EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1978, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1978, № 3

УДК 530.12 : 531.51

И. ПИЙР, Эвэ КИКАС

ГРАВИТАЦИОННОЕ САМОДЕЙСТВИЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ СКАЛЯРНЫХ ВОЛН

Методом последовательных приближений рассмотрена сферически-симметричная задача о гравитационном самодействии скалярных волн. В качестве исходного приближения взята выходящая из начала координат сферическая волна в плоском пространстве-времени. С применением недиагональной формы метрики, соответствующей сферически-симметричным координатам Бонди, вычислены, во-первых, поправки первого порядка к плоской метрике, вызванные тензором энергии-импульса скалярного поля, и, во-вторых, поправки к скалярному полю, обусловленные искажениями метрики, или т. н. поправки гравитационного самодействия. Показано, что в результате гравитационного самодействия появляется длительное последействие, или хвост излучения, форма которого не зависит от того, берется ли в основу теории скалярного поля общековариантное волновое уравнение или конформно инвариантное скалярное уравнение. Подробно исследованы также трудности, возникающие при использовании диагональной метрики, традиционной для обычных сферически-симметричных задач.

§ 1. Введение

По примеру классической электродинамики в рамках специальной теории относительности разработан мощный аппарат общей теории поля. В традиционной трактовке уравнения полей являются линейными дифференциальными уравнениями (или системами уравнений) в частных производных не выше второго порядка. Естественно, что эти уравнения остаются линейными и после обобщения их из Лоренц-ковариантной формы, типичной для специальной теории относительности, в общековариантную форму. Общековариантные уравнения позволяют описывать поведение соответствующего поля не только в плоском, но и в произвольном искривленном пространстве-времени.

Оставляя тензорный характер потенциалов поля Φ_A пока нефиксированным, запишем эти уравнения в виде

$$C^A_a\Phi_A+C^{A\alpha}_a\Phi_{A;\alpha}+C^{A\alpha\beta}_a\Phi_{A;\alpha;\beta}=0 \qquad (1.1)$$

(коэффициенты $C_a{}^A$, ... — заданные функции координат x^α, точка с запятой означает ковариантную производную, по повторяющимся индексам проводится суммирование). Однако при последовательном учете гравитации к уравнениям поля (1.1) следует добавить уравнения Эйнштейна

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \varkappa T_{\alpha\beta}, \tag{1.2}$$

где в тензор энергии-импульса гравитирующей материи $T_{\alpha\beta}$ входит в качестве одной из составляющих тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}{}^{\Phi}$ рассматриваемого поля Φ_A. Так как $T_{\alpha\beta}{}^{\Phi}$ является квадратичным выражением относительно потенциалов Φ_A и их производных, то тем самым первоначальная линейная теория автоматически переходит в нелинейную *.

Если, в частности, $T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}{}^{\Phi}$, то совместная система (1.1), (1.2) описывает поведение поля Φ_A в пространстве-времени, свойства которого определяются самим полем Φ_A. Такую проблему можно назвать проблемой гравитационного самодействия для поля Φ_A. При рассмотрении конкретных точных решений системы (1.1), (1.2), например, решения Рейсснера—Нордстрема, описывающего электрическое и гравитационное поля точечного электрического заряда, или соответствующего решения для скалярного поля [1], или решения, описывающего плоские волны, аспект самодействия остается обычно незаметным ввиду того, что в этих весьма специальных решениях нелинейные эффекты не играют существенной роли. Аспект гравитационного самодействия выступает на передний план в том случае, когда нелинейность существенно искажает характер решения, который известен из линейной теории (напр., проблемы суперпонирования решений и излучения изолированных источников). Для таких задач, как правило, точные решения пока неизвестны. Все приближенные методы, применяемые для решения таких задач, по существу являются разновидностями метода последовательных приближений, органически приводящего к аспекту самодействия. Из-за сложности задач самодействия, связанных с волновыми решениями, целесообразно начать с простейших частных случаев. Сравнительно простой моделью излучения изолированных источников являются сферические волны.

Гравитационное самодействие электромагнитных сферических волн исследовано методом последовательных приближений в [2]. В качестве исходного приближения взято электромагнитное поле в плоском пространстве-времени, представляющее суперпозицию статического сферически-симметричного и запаздывающего аксиально-симметричного дипольного электромагнитного полей. В предположении, что искажение метрики, обусловленное электромагнитным полем, мало, были вычислены поправки к плоской метрике и поправки к электромагнитному полю, обусловленные, в свою очередь, найденными поправками к метрике. Хотя эта задача — одна из простейших задач с электромагнитным излучением, ее конечные формулы довольно громоздки и физически трудно интерпретируемы. Усложнения обусловлены главным образом тем, что дипольное электромагнитное излучение зависит от угловых переменных. В результате самодействия это приводит к поправкам, обладающим, кроме дипольной, еще квадрупольной и октупольной структурами. Гораздо проще было бы исследовать гравитационное самодействие сферических волн на примере не зависящего от угловых переменных монопольного излучения. Постановка такой задачи в электродинамике невозможна по причине отсутствия электромагнитного монопольного излучения, но она формулируема в случае скалярного поля. Срав-

* Отметим, что нелинейности, связанные с взаимодействием различных полей (напр., электромагнитного и электронно-позитронного), появляются и в специальной теории относительности, т. е. без учета гравитации, но тогда они носят в основном квантовый характер.

