EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1978, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1978, № 3

УДК 531.36 : 62-50

И. КЕЙС

ВАРИАНТЫ СУБОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЙ МЕТОДОМ АГРЕГАЦИИ

Рассматривается задача управления нелинейной динамической системой с интегральным критерием качества. Исследуются различные способы агрегации системы порядка n для приближенного решения задачи оптимального синтеза управлений. Выражения субоптимальных регуляторов определяются методом производящих функций Беллмана—Ляпунова из агрегированной системы. Предложены критерии оптимизации приближенных решений по вектору агрегации и примеры решения задач оптимальной стабилизации движений некоторых консервативных и y-автономных систем.

1. Рассмотрим уравнения возмущенных движений объекта

$$x^{\cdot}=X(t,x,u,c) \text{ на } R=\{t\geqslant 0,\ |x^1|<\varrho\},$$
$$u\in U=\{u(t,x,c)\subset C(R\times A),\ u\in\Omega\}, \tag{1.1}$$
$$x=(x_j,x_k)^*,\quad x^1=(x_j)^*,\quad x'=(x_i)^*,\quad x''=(x_\nu)^*,\quad x^{(2)}=(x_\beta)^*,\quad u=(u_\sigma)^*,$$
$$X(t,0,0,c)\equiv 0,$$

$$x^{\cdot}\equiv dx/dt,\ \Omega\subseteq E^r,\ \varrho=\text{const},\ i=\overline{1,l}\leqslant m,\ j=\overline{1,m}\leqslant n,\ \beta=\overline{m+1,n},$$
$$\sigma=\overline{1,r}\leqslant n,$$

$\nu=\overline{l+1,m}$, $\text{const}=c=(c_k)^*$, $k\geqslant 1$, $E^k\supseteq A$ — область, открытая или замкнутая, где X, U удовлетворяют на $R^0=R\setminus x'=0$ условиям существования, единственности $x[t]$ и продолжаемости $x^{(2)}[t]$ для $t\to+\infty$ при $t,x\in R^0$, $c\in A$.

Пусть (1.1) — система Ляпунова по x^1: существует $u'[V(t,x,c)]\in U$, для которого (1.1) имеет x^1-определенно положительную (1.2) на R функцию $V(t,x,c)$, строго убывающую вдоль любой полутраектории $x[t]\equiv x(t,t_0,x_0,c)\in R^0$ на интервале $[t_0,t^+)$ ее определения в R^0 и, кроме того,

$$V(t,0,x^{(2)},c)\equiv 0,\quad V\geqslant V_1(x^1,c)>0 \text{ на}$$
$$R\setminus x^1=0\,(V,V_1\subset C(R),\ V\subset C_1(R^0),\forall c\in A), \tag{1.2}$$
$$V^{\cdot}\leqslant 0, t,x\in R^0,\ c\in A,\ R^0_0\cap Q^+=\varnothing$$
$$(R^0_0=R^0\cap\{V^{\cdot}=0\},\ Q^+=\{x^+_0\,|\,x(t,t_0,x^+_0)\subseteq Q^+\}),$$
$$V^{\cdot}<0 \text{ на } R^+\equiv R^0\cap Q^+\ \ (V(t_0,x_0)>V(t,x[t]),\ t_0\leqslant t\leqslant t^+,$$
$$x'(t_0)\equiv x'_0\neq 0,\ \forall c\in A),$$
$$t^+=\infty,\ t_1,\ t^+=+\infty \text{ для } x'[t]\neq 0,\ t_0\leqslant t,\ t_1=\min t^1\leqslant\infty$$
$$(x'[t^1]=0,\ V^{\cdot}\equiv -W).$$

В случае $\inf \delta^1(t_0, x_0^{(2)}, c, \varepsilon) > 0$ на $C^0 \equiv \{0 \leqslant t \leqslant t^0, |x_0^{(2)}| \leqslant \delta_0^{(2)}\}$ для $\forall \varepsilon < \varrho$, $\forall c \in A$, t_0, $x_0^{(2)} \in C^0$ из (1.2) находим такое $\delta_0^1(\varepsilon) < \delta^1$, что $|x^1[t]| < \varepsilon$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t^+$, $|x_0^1| < \delta_0^1$ ($x_0 \equiv x[t_0]$). Обозначим $\alpha = \alpha(c) = \min V_1$ на $|x^1| = \varrho$. В общем случае система (1.1), (1.2) будет $|x^1[t]| < \varrho$ для $t \in [t_0, t^+)$, если t_0, x_0 взяты в цилиндре

$$C_1^0 = \{0 \leqslant t_0 \leqslant t^0, |x_0^1| \leqslant \delta_0^1(\varrho), |x_0^{(2)}| \leqslant \delta_0^{(2)}(\varrho), x'_0 \neq 0\} \; (\delta_0^{1^2} + \delta_0^{(2)^2} < \varrho^2), \quad (1.3)$$

