПЛЕНОК ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ СВЕТА

P. KARD. MITTEHOMOGEENSETE OPTILISTE KILEDE TEOORIAST VALGUSE KALDU LANGEMISE PUHUL

P. KARD. ON THE THEORY OF THE INHOMOGENEOUS OPTICAL FILMS IN THE CASE OF OBLIQUE INCIDENCE OF LIGHT

В предыдущей статье [1] был предложен новый метод решения одномерных волновых уравнений, расширяющий круг уравнений, имеющих решение в замкнутом виде. Там же этот метод был применен к нахождению матрицы интерференции неоднородной пленки при нормальном падении света. В настоящем сообщении мы рассмотрим возможности этого метода в случае наклонного падения света, поляризованного перпендикулярно плоскости падения.

Волновое уравнение имеет в этом случае вид

$$d^2U/dz^2+k^2(n^2(z)-p^2)\,U=0, \tag{1}$$

где

$$p=n_0\sin\vartheta_0, \tag{2}$$

n_0 — показатель преломления исходной среды и ϑ_0 — угол падения. Положим

$$s=n^{1/2}, \tag{3}$$

$$u=\int n(z)\,dz \tag{4}$$

и

$$A=sU. \tag{5}$$

Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$A^{-1}d^2A/du^2-s^{-1}d^2s/du^2+k^2(1-p^2s^{-4})=0. \tag{6}$$

Если положим

$$d^2s/du^2+f(u)\,s=0, \tag{7}$$

то A удовлетворяет уравнению

$$d^2A/du^2+[f(u)+k^2(1-p^2s^{-4})]A=0. \tag{8}$$

Таким образом, уравнение (1) сведено к системе уравнений (7) и (8). Если при некоторой заданной функции $f(u)$ оба эти уравнения имеют решения в замкнутом виде, то, обозначив одно из решений уравнения (7) через s_1, получим замкнутое решение уравнения (1), согласно формуле (5), в виде

$$U = s_1^{-1} A. \tag{9}$$

Зависимость показателя преломления n от координаты z определяется формулами

$$n = s_1^2 \tag{10}$$

и

$$z = \sigma^{-1}(s_2/s_1) + \text{const}, \tag{11}$$

вытекающими из формул (3) и (4). В формуле (11) s_2 — линейно независимое от s_1 решение уравнения (7), а

$$\sigma = s_1\, ds_2/du - s_2\, ds_1/du \tag{12}$$

— его вронскиан.

В отличие от случая нормального падения света изложенный метод не привел до сих пор для наклонного падения к обнаружению новых примеров уравнений вида (1), разрешимых в замкнутой форме. Тем не менее метод заслуживает внимания как путь возможного обнаружения подобных примеров в будущем. Помимо этого, он может быть полезен для исследования уже известных уравнений. Приведем как иллюстрацию сказанного один пример. Примем в уравнении (1)

$$n(z) = a^2(1 + bz/h)^{-1}, \tag{13}$$

где h — толщина слоя, а a и b — безразмерные числа. Для решения волнового уравнения

$$d^2U/dz^2 + k^2\left[\frac{a^4}{(1+bz/h)^2} - p^2\right]U = 0 \tag{14}$$

возьмем

$$f = -b^2/4a^4h^2. \tag{15}$$

Тогда уравнение (7) получит вид

$$d^2s/du^2 - (b^2/4a^4h^2)\,s = 0, \tag{16}$$

решения которого примем в виде:

$$\begin{aligned} s_1 &= a \exp(-bu/2a^2h), \\ s_2 &= a \exp(bu/2a^2h). \end{aligned} \tag{17}$$

Отсюда

$$\sigma = b/h \tag{18}$$

и, согласно формуле (11),

$$z = (h/b)\,[\exp(bu/a^2h) - 1], \tag{19}$$

а в силу формулы (10)

$$n = a^2 \exp(-bu/a^2h). \tag{20}$$

Исключая u из формул (19) и (20), находим

$$n(z) = a^2(1 + bz/h)^{-1},$$

что совпадает с заданной формулой (13). Остается решить уравнение (8), принимающее в данном случае вид

$$d^2A/du^2+[k^2-b^2/4a^4h^2-(k^2p^2/a^4)\exp(2bu/a^2h)]A=0. \tag{21}$$

Это уравнение сводится, как известно, к уравнению Бесселя и его решение таково:

$$A(u)=Z_\nu((ikhp/b)\exp(bu/a^2h)), \tag{22}$$

где Z_ν — функция Бесселя порядка ν и

$$\nu=\left(\frac{1}{4}-\frac{a^4h^2k^2}{b^2}\right)^{1/2}. \tag{23}$$

Окончательно получаем решение уравнения (14), согласно формулам (9), (17), (19) и (22), в виде

$$U(z)=(1+bz/h)^{1/2}Z_\nu((ikhp/b)(1+bz/h)). \tag{24}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кард П. Об одномерных волновых уравнениях, решаемых в замкнутом виде. — Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 1977, т. 26, № 3, с. 252—259.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 6/II 1978