нительно простая центрально-симметричная задача о гравитационном самодействии скалярных волн поучительна не только с точки зрения лучшего понимания самого явления самодействия — она, на наш взгляд, очень ясно демонстрирует значение удачного выбора координатной системы в общей теории относительности и природу трудностей, которые возникают при использовании диагональной метрики.

§ 2. Постановка задачи

В специальной теории относительности потенциал Φ свободного безмассового скалярного поля удовлетворяет волновому уравнению Даламбера. Записанное в общековариантном виде

$$g^{\alpha\beta}\Phi_{;\alpha;\beta}\equiv\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\Phi_{,\alpha})_{,\beta}=0 \tag{2.1}$$

($g=\det g_{\alpha\beta}$, запятая означает обычную производную), оно применимо и в общей теории относительности. Однако по мнению некоторых авторов (см., напр., [3, 4]), уравнения безмассовых волновых полей должны быть конформно инвариантными, т. е. их форма не должна меняться при конформном преобразовании

$$g_{\alpha\beta}\to\tilde{g}_{\alpha\beta}=\sigma^2 g_{\alpha\beta},\qquad \Phi\to\tilde{\Phi}=\frac{1}{\sigma}\Phi$$

(σ — произвольная функция координат). Уравнение (2.1) этим свойством не обладает, но им обладают уравнения Максвелла и т. н. конформно инвариантное скалярное уравнение

$$g^{\alpha\beta}\Phi_{;\alpha;\beta}+\frac{1}{6}R\Phi=0, \tag{2.2}$$

совпадающее в плоском пространстве-времени с уравнением (2.1). Мы не отдаем предпочтения ни одному из уравнений (2.1) и (2.2), а берем за основу уравнение вида

$$g^{\alpha\beta}\Phi_{;\alpha;\beta}+\eta R\Phi=0, \tag{2.3}$$

где η — произвольный численный параметр. Уравнение (2.3) можно вывести из вариационного принципа

$$\delta\int L\sqrt{-g}\,dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3=0,$$

где

$$L=g^{\alpha\beta}\Phi_{,\alpha}\Phi_{,\beta}-\eta R\Phi^2,$$

и ему соответствует тензор энергии-импульса

$$\begin{aligned}T_{\alpha\beta}=(1-2\eta)\Phi_{,\alpha}\Phi_{,\beta}-\frac{1}{2}(1-4\eta)g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\Phi_{,\mu}\Phi_{,\nu}-\eta G_{\alpha\beta}\Phi^2+\\+2\eta\Phi(g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\Phi_{;\mu;\nu}-\Phi_{;\alpha;\beta}).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Задача о гравитационном самодействии монопольных сферических волн состоит в нахождении сферически-симметричного совместного решения волнового уравнения (2.3) и уравнений Эйнштейна (1.2) с тензором энергии-импульса вида (2.4). Кроме того, предъявим требование: в пределе $\varkappa\to 0$ пространство-время плоское и существуют расходящиеся из начала координат (или прямые) сферические волны, т. е.

$$\lim_{x\to 0}\Phi(t,r)=\Phi_0(t,r)\equiv\frac{1}{r}F(t-r). \tag{2.5}$$

Для большей определенности предположим еще, что скалярное поле нестатично лишь в конечном интервале волнового аргумента $u = t-r$, т. е.

$$F(u)=\begin{cases} F_0=\text{const}, & u<u_0;\\ f(u), & u_0<u<u_1;\\ F_1=\text{const}, & u>u_1.\end{cases} \tag{2.6}$$

В известных монографиях (как, напр., [5,6]) для рассмотрения сферически-симметричных задач применяется диагональная метрика в сочетании с полярными пространственными координатами. Наиболее общая форма этой метрики такова:

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{e}^A\,\mathrm{d}t^2-\mathrm{e}^B\,\mathrm{d}r^2-r^2(\mathrm{e}^C\,\mathrm{d}\vartheta^2+\sin^2\vartheta\,\mathrm{e}^D\,\mathrm{d}\varphi^2) \tag{2.7}$$

(A, B, C, D — функции от переменных t и r), но ее можно упростить подходящим выбором координат t и r. В [5] принято $C=D$, а в [6] поставлено более сильное условие: $C=D=0$.