где $\alpha > v_0^1 \equiv \max V(t_0, x_0, c)$ на t_0, $x_0 \in C_1^* = \bar{C}_1$ ($t^0 = \mathrm{const} < \infty$, $c = \mathrm{fixconst}$). Тогда из продолжаемости $x[t]$ на $[t_0, t^+)$ следует, что любое решение (1.1) ($u = u'$) с началом в C_1^0 принадлежит либо классу $F = \{f[t]\}$, либо классу $D = \{d[t]\}$. Класс F состоит из решений (1.1), примыкающих к $x' = 0: x' \to 0$ при $t \to t_1 \leqslant \infty$. Класс D составляют решения (1.1), не примыкающие к $x' = 0$ за конечное или бесконечное время. Из выражений (1.1)—(1.3) и определения для $\forall f[t]$, $d[t]$ имеем

$$\varrho > |x_f^1(\tau)| > 0, \; t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1 \leqslant \infty, \; \lim_{\tau \to t_1} x'_f[\tau] = 0, \; |x'_f[\tau]| > 0 \, (\tau \in [t_0, t_1)), \quad (1.4)$$

$$x_f^1(t_1) = 0 \text{ при } v^0 = 0, \; 0 \leqslant v^0 \equiv \lim_{\tau \to t_1 - 0} v_f[\tau] < v_0 \equiv v_f[t_0] \leqslant v_0^1 < \alpha,$$

$$\varrho > |x_d^1(\tau)| > 0, \; t_0 \leqslant \tau \leqslant \infty, \; \overline{\lim_{\tau \to \infty}} |x'_d[\tau]| = r^0, \; |x'(\tau)| > 0 \, (\tau \geqslant t_0),$$

$$\underline{\lim_{\tau \to \infty}} |x'_d(\tau)| \equiv r_0 \geqslant \inf_{\tau \geqslant t_0} |x'_d(\tau)| \equiv \varrho_0 \geqslant 0 \, (r_0 = 0 \text{ при } \varrho_0 = 0, \; |x^1| \geqslant |x'|),$$

$$0 < v^0 \equiv \lim_{\tau \to \infty} v_d[\tau] < v_0 \equiv v_d[t_0] \leqslant v_0^1 < \alpha =$$

$$= \min_{|x^1| = \rho} V_1 (v[\tau] = V(\tau, x[\tau], c), c = \mathrm{const} \in A).$$

Используя прямой метод Ляпунова для траекторий f, d с началом в C_1^0, получим следующие критерии x'-стабилизации регулятором u' решения $x \equiv 0$ системы (1.1) ($u \equiv 0$).

Теорема 1. *Регулятор $u'(t, x, c)$ системы Ляпунова* (1.1), (1.2) *реализует для значений t_0, $x(t_0)$ в* (1.3) *x'-стабилизацию движения $x \equiv 0$ и устойчивость по его x^1-компоненте, если вдоль любой d-траектории* (1.1) ($u = u'$) *с началом в C_1^0 выполняется неравенство*

$$v^0 < \int_{t_0}^{\infty} w[\tau] d\tau \, (w[\tau] = W(\tau, x[\tau], c \,|\, u'(\tau, x[\tau], c)) = -V^{\cdot}[\tau]). \quad (1.5)$$

Доказательство. Действительно, из (1.2)—(1.4) для $\forall \varepsilon \leqslant \varrho$, $c \in A$ и t_0, $x_0^{(2)} \in C^0$ имеем x^1-устойчивость решения $x \equiv 0$, где $\exists \, \delta_0^1(\varepsilon)$, и цилиндр $C_\varepsilon^0 = \{|x_0^1| \leqslant \delta_0^1(\varepsilon), x_0' \neq 0\} \times C^0$ начальных значений, для которых $|x'[t]| \leqslant |x'[t]| < \varepsilon$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t^+ (t_f^+ = t_1, \; t_d^+ = \infty)$. Кроме того, любое решение $x[t] \in F$ при t_0, $x_0 \in C_\varepsilon^0$. Допустим противное. Интегрируя уравнение $V^{\cdot} = -W$ вдоль $d[t]$ в области R^0, из (1.5) получим неравенство $v^0 \leqslant 0$, которое противоречит (1.4) по определению $d[t] \in D$. В силу примыкания всех решений к $x' = 0$ при $\forall t_0$, $x_0 \in C_\varepsilon^0$ ($\varepsilon \leqslant \varrho$, $c \in A$) для C_1^0 имеем x'-стабилизацию $x \equiv 0$ на интервале $t_1 - t_0 \leqslant \infty$. Теорема доказана.