В связи с изучением гравитационных волн большую популярность приобрели недиагональные метрики с использованием координаты излучения u, постоянной вдоль любой нулевой геодезической, выходящей из точки $r=0$ [7]. В случае сферической симметрии такую метрику можно задать в следующем виде:

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{e}^\alpha\,\mathrm{d}u^2+2\mathrm{e}^\beta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r-r^2(\mathrm{e}^\gamma\,\mathrm{d}\vartheta^2+\sin^2\vartheta\,\mathrm{e}^\delta\,\mathrm{d}\varphi^2), \tag{2.8}$$

где α, β, γ, δ — функции только переменных u и r.

Для решения вышепоставленной задачи гравитационного самодействия мы воспользуемся метрикой (2.8), а также, как и в [2], методом последовательных приближений.

§ 3. Гравитационное поле в первом приближении

Итак, без учета гравитации имеем скалярное поле Φ_0 (см. (2.5) и (2.6)) в плоском пространстве-времени с метрикой (2.8), где $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$. Предполагая, что поправки к метрике плоского пространства-времени, обусловленные тензором энергии-импульса скалярного поля Φ_0, малы, мы можем ограничиться в уравнениях Эйнштейна членами, линейными относительно α, β, γ, δ, т. е. можем исходить из линеаризованных уравнений Эйнштейна:

$$\frac{1}{r}(\dot\alpha+\alpha'-2\dot\beta)+\frac{1}{2}(\alpha''-\ddot\gamma-\ddot\delta)-\dot\beta'=$$

$$=\frac{\varkappa}{r^2}\Big[(1-2\eta)\dot F^2-2\eta F\ddot F+\frac{2}{r}\eta F\dot F+\frac{1}{r^2}\eta F^2\Big],$$

$$\frac{1}{2r}(2\alpha'-\dot\gamma-\dot\delta)+\frac{1}{2}(\alpha''-\dot\delta'-\dot\gamma')-\dot\beta'=\frac{\varkappa}{r^3}\Big[(6\eta-1)F\dot F+\frac{1}{r}\eta F^2\Big],$$

$$\frac{1}{r}(2\beta'-\gamma'-\delta')-\frac{1}{2}(\gamma''+\delta'')=\frac{\varkappa}{r^4}(1-6\eta)F^2,$$

$$\frac{1}{r^2}(2\beta-\alpha-\gamma)+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{2}(3\dot{\gamma}+\dot{\delta}-3\gamma'-\delta')-\alpha'+\beta'\right]+\dot{\gamma}'-\frac{1}{2}\gamma''=\frac{\varkappa}{r^4}\eta F^2,$$
$$\frac{1}{r^2}(2\beta-\alpha-\delta)+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{2}(3\dot{\delta}+\dot{\gamma}-3\delta'-\gamma')-\alpha'+\beta'\right]+\dot{\delta}'-\frac{1}{2}\delta''=\frac{\varkappa}{r^4}\eta F^2, \tag{3.1}$$
$$\dot{\gamma}-\dot{\delta}=0,$$
$$\gamma'-\delta'=0$$

(здесь штрих означает дифференцирование по r, а точка над буквой — дифференцирование по u). Из последних двух уравнений (3.1) видно, что

$$\gamma=\delta. \tag{3.2}$$

Остальные уравнения (3.1) в таком случае дают

$$\alpha=r\dot{\gamma}+\frac{\varkappa}{r}\left[\int\limits_{-\infty}^{u}\dot{F}^2(\tau)\,d\tau-2\eta F\dot{F}+(-2m)\right]+\frac{\varkappa}{r^2}\eta F^2, \tag{3.3}$$

$$\beta=\frac{(r\gamma)'}{2}+\frac{\varkappa}{4r^2}(6\eta-1)F^2. \tag{3.4}$$

Член $-\dfrac{2\varkappa m}{r}$ в формуле (3.3) описывает в линейном приближении гравитационное поле точечной массы m; этот член здесь и в дальнейшем заключен в скобки как излишний для данной задачи, однако полезный при обсуждении результатов последнего параграфа.

Из формул (3.2)—(3.4) видно, что метрика определена с точностью до произвольной функции $\gamma(u, r)$. На $\gamma(u, r)$ следует наложить некоторые естественные ограничения:

1) из требования псевдоевклидовости метрики (2.8) с (3.2)—(3.4) в пространственной бесконечности следует, что

$$\lim_{r\to\infty}\gamma=0, \quad \lim_{r\to\infty} r\dot{\gamma}=0, \quad \lim_{r\to\infty}(r\gamma)'=0; \tag{3.5}$$

2) согласно характеру задачи, γ должна, аналогично скалярному полю Φ_0 и остальным членам в формулах (3.3), (3.4), иметь вид расходящихся из начала координат сферических волн и быть нестатической лишь при $u_0 < u < u_1$, т. е.

$$\gamma=\sum_k \Gamma_k(u)\Gamma_k^*(r), \tag{3.6}$$

где для $\Gamma_k(u)$ имеют место соотношения, аналогичные (2.6), кроме того, они — квадратичные формы относительно $F(u)$.

Наличие произвольной функции γ в найденном решении (3.2)—(3.4) связано с тем, что структура метрики (2.8) сохраняется при преобразовании

$$u=u^*,$$
$$r=r^*[1+\mathfrak{f}(u^*, r^*)]. \tag{3.7}$$

Если произвольная функция $\mathfrak{f}(u^*, r^*)$ такого же порядка малости, как и α, β, γ, то при (3.7)

$$\alpha \to \alpha^* = \alpha + 2r^* \dot{\mathfrak{f}},$$
$$\beta \to \beta^* = \beta + (r^* \mathfrak{f})', \tag{3.8}$$
$$\gamma \to \gamma^* = \gamma + 2\mathfrak{f}.$$

Таким образом, конкретный выбор функции γ в формулах (3.2)—(3.4) равносилен выбору радиальной координаты r. В частности, при $\gamma = 0$ получается известная координатная система Бонди [7], при $\gamma = = \frac{\varkappa}{2r^2}(6\eta - 1)F^2$ нулю равняется β. Обе возможности вполне соответствуют характеру исследуемой проблемы: метрика, как и скалярное поле Φ_0, нестатична только в конечном интервале аргумента u $(u_0 < u < u_1)$.

На метрику (2.8) можно наложить также условие $\alpha = 0$, тогда

$$\beta = \frac{\varkappa}{r^2}\left[\left(\eta - \frac{1}{4}\right)F^2 + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{u} d\tau \int_{-\infty}^{\tau} \dot{F}^2(\tau_1)\, d\tau_1 + (-mu)\right] + \frac{\varkappa}{r^3}\eta \int_{-\infty}^{u} F^2(\tau)\, d\tau,$$

$$\gamma = \frac{\varkappa}{r^2}\left[\eta F^2 - \int_{-\infty}^{u} d\tau \int_{-\infty}^{\tau} \dot{F}^2(\tau_1)\, d\tau_1 + (2mu)\right] - \frac{\varkappa}{r^3}\eta \int_{-\infty}^{u} F^2(\tau)\, d\tau.$$

Такой выбор, однако, крайне нежелателен, так как, во-первых, нарушается условие статичности метрики при $u > u_1$ и, во-вторых, члены, пропорциональные u и появляющиеся при $u > u_1$, существенно ограничивают область применения нашего предположения о малости β и γ.

§ 4. О диагонализации метрики (2.8)

Путем подходящего преобразования координат сферически-симметричная метрика (2.8) всегда приводима к диагональному виду (2.7). Обсудим этот вопрос подробнее применительно к нашей задаче, где α, β, γ задаются формулами (3.2)—(3.4). Оставляя функцию γ произвольной (т. е. радиальную координату в (2.8) не фиксированной) и ограничиваясь членами первого порядка относительно гравитационной постоянной $\varkappa$, рассмотрим преобразование

$$u = t - r + \mathfrak{g}(t, r),$$
$$r = r \tag{4.1}$$

(функция $\mathfrak{g}(t, r)$ такого же порядка малости, как и α, β, γ). Метрика (2.8) диагонализируется, если

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial r} = \alpha - \beta \equiv$$

$$\equiv r\dot{\gamma} - \frac{(r\gamma)'}{2} + \frac{\varkappa}{r}\left[\int_{-\infty}^{u} \dot{F}^2\, d\tau - 2\eta F\dot{F} + (-2m)\right] + \frac{\varkappa}{4r^2}(1 - 2\eta)F^2. \tag{4.2}$$

Входящие в (2.7) функции A, B, C, D имеют следующий вид:

$$A = \alpha + 2\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t},$$

$$B = 2\beta - \alpha, \qquad (4.3)$$
$$C = D = \gamma.$$

Отметим, что

$$\frac{\partial f(u,r)}{\partial t} = \dot{f}\left(1 + \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t}\right) \approx \dot{f},$$

$$\frac{\partial f(u,r)}{\partial r} = f' - \dot{f}\left(1 - \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial r}\right) \approx f' - \dot{f},$$

и приближенными формулами можно ограничиться, если функция f — первого порядка малости.