Замечание 1. В (1.2) и (1.5) не требуются [1,2] дифференцируемость V на $x' = 0$, равномерность по t, $x^{(2)}$ условия $V \to 0$ при $x^1 \to 0$, равенство $u'(t,0,c)\equiv 0$, x'-определенная положительность W: $W(t,x,c\,|\,V,u')=W\gg 0$. Назовем стабилизирующим на $C_1{}^0$ класс регуляторов $U'=\{u'(t,x,c)\,|\,u'\in U\}$ системы (1.1), производящих x^1-устойчивую x'-стабилизацию $x\equiv 0$ для $t_1\leqslant\infty$, t_0, $x_0\in C_1{}^0$. Согласно теореме 1, класс U' для системы Ляпунова (1.1) определяется из условий (1.2), (1.5) на функции X, V. Условия выбора стабилизирующих регуляторов упрощаются в леммах 1 и 2, где используются свойства решений дифференциальных неравенств и обозначения:

$$\nu=\nu(t,x,c)\geqslant\nu_1(x',c)>0,\ 0<|x'|<\varrho,\nu|_{x'=0}\equiv$$
$$\equiv 0\,(\nu,\nu_1\subset C(R),\nu\subset C_1(R^0)),\tag{1.6}$$

$$\nu_0^1=\sup v(t,x,c)\ \text{ на }\ Q=\{R\cap V(t,x,c)\leqslant v_0^1\}\,(Q^0=Q\setminus x'=0\ \ v_0^1\leqslant\infty),$$

$$\nu_0^0=\max_{C_1{}^*}\nu(t_0,x_0,c)\leqslant\nu_0^1,\ v_0^1=\max V(t_0,x_0,c)\ \text{ на }\ C_1^*=\overline{C}_1^0=C_1^0\cup x'=0,$$

$$v_0=v[t_0],\nu_0=$$

$$=\nu[t_0]\,(0<V_1(x_0^1,c)\leqslant v_0\equiv V(t_0,x_0,c)\leqslant v_0^1\leqslant\alpha\equiv\min_{|x^1|=\rho}V_1,\ c=\mathrm{fixconst}\in A),$$

$$\Lambda_0=\{0\leqslant t_0\leqslant t^0,\ 0<v_0<v_0^1,\ 0<\nu_0\leqslant\nu_0^0\},\quad \Lambda=\{t\geqslant 0,\ 0<v<v_0^1,\ 0<\nu\leqslant\nu_0^1\}.$$

Лемма 1. *Пусть для* (1.1), (1.2), (1.6) *на* R^0 *неравенства*

$$v^{\cdot}\leqslant -g_1(t,v,\nu,c),$$
$$\nu^{\cdot}\leqslant -g_2(t,v,\nu,c)\ (g_1,g_2\subset C(\Lambda),\ g_1>0,\ \nu=\nu[t],\ \forall c\in A)\tag{1.7}$$

в области Λ *не имеют решений, удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{t\to\infty}v[t]>0,\ \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\nu[t]>0,\ t_0,v_0,\nu_0\in\Lambda_0\ \ (v^{\cdot}<0\ \text{ на }\ [t_0,t^+)).\tag{1.8}$$

Тогда регулятор $u'(t,x,c)\in U$ *является стабилизирующим на* $C_1{}^0$.

Доказательство. Покажем, что $\forall x[t]\in F$ при t_0, $x_0\in C_1$ и условиях леммы. Допустим противное — на $[t_0,\infty)$ существует $d_*[t]$ с началом в $C_1{}^0$ и свойствами (1.4). Рассмотрим функции $\nu_*[t]=\nu(t,d_*[t],c)$, $v_*[t]=V(t,d_*[t],c)$. При $t_0\leqslant t$ их значения лежат в Λ_0, Λ. Из (1.7) имеем оценки $v_*^{\cdot}\leqslant -g_1(t,v_*,\nu_*,c)$, $\nu_*^{\cdot}\leqslant -g_2(t,v_*,\nu_*,c)$.

Условия (1.8) выполняются, так как примыкание v_*, ν_* к нулю при $t\to+\infty$ противоречит неравенствам $V\geqslant V_1$, $\nu\geqslant\nu_1$ и свойствам (1.4). Но так как (1.7) и (1.8) не имеют решения $v_*[t]$, $\nu_*[t]$, то $D=\varnothing$ и все рассматриваемые $x[t]\in F$. Лемма доказана.

Рассмотрим ее модификацию в случае существования для системы (1.1), (1.2), (1.6), (1.7) потенциала $P(v,\nu,c)$, удовлетворяющего в $\Gamma=\{v\geqslant 0,\ \nu\geqslant 0\}$ условиям

$$P\geqslant P(0,0,c)=0,\ P>0,\ \nu>0,\ P\subset C(\Gamma),\ \text{при }\nu\to\infty\ P\to\infty\ (\forall v>0,c\in A),\tag{1.9}$$

$$g_2''=g'_1\frac{\partial P}{\partial v}+g'_2\frac{\partial P}{\partial\nu}\geqslant 0\ \text{ на }\ \Gamma^0=\{v>0,\ \nu>0\},$$

$$0\leqslant\frac{\partial P}{\partial v}\subset C(\Gamma^0),\ 0<\frac{\partial P}{\partial\nu}\subset C(\Gamma^0),$$

$$v^{\cdot}\leqslant -g'_1(t,v,\nu,c),\ \ \nu^{\cdot}\leqslant -g'_2(t,v,\nu,c)\ \text{ на}$$

$$\Lambda^0 = T\times\Gamma^0 (0 < g'_1,\ g'_2 \subset C(\Lambda^0),\ T=[0,\infty)).$$

Из (1.9) следует, что для (1.7) P — это функция Ляпунова вида

$$p^{\cdot} \leqslant -g''_2 \leqslant 0 \text{ на } \Lambda^0,\ p[t] \equiv P(v[t], \nu[t], c) \leqslant p[t_0] \equiv$$
$$\equiv p_0 (p_0 \geqslant p_d[t^+] = p_d^+ > 0), \qquad (1.10)$$

$$p_0 = P(v_0, \nu_0, c) > P(v_0, 0, c) > 0 \quad v_0 > v > 0 (\lim_{t\to t^*} v[t] = v^0 < v_0, \nu_0 = \nu[t_0]).$$

Из (1.9) и (1.10) заключаем, что неотрицательное решение дифференциальных неравенств (1.9) ограничено. При этом предельное множество траектории, соответствующей d-решению, не пусто и состоит из единственной точки $v^0 > 0$, $\nu_*^0 > 0$, удовлетворяющей уравнению

$$P(v^0, \nu^0_*, c) = p^0 (v^0 = \lim_{t\to\infty} v[t],\ 0 < p^0 = \lim_{t\to\infty} p[t],\ 0 < \nu^0_* = \lim_{t\to\infty} \nu[t]), \quad (1.11)$$

$$0 < \psi(v^0, c) \equiv P(v^0, 0, c) < p^0 \leqslant p[t] \leqslant p_0 = p[t_0] \quad (\psi(v, c) \equiv P(v, 0, c)).$$

В силу (1.9) существует единственное решение $\nu^* = \nu^*(v, p, c)$ уравнения (1.11), где $0 \leqslant \nu^*(v, p) \subset C(\Gamma_1)$, $0 < \nu^* \subset C_1(\Gamma_1^0)$, $\Gamma_1 = \{v \geqslant 0,\ p \geqslant \psi\}$, $\Gamma_1^0 = \{v > 0,\ p > \psi\}$. С учетом (1.11) из (1.9) и (1.10) подстановкой ν^* на Γ_1^0 находим

$$v^{\cdot} \leqslant -g_1^0(t, v, p, c),\ p^{\cdot} \leqslant -g_2^0(t, v, p, c) \quad (0 < \psi(v^0, c) < p^0 \leqslant p,\ 0 < v^0 < v), \qquad (1.12)$$

$$g_1^0 = g'_1(t, v, \nu^*(v, p, c), c) > 0,\ g_2^0 = g''_2(t, v, \nu^*(v, p, c), c) \geqslant 0$$
$$(g_h \subset C(\Gamma_1^0),\ h = \overline{1, 2}).$$

Пусть существует интегрируемая $g[\tau]$, для которой имеем

$$G^0 \equiv v^0 g_1^0 + p^0 g_2^0 \geqslant g[\tau] \equiv g(\tau, v_0, p_0, v^0, p^0, c) > 0$$
$$(v^0 \leqslant v \leqslant v_0,\ \psi(v^0) < p^0 \leqslant p \leqslant p_0), \qquad (1.13)$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} g[\tau] d\tau > s[t_0] - s[\infty] \quad (s = {}^1/_2 (v^2 + p^2),\ -s^{\cdot} \geqslant G \equiv v g_1^0 + p g_2^0 > G^0).$$

Используя функцию $s(v, p)$ и (1.12), аналогично получаем результат:

Лемма 2. *Регулятор* $u'(t, x, c)$ *стабилизирует на* C_1^0 *систему* (1.1), (1.2), *если при* $u = u'$ *она удовлетворяет условиям* (1.9) *и* (1.13).

Замечание 2. В леммах 1 и 2 нет условия $\dim x' = \dim x^1$, требования $W \gg 0$ по x' [2, 3] и равномерной ограниченности $\nu_1^{\cdot} \leqslant N_1^2 = \text{const} > 0$ для выбора $u'(\nu_1 \equiv |x'|^2)$ [3]. Отметим, что доказательство теоремы проходит, если $\nu_1^{\cdot} \geqslant -N_2^2 = \text{const} < 0$ в точках H, где $\nu_1^{\cdot} > N_1^2 > 0$ [3]. Теорема в [3] есть следствие леммы 2. Покажем, что при условиях [3] имеем подслучай леммы 2, при котором выполняются неравенства

$$W(t, x) \geqslant w(x') \geqslant g'_1(\nu_1),\ \nu_1 > 0,\ g'_1(0) = 0,\ \int_0^\infty g'_1(\xi) d\xi = +\infty$$
$$(g'_1 \subset C[0, \infty)), \qquad (1.14)$$