Решение уравнения (4.2) можно представить в виде

$$\mathfrak{g}(t,r) = -(2\varkappa m \ln r) - r\gamma(t-r,\, r) + \frac{1}{2}\int_{\infty}^{r} [\varrho\gamma(t-\varrho,\, \varrho)]' d\varrho +$$
$$+ \frac{\varkappa}{r}\eta F^2 + \varkappa \int_{\infty}^{r}\left[\frac{1}{\varrho}\int_{-\infty}^{t-\varrho} \dot{F}^2(\tau)\, d\tau + \frac{1}{4\varrho^2} F^2(t-\varrho)\right] d\varrho. \qquad (4.4)$$

Обсудим сначала случай $\gamma = 0$. Интегрируя двукратный интеграл в последнем члене формулы (4.4) по частям и вводя новую переменную интегрирования, находим

$$\mathfrak{g}(t,r) = (-2\varkappa m \ln r) + \varkappa \int_{-\infty}^{t-r}\left[\ln \frac{r}{t-\tau}\dot{F}^2(\tau) - \frac{1+2\eta}{4(t-\tau)^2} F^2(\tau)\right] d\tau + \frac{\varkappa}{r}\eta F^2. \qquad (4.5)$$

Если $t - r > u_1$, то с учетом (2.6):

$$\mathfrak{g}(t,r) = (-2\varkappa m \ln r) + \varkappa\left[\ln r \int_{u_0}^{u_1} \dot{F}^2(\tau)\, d\tau + \frac{1}{4r}(2\eta - 1) F_1^2\right] -$$
$$-\varkappa\left\{\int_{u_0}^{u}\left[\ln (t-\tau) \dot{F}^2(\tau) + \frac{1+2\eta}{4(t-\tau)^2} F^2(\tau)\right] d\tau +\right.$$
$$\left. + \frac{1+2\eta}{4}\left(\frac{F_0^2}{t-u_0} - \frac{F_1^2}{t-u_1}\right)\right\}. \qquad (4.5a)$$

Последний, зависящий от времени t член в формуле (4.5a) обусловливает тоже нестационарность соответствующей диагональной метрики (4.3) при $t - r > u_1$. Этот результат остается в силе и в том случае, когда γ отличается от нуля, т. е. имеет вид (3.6). Так как при $t - r > u_1$

$$\int_{\infty}^{r} \Gamma_k(t-\varrho)\,[\varrho\Gamma_k^*(\varrho)]' d\varrho = -\int_{-\infty}^{t-r} \Gamma_k(\tau)\,[(t-\tau)\,\Gamma_k^*(t-\tau)]' d\tau =$$
$$= (t-u_0)\,\Gamma_k(u_0)\,\Gamma_k^*(t-u_0) - (t-u_1)\,\Gamma_k(u_1)\,\Gamma_k^*(t-u_1) -$$
$$- \int_{u_0}^{u_1} \Gamma_k(\tau)\,[(t-\tau)\,\Gamma_k^*(t-\tau)]' d\tau + r\Gamma_k(u_1)\,\Gamma_k^*(r),$$

то каждый член типа $\Gamma_k(u)\,\Gamma_k^*(r)$ вносит свой вклад в нестационарный член диагональной метрики (4.3).

В порядке исключения нестационарные члены компенсируются, если γ такова, что

$$\frac{1}{2}(r\gamma)'+\varkappa\left[\frac{1}{r}\int\limits_{-\infty}^{u}\dot{F}^2(\tau)\,d\tau+\frac{1+2\eta}{4r^2}F^2(\tau)\right]=\frac{\partial}{\partial r}\sum_k R_k(r)\,U_k(u). \quad (4.6)$$

Тогда

$$\gamma=C=-\frac{2\varkappa}{r}\ln r\int\limits_{-\infty}^{u}\dot{F}^2(\tau)\,d\tau+\frac{\varkappa}{r^2}\left(\eta+\frac{1}{2}\right)F^2+$$

$$+\frac{2}{r}\sum_k\left(U_kR_k-\dot{U}_k\int^{r}R_k(\varrho)\,d\varrho\right) \quad (4.7)$$

и

$$A=\frac{\varkappa}{r}\left[\int\limits_{-\infty}^{u}\dot{F}^2\,d\tau-F\dot{F}-(2m)\right]+2\varkappa\ln r\dot{F}^2+\frac{\varkappa}{r^2}\eta F^2+$$

$$+\frac{2}{r}\sum_k\dot{U}_k\int^{r}R_k(\varrho)\,d\varrho, \quad (4.8)$$

$$B=2\varkappa\ln r\,\dot{F}^2-\frac{\varkappa}{r}\left[3\int\limits_{-\infty}^{u}\dot{F}^2\,d\tau+F\dot{F}-(2m)\right]-\frac{\varkappa}{r^2}(1-\eta)F^2+$$

$$+2\sum_k\left[R'_kU_k-2R_k\dot{U}_k+\dot{U}_k\int^{r}R_k(\varrho)\,d\varrho\right]. \quad (4.9)$$