$$v^{\cdot} \leqslant -g'_1,\ \nu^{\cdot} \leqslant -g'_2 \equiv N_1^2 = \text{const},\ P(v, \nu_1) = N_1^2 v + \Phi^{-1}(\nu_1)$$
$$(\nu_1 \equiv |x'|^2,\ c = \text{fixconst} = c_0 \in A),$$

$$\Phi^{-1}(\nu_1)\equiv\int\limits_0^{\nu_1} g'_1(\xi)\,d\xi,\quad g_1^0=g_1[\Phi(p-N_1^2v)],\quad g_2^0=g''_2=g'_1\frac{\partial P}{\partial v}+g'_2\frac{\partial P}{\partial \nu}=0,$$

$$p^0-P(v^0,0)=\int\limits_0^{\nu_*^0} g_1(\xi)\,d\xi>0,\ \nu_*^0>0,\ 0<g_1^*=\min g_1^0(v,p)\ \text{ на }$$

$$v^0\leqslant v\leqslant v_0,\ p^0\leqslant p\leqslant p_0,$$

$$G^0=v^0g_1^0>v^0g_1^*\equiv g[\tau]\equiv\text{const}>0,\ s[t_0]-s[\infty]<\int\limits_{t_0}^{\infty} g\,d\tau=\infty$$

$$(\Phi[\Phi^{-1}(\xi)]\equiv\xi),$$

$$s={}^1/_2(v^2+p^2),\ s[t_0]={}^1/_2(v_0^2+p_0^2),\ s[\infty]={}^1/_2(v^{0^2}+p^{0^2}).$$

В силу (1.14) для теоремы из [3] выполняются все условия леммы 2. Заменой $W>0$ на $W\geqslant 0$ (при $\dim x'<\dim x^1$), $g_1>0$ на $g_1\geqslant 0$ и $P(v,\nu,c)$ на $P(t,v,\nu,c)$ при надлежащей модификации условий лемм 1 и 2 и теоремы 1 можно ослабить (усложняя) ограничения, задающие для (1.1) класс U'. Для построения U' возможно использовать $\Delta x'$ и условия, дающие равномерную непрерывность, липшицевость, равномерную устойчивость по t_0, а также ограниченность изменения $V_{t_0}^{t^+}x'$.

2. Поставим задачу оптимизации (1.1) при $u=u'_0$ по критерию

$$I(t,x,c\,|\,u)=\int\limits_t^{t_1} L(\tau,x,u)\,d\tau,\ \min_{u'\in U'} I=I^0(t,x,c)=I(t,x,c\,|\,u'_0),\qquad(2.1)$$

$$0\leqslant L(t,x,u)\subset C(T\times E^n\times\Omega),\ L\subset C_1(T\times E_0^n\times\Omega_0),$$

$$E_0^n=E^n\backslash x'=0,\quad \Omega_0=\Omega\backslash 0,$$

$$u,u',u'_0\in U=\{u(t,x,c)\subset C,\ u\in\Omega\subseteq E^r\},\ c=\text{const}\in A,$$

$$\infty\geqslant t_1=\min t^1: x'[t^1]=0.$$

Ее решение — минимум интеграла, и u, стабилизирующий на $C_1{}^0$, обозначим через I^0, u'_0. Введем переменные агрегации $\xi_i=\xi_i(t,x,a)$ преобразованием

$$y_1=v(t,x,a),\ y_2=\nu(t,x,a),\ z_\beta=z_\beta(t,x,a),\ \xi=(y_1,y_2,z_\beta)^*,\qquad(2.2)$$

$$y=(y_\alpha)^*,\ z=(z_\beta)^*,\ a=(a_k)^*=\text{const}\in A\subseteq E^k,\ \bar S(0,\delta)\subseteq A\ (\delta>0,\ k\geqslant 1),$$

$$\inf_{T\times E^n,\ |x'|\geqslant\varepsilon}\ \nu(t,x,a)>0,\ \forall\varepsilon>0,\ z_\beta(t,0,a)\equiv 0$$

$$(i=\overline{1,n},\ \alpha=\overline{1,2},\ \beta=\overline{1,n-2}),$$

обратимым на

$$R^0\leftrightarrow D^0,\ C_1^0\leftrightarrow D_1^0=\{0\leqslant t_0\leqslant t^0,\ 0<v\leqslant v_0^1,\ 0<\nu\leqslant\nu_0^0,\ z_\beta^-\leqslant z_\beta\leqslant z_\beta^+\},$$

$$T=\{t\geqslant 0\}\ \text{ при }\forall a\in A,\ \text{где } z_\beta^-=\inf z_\beta,\ z_\beta^+=\sup z_\beta\ \text{ на } R,$$

$$\Gamma_-^+=\{z_\beta^-\leqslant z_\beta\leqslant z_\beta^+\},\ P_1^0=\{0\leqslant t_0\leqslant t^0,\ 0<v\leqslant v_0^1,\ 0<\nu\leqslant\nu_0^0\},$$

$$P=T\times\{y(R)\}\equiv P^0\cup y_2=0.$$

Здесь D, D^0, $D_1{}^0$ — образы областей R, R^0, $C_1{}^0$, $z_\beta\subset C(T\times R\times A)$,