Хотя при $\sum\limits_k U_kR_k\equiv 0$ найденная диагональная метрика (4.7)—(4.9) статична как при $u<u_0$, так и при $u>u_1$, она непригодна, поскольку из-за члена $\ln r\,\dot{F}^2$ при больших r нарушается основное предположение о малости функций A, B, C. От этого члена $(\ln r\,\dot{F}^2)$ можно освободиться только ценой потери статичности решения при $u>u_1$. Действительно, логарифмический член в формуле (4.8) будет скомпенсирован, если

$$\dot{U}_0\int^{r}R_0(\varrho)\,d\varrho=-\varkappa\ln r\dot{F}^2.$$

Отсюда

$$R_0=-\frac{\varkappa}{r},\quad \dot{U}_0=\int\limits_{-\infty}^{u}\dot{F}^2\,d\tau,\quad U_0=\int\limits_{-\infty}^{u}d\tau\int\limits_{-\infty}^{\tau}\dot{F}^2(\tau_1)\,d\tau_1,$$

и, следовательно, в формулах (4.7) и (4.9) появляется член $\frac{2\varkappa}{r}\int\limits_{-\infty}^{u}d\tau\int\limits_{-\infty}^{\tau}\dot{F}^2(\tau_1)\,d\tau_1$, пропорциональный u при $u>u_1$ и тем самым нарушающий условие статичности.

Итак, использование диагональной метрики (2.7) для решения данной задачи уже в первом приближении приводит либо к появлению логарифмического члена (в выражениях для A, B, C), нарушающего не только условие псевдоевклидовости метрики в пространственной бесконечности, но и предположение о малости поправок к метрике, либо к нестатичности метрики при $u>u_1$.

§ 5. Гравитационное самодействие скалярного поля

Рассмотрим теперь, каким образом искаженная скалярным полем метрика воздействует на это же скалярное поле. Решение скалярного уравнения (2.3) с учетом (3.2)—(3.4) будем искать в виде

$$\Phi=\Phi_0+\Phi_1=\frac{F(u)}{r}+\Phi_1(u,r). \tag{5.1}$$

Учитывая лишь члены первого порядка относительно гравитационной постоянной $\varkappa$, приходим для Φ_1 к неоднородному волновому уравнению

$$\Box\Phi_1\equiv\frac{2}{r}(r\dot{\Phi}_1)'-\frac{1}{r}(r\Phi_1)''=$$

$$=-\frac{1}{r}\left(F\dot{\gamma}'-\frac{1}{2}F\gamma''+\dot{F}\gamma'\right)+2\varkappa\eta(3\eta-1)\left(\frac{2}{r^4}F^2\dot{F}+\frac{1}{r^5}F^3\right)+$$

$$+\frac{\varkappa}{r^4}\left[F\int\limits_{-\infty}^{u}\dot{F}^2\,d\tau-(2mF)\right]+\frac{\varkappa}{2r^5}F^3, \tag{5.2}$$

или, вводя новую неизвестную Φ_1^*

$$\Phi_1=\Phi_1^*-\frac{F\gamma}{2r}+\frac{\varkappa\eta(1-3\eta)F^3}{3r^3}, \tag{5.3}$$

— к уравнению

$$\Box\Phi_1^*=\frac{\varkappa}{r^4}\left[F\int\limits_{-\infty}^{u}\dot{F}^2\,d\tau-(2mF)\right]+\frac{\varkappa}{2r^5}F^3. \tag{5.4}$$

Результаты работ [2, 8] позволяют представить решение уравнения (5.4) в виде

$$\Phi_1^*=\frac{\varkappa}{r}\int\limits_{-\infty}^{u}\frac{F\left[(2m)-\int\limits_{-\infty}^{\tau}\dot{F}^2\,d\tau_1\right]d\tau}{(v-\tau)^2}-\frac{2\varkappa}{3r}\int\limits_{-\infty}^{u}\frac{F^3\,d\tau}{(v-\tau)^3}, \tag{5.5}$$

где $v=u+2r$.