$z_\beta \subset C_1(T\times R^0\times A)$, $D=D(a)=\xi(R)$, z_β — переменные типа углов; v, ν — переменные типа действия в смысле (1.2), (1.6) при $c=a$, где a — вектор агрегации. В новых координатах имеем эквивалентные (1.1), (2.1) модель и задачу

$$\xi^{\cdot}=F(t,\xi,u,a),\ y^{\cdot}=Y(t,y,z,u,a),\ z^{\cdot}=Z(t,y,z,u,a)\ \ (c=c_0\in A), \tag{2.3}$$

$$J=\int\limits_t^{t'_1} L'(\tau,y,z,u,a)\,d\tau\ \ (L'=L(t,x(t,\xi,a),u)\geqslant 0),$$

$$I(t,x,c_0|u')=J(t,\xi,a|u''),\ u''=u''(t,\xi,a)=u'(t,x(t,\xi,a),c_0),$$

$$t'_1=t_1=\min t^1: y_2[t^1]=0,\ u,u'',u''_0\in U=\{u(t,\xi,a)\subset C,\ u\in\Omega\},$$

$$\min_{u''\in U''} J=J^0(t,\xi,a)=J(t,\xi,a|u''_0)\ \ (\forall a\in A,\ (c_k^0)^*=c_0=\text{fixconst}\in A),$$

$$F(t,0,0,a)\equiv 0,\ F=X(\xi),\ Y=X(y),\ Z=X(z),$$

$$X(f)=\frac{\partial f}{\partial t}+X_s\frac{\partial f}{\partial x_s}\ \ (s=\overline{1,n}).$$

С учетом (1.1), (1.2), (2.2) решения (2.3) при t_0, $\xi[t_0]\equiv\xi_0\in D_1{}^0(a)$, $u''\in U$ существуют, единственны и z-продолжаемы на $D^0(a)$, где $a=$ $=c=\text{const}$, $F\in C_1(D^0\times\Omega_0\times A)$. Обозначим через $U''=$ $=\{u''(t,\xi,a)\,|\,u''\in U\}$ класс регуляторов $\{u''\}$ системы (2.3), производящих y_1-устойчивую y_2-стабилизацию $\xi\equiv 0$ для $t_1\leqslant\infty$, t_0, $\xi_0\in D_1{}^0$. Для $\forall a\in A$, $c=c_0$ имеем $u''(t,\xi,a)=u''(t,\xi(t,x,a),a)=u'(t,x,c_0(a))$, $U''\leftrightarrow U'$. Будем искать приближенные (субоптимальные) решения задачи (2.1) y-агрегацией [4–6] и методом производящих функций $S(t,\xi,a)$ Беллмана—Ляпунова, используя эквивалентность оптимальных систем (1.1), (2.1) и (2.3). Ниже выбор вектора агрегации a подчиним критериям оптимальности $f(a)$. Возможны различные варианты агрегации [4–7], соответствующие выбору ξ-аппроксимации исходной модели, ограничений и критерия (композиционная агрегация) или погружению оптимизируемой системы в класс, порожденный априорными свойствами условного, геометрического и физического характера для ее z-подсистемы (экстремальная агрегация). Эффективность используемого способа построения агрегированной системы (модели и критерия) определяется типом модели, целями оптимизации и методом исследования. В качестве примера рассмотрим два варианта композиционной агрегации.

2.1. Вариант обращения, связанный со сдвигом ядра функционала. Агрегированную систему, соответствующую (2.3), введем заменой

$$J_1^+=\int\limits_t^{t_*^+} L_1^+\,d\tau,\ L_1^+=L'_1+\Delta L'_1\ (\Delta L'_1\equiv L_1^*(t,\xi,a)=-B'[S_1^+,u^+]), \tag{2.4}$$

$$B'[S,u^0]\equiv S^{\cdot}|_{u=u^0}+L'(u^0)\ \ \left(\frac{\partial S}{\partial t}=p_0,\ \frac{\partial S}{\partial y_\alpha}=p_\alpha,\ p=(p_\alpha)^*,\ \psi=\left(\frac{\partial S}{\partial z_\beta}\right)^*\right),$$

где модель (2.3) сохраняется, а функция $S_1{}^+(t,\xi,a)$, производящая регулятор $u^+[S_1{}^+]\in U$, удовлетворяет на D^0 для (2.3) условиям

$$S_1^+(t,y_1,0,z,a)\equiv 0,\ S_1^+(t,\xi,a)\geqslant 0,\ \left.\frac{dS_1^+}{dt}\right|_{u=u^+}\leqslant L'_1(u)-L'_1(u^+)$$

$$(L'_1\equiv L'\geqslant 0,\ L_1^+(u^+)\geqslant 0), \tag{2.5}$$

$$B'[S_1^+, u] \geqslant B'[S_1^+, u^+], \; u, u^+ \in U.$$

Пусть $u^+(t, \xi, a)$ — регулятор, стабилизирующий (2.3) на $D_1{}^0$ в смысле п. 1. В частности, $u^+ \in U''$, если в переменных t, x этот регулятор и система (2.3) удовлетворяют теореме 2 или леммам 1 и 2 п. 1. Условия стабилизируемости в t, ξ получаются заменой $x^{(1)}$, x', $x^{(2)}$, $c = c_0$ соответственно на y, y_2, z, a.

Теорема 2. *Допустимый регулятор* $u^+(t, \xi, a)$ — *оптимальный по* $J_1{}^+$, *если выполнены неравенства* (2.5) *и* $u^+ \in U''$.

Доказательство. Из (2.4), (2.5) следует для $\forall u, u^+ \in U$ оценка

$$B[S_1^+, u] \geqslant B[S_1^+, u^+] \equiv \frac{dS_1^+}{dt}\bigg|_{u=u^+} + L_1^+(u^+) = 0 \quad (t, \xi, a \in D^0 \times A). \tag{2.6}$$

Интегрируя (2.6) вдоль траектории (2.3) при $u = u'' \in U''$, $t_0, \xi_0 \in D_1{}^0$, с учетом $u^+ \in U''$ и (2.5) получим неравенства, доказывающие теорему:

$$\min_{u \in U''} \int_t^{t_1^*} L_1^+ \, d\tau = S_1^+(t, \xi, a) \leqslant \int_t^{t_*} L_1^+ \, d\tau. \tag{2.7}$$

Из (2.7) стабилизирующий (2.3) на $D_1{}^0$ регулятор $u^+(t, \xi, a)$ — субоптимальный по J_1:

$$J_1^0(t, \xi, a) \leqslant J_1(t, \xi, a \mid u^+) \leqslant S_1^+(t, \xi, a) \quad \text{при} \quad B'[S_1^+, u^+] \leqslant 0 \quad (t, \xi, a \in D^0 \times A),$$
$$S_1^+(t, \xi, a) \leqslant J_1^0(t, \xi, a) \leqslant J_1(t, \xi, a \mid u^+) \quad (B'[S_1^+, u_1^0] \geqslant 0, \; J_1^0 = J_1(u_1^0)). \tag{2.8}$$

Теорема 2 — это модификация в целях агрегации результатов [2, 3, 7, 8], полученных для решения проблемы обращения при более сильных предположениях. Приближенное решение $S_1{}^+(a)$, $J_1{}^+(a)$, $u^+(a)$ задачи (2.3) экстремизируем по параметру a. Для простоты критерием оптимальности вектора агрегации a_* изберем для $\forall a$, $a_* \in A$ условие минимума $f(a_*) \leqslant f(a)$ функционалов $f = f_j{}^\alpha(a)$ вида

$$f_1^\alpha(a) = \int_{C_1'^0} f_0(t, x, a \mid V^\alpha) \, dt \prod_{s=1}^{n} dx_s \, (f_0 \subset C(C_1'^0 \times A), \; C_1'^0 \subseteq C_1^0, \; \alpha = 1, 2), \tag{2.9}$$

$$V_+^1 \equiv S_1^+(t, \xi(t, x, a), a), V_+^{(2)} \equiv J_1^+(t, \xi(t, x, a), a) \; (j = \overline{1, 4}, \; J_1^+ \equiv J_1(t, \xi, a \mid u^+)),$$

$$f_2^1(a) = V_+^1(t, x, a), \; f_2^{(2)}(a) = V_+^{(2)}(t, x, a) \; ((t, x_s)^* = \text{fixconst}, \; s = \overline{1, n}),$$

$$f_3^{(\alpha)}(a) = \operatorname*{div}_{x'} g^\alpha(t, x, a) = \sum_{i=1}^{l} \partial g_i^\alpha / \partial x_i \, (g^\alpha \cdot x' \equiv f_2^\alpha, \; g^\alpha = (g_i^\alpha)^*, \; f_2^\alpha|_{x'=0} \equiv 0),$$

$$f_4^{(\alpha)}(a) = |B[f_2^\alpha, u_1^+]| \left(u_1^+ = u^+(t, \xi(t, x, a), a), \, B[f, u_0] = \frac{df}{dt}\bigg|_{u=u_0} + L_1(u_0) \right).$$

По теореме о среднем для $\forall t, x \in C_1{}'^0$ из $f_1{}^\alpha$ получаем $f_2{}^\alpha$ надлежащим выбором f_0. В случае неквадратичных $V_+{}^\alpha$ на x' показатель $f_3{}^\alpha$ — аналог вероятностного критерия [5, 9] типа tr. Невязка $f_4{}^\alpha$ характеризует для $V_+{}^1$, $V_+{}^{(2)}$ локальную близость оптимального $u_1{}^0$ и субоптимального $u_1{}^+$ регуляторов. Не требующее интеграции вдоль (1.1) при $u = u_1{}^+$ определение $f_j{}^1$ проще определения $f_j{}^{(2)}$. Внутренний вектор a_*' агрегации $a_*' = a$, минимизирующий f, удовлетворяет уравнению

$$\partial f/\partial a_* = 0\,(f = f^{\alpha}_{j}(a),\ a'_* = (a'_k)^* \in i(A), k \geqslant 1). \qquad (2.10)$$

Единственное решение (2.10) будет оптимальным вектором агрегации.