Остановимся на формуле (5.5) подробнее. Для начального статического состояния $u<u_0$ функция Φ_1^*, конечно, статична:

$$\Phi_1^*=\left(\frac{\varkappa mF_0}{r^2}\right)-\frac{\varkappa F_0^3}{12r^3}. \tag{5.6}$$

Если $u>u_1$, то

$$\Phi_1^*=\frac{\varkappa}{r^2}F_1\left[(m)-\frac{1}{2}\int\limits_{u_0}^{u_1}\dot{F}^2\,d\tau\right]-\frac{\varkappa F_1^3}{12r^3}+$$

$$+\left(\frac{\varkappa m}{r}\right)\left(\frac{F_0}{v-u_0}-\frac{F_1}{v-u_1}\right)+\frac{\varkappa}{r}\frac{F_1}{v-u}\int\limits_{u_0}^{u_1}\dot{F}^2\,d\tau+$$

$$+\frac{\varkappa}{3r}\left[\frac{F_1^3}{(v-u_1)^2}-\frac{F_0^3}{(v-u_0)^2}\right]+\frac{\varkappa}{r}\int\limits_{u_0}^{u_1}\frac{F\left[(2m)-\int\limits_{u_0}^{\tau}\dot{F}^2\,d\tau_1\right]}{(v-\tau)^2}-$$

$$-\frac{2\varkappa}{3r}\int\limits_{u_0}^{u_1}\frac{F^3\,\mathrm{d}\tau}{(v-\tau)^3}. \tag{5.7}$$

Первые два члена в формуле (5.7) дают статическую поправку. Она аналогична поправке (5.6) для начального состояния, только гравитационная масса центрального тела m заменена на массу $m-\frac{1}{2}\int\limits_{u_0}^{u}\dot{F}^2\,\mathrm{d}\tau$ (т. е. учтен унос массы скалярным излучением). Остальные члены описывают некоторое последействие или хвост скалярного излучения. По своей структуре хвост излучения — обратная сферическая волна $\frac{F^*(v)}{r}$. Видно, что профиль обратной волны $F^*(v)$ (следовательно, и возмущение при фиксированном r) убывает с ростом аргумента v.

Вводя новую переменную интегрирования $w=\frac{v-\tau}{2}$, можно переписать формулу (5.5) и в ином виде:

$$\Phi_1^*=\frac{\varkappa}{r}\int\limits_{\infty}^{\frac{v-u}{2}}F(v-2w)\left\{\frac{1}{w^2}\left[(m)-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{v-2w}\dot{F}^2\,\mathrm{d}\tau_1\right]+\frac{2}{3w^3}F^2(v-2w)\right\}\mathrm{d}w, \tag{5.8}$$

легко интерпретируемом в терминах волновой оптики. Действительно, если сферическая волна $\frac{1}{r}F(u)$ распространяется в неоднородной среде, сферическому слою $(r, r+\mathrm{d}r)$ которой приписывается дифференциальный коэффициент отражения $\mathrm{d}R(r,t)=\mathfrak{R}(r,t)\,\mathrm{d}r$, то в результате отражения на этом слое возникает элементарная обратная волна $\frac{\mathrm{d}F^*(v)}{r}$, где

$$\mathrm{d}F^*(v)=F(v-2r)\,\mathrm{d}R=F(v-2r)\,\mathfrak{R}(r,\,v-r)\,\mathrm{d}r.$$

Следовательно, нашу поправку (5.8) можно рассматривать как результат непрерывного отражения первоначальной волны $\Phi_0(u,r)$ в сферически-симметричной среде с дифференциальным коэффициентом отражения

$$\mathfrak{R}(t,r)=\frac{\varkappa}{r^2}\left[(m)-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{t-r}\dot{F}^2\,\mathrm{d}\tau\right]+\frac{2\varkappa}{3r^3}F^2(t-r), \tag{5.9}$$

и здесь, как и в формуле (5.7), учитывается унос массы скалярными волнами, прошедшими к моменту отражения через отражающий слой.

Отметим еще, что в одномерном статическом случае дифференциальный коэффициент отражения $\mathrm{d}R$ и коэффициент преломления n связаны формулой Френеля

$$\mathrm{d}R=\frac{\mathrm{d}n}{2n}=\frac{n'(x)\,\mathrm{d}x}{2n(x)}. \tag{5.10}$$

Из формул (5.9) и (5.10) видно, что слабому гравитационному полю точечной массы соответствует среда с показателем преломления

$$n(r)=1+\frac{2m}{r}.$$

К этому результату приводят и другие соображения (отклонение светового луча, скорость распространения светового сигнала и т. д.). К сожалению, пока не ясно, сможем ли мы интерпретировать всю формулу (5.9) в таком же духе, в частности, не ясна и справедливость формулы Френеля (5.10), в случае, если показатель преломления зависит от времени.

Из формулы (5.5) видно, что хвост скалярного излучения, возникающий в результате гравитационного самодействия, не зависит от параметра η. От η зависит лишь одна поправка типа прямой волны (см. (5.3)). Слагаемые типа прямой волны можно выделить (при этом неоднозначно) и из функции Φ_1^*. Например, интегрируя (5.5) по частям, получим

$$\Phi_1^* = \frac{\varkappa}{r^2}\left[(m) - \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{u} \dot{F}^2\,d\tau\right]F - \frac{\varkappa F^3}{12r^3} +$$

$$+\frac{\varkappa}{r}\int\limits_{-\infty}^{u} \dot{F}\left[\frac{\int_{-\infty}^{\tau} \dot{F}^2\,d\tau_1 - (2m) + F\dot{F}}{v-\tau} + \frac{F^2}{(v-\tau)^2}\right]d\tau. \qquad (5.11)$$

Формула (5.11) приводит, в частности, к более компактному (по сравнению с (5.7)) представлению для хвоста излучения:

$$\frac{\varkappa}{r}\int\limits_{u_0}^{u} \dot{F}(\tau)\left[\frac{\int_{-\infty}^{\tau} \dot{F}^2(\tau_1)\,d\tau_1 - (2m) + F(\tau)\dot{F}(\tau)}{v-\tau} + \frac{F^2(\tau)}{(v-\tau)^2}\right]d\tau.$$

Все поправки к скалярному полю, имеющие вид прямой волны, можно всегда скомпенсировать с помощью подходящего выбора функции γ, удовлетворяющей дополнительным условиям, сформулированным в § 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мицкевич Н. В. Физические поля в общей теории относительности. М., 1969.
2. Mankin, R., Piir, I. Gravitational self-interaction of the electromagnetic monopole and dipole field. — Preprint FAI-27, Tartu, 1973.
3. Penrose, R. Zero rest-mass fields including gravitation: asymptotic behaviour. — Proc. Roy. Soc. (London), 1965, v. A284, N 1397, p. 159—203.
4. Chernikov, N. A., Tagirov, E. A. Quantum theory of scalar field in de Sitter space-time. — Ann. Inst. H. Poincare, 1968, v. A9, N 2, p. 109—141.
5. Синг Дж. Общая теория относительности. М., 1963.
6. Ландау Л., Лифшиц Е. Теория поля. М., 1973.
7. Bondi, H., van der Burg, M. G. J., Metzner, A. W. K. Gravitational waves in general relativity VII. Waves from axi-symmetric systems. — Proc. Roy. Soc. (London), 1962, v. A269, N 1336, p. 21—52.
8. Пийр И. Скалярное волновое уравнение в гравитационном поле Шварцшильда. — Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 1971, т. 20, № 3, с. 253—263.

Институт физики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22/XII 1977

I. PIIR, Eve KIKAS

KERASÜMMEETRILISTE SKALAARSETE LAINETE GRAVITATIIVNE OMAMÕJU

Skalaarsete lainete gravitatiivse omamõju kerasümmeetrilist ülesannet on uuritud järkjärguliste lähendite meetodil. Lähtelähendiks on valitud tasases ruumis koordinaatide alguspunktist väljuv keralaine (2.5), (2.6). Bondi koordinaatidele vastavat mittediagonaalset meetrikat (2.8) kasutades on arvutatud nii skalaarsest lainest põhjustatud parandid tasase ruumi meetrikale (3.2)—(3.4) kui ka meetrikast tingitud parandid (nn. gravitatiivse häiritud omamõju parandid) skalaarsele väljale (5.3), (5.5). On näidatud, et gravitatiivne omamõju toob kaasa kestva, kuid ajas kustuva järelmõju ehk kiirguse saba, mille kuju ei sõltu sellest, kas skalaarse välja võrrandiks võetakse üldkovariantne lainevõrrand (2.1) või konforminvariantne skalaarne võrrand (2.2). Lähemalt on vaadeldud ka diagonaalse meetrika (2.7) kasutamisega kaasnevaid raskusi.

I. PIIR, Eve KIKAS

GRAVITATIONAL SELF-INTERACTION OF SPHERICALLY SYMMETRIC SCALAR WAVES

Using the method of successive approximations and a nondiagonal metric (2.8) which corresponds to the Bondi coordinate system, a spherically symmetric problem of gravitational self-interaction of scalar waves is considered. An outgoing spherical sandwich wave in flat space time (2.5), (2.6) is chosen as the starting approximation. The corrections to the flat space-time metric (3.2)—(3.4) caused by the scalar wave (2.5), (2.6) as well as the corrections to the scalar field (5.3), (5.5) caused by the disturbed metric, are calculated. It is shown that, as a result of gravitational self-interaction, there always appears a wave tail, the form of which does not depend upon whether the scalar field theory is based on the general covariant wave equation (2.1) or on the conformally invariant wave equation (2.2). In addition, the difficulties arising from the choice of a diagonal metric (2.7), customary to orthodox spherically symmetric problems, are discussed in detail (§ 4).