2.2. Второй вариант. Рассмотрим на $D \times A$ класс непрерывных вектор-функций $\Gamma_1 = \{\gamma(t, y, a)\}$, непрерывно дифференцируемых вне $y_2 = 0$, со значениями в Γ_-^+. Подстановкой $z = \gamma_* \in \Gamma_1$, где $\Gamma_-^+ = \{z_\beta^- \leqslant z_\beta \leqslant z_\beta^+\}$, в (2.3) получим агрегированную [4,5] систему

$$y^{\cdot} = Y_*(t, y, u|a),\ J_2^* = \int_t^{t_*} L_*(\tau, y, u|a)\,d\tau\,(t_* = \min t^1 : y_2[t^1] = 0), \qquad (2.11)$$

$$Y_* \equiv Y(t, y, \gamma_*(\tau, y, a), u, a) \subset C_1(D^0 \times A),\ Y = (Y_1, Y_2)^*\,(D^0 = D\ y_2 = 0),$$

$$0 \leqslant L_* \equiv L'_2(t, y, \gamma_*(t, y, a), u, a) \subset C(D \times \Omega^* \times A),$$

$$L_* \subset C_1(D^0 \times \Omega_0^* \times A),\ L'_2 = L',$$

$$u \in U''_* = \{u(t, y, a) \subset C(D^0 \times A),\ u \in \Omega^*\}\,(\Omega^* = \Omega|_{z=\gamma_*},\ \Omega_0^* = \Omega^* \backslash u = 0).$$

Здесь U_*'' — класс стабилизирующих (2.11) на $y \in D_1^0$ регуляторов со значениями в образе Ω_* области Ω при композиции $z = \gamma_*$; $y \in D^0$ на $[t_0, t_*)$ для $\forall u \in U_*''$. Минимум $S_2^*(t, y, a)$ функционала J_2^* на U_*'' — критерий оптимальности $u_*^0 \in U_*''$, $S_2^* = J_2[u_*^0]$.

Пусть на $D^0 \times A$ для (2.11) известны S_2^*, $u_*^0 \in U_*''$, удовлетворяющие условиям

$$S_2^*|_{y_2=0} \equiv 0,\ S_2^* \geqslant 0,\ B^*[S_2^*, u] \geqslant B^*[S_2^*, u_*^0] = 0\,(u, u_*^0 \in U''_*), \qquad (2.12)$$

$$B^*[f, u^0] \equiv (df/dt)_{u=u^0} + L_*(u^0)\,(f^{\cdot} = \partial f/\partial t + Y_* \cdot \partial f/\partial y),$$

где u_*^0 — регулятор, стабилизирующий (2.3) на D_1^0, т. е. $u_*^0 \in U''$. Из (2.11), (2.12) находим, что u_*, S_2^* — решение оптимальной задачи для γ_*-агрегированной системы (2.3), одновременно стабилизирующее и субоптимальное для (2.3) с $L' = L'_2$ в силу соотношений

$$\min_{u \in U''_*} J_2^* = S_2^*(t, y(t, x, a), a) \equiv V^1_*,\ I_2^0(t, x) \leqslant J_2(t, \xi(t, x, a), a|u_*^{0\prime}) \equiv V_*^{(2)}. \qquad (2.13)$$

Используя обозначения (2.13) и замену V_+^α на V_*^α из (2.9), получим критерии a-оптимальности. В отличие от варианта 2.1 в варианте композиционной агрегации 2.2 одновременно требуются включение $u_*^0 \in U''$, $u_*^0 \in U_*''$ и нахождение решения уравнения Беллмана—Якоби со свойствами (2.12). При интерпретации $z = \gamma_*(t, y, a)$ как связи на модель (2.3) в общем случае получаем дополнительное ограничение на u, не налагаемое в п. 2.1. В этом смысле способ агрегирования 2.2 грубее способа 2.1. Преимущество варианта 2.2 перед 2.1 состоит в y-автономности регулятора u_*^0. Случай линейного объекта (1.1) с квадратичным критерием (2.1) подробно рассмотрен в [5, 10]. В силу различия исходных постановок сравнение эффективности вариантов 2.1, 2.2, 2.3 и их комбинирование здесь не проводятся.

2.3. Вариант экстремальной агрегации. Пусть для z-компоненты решения (2.3) на отрезке $[t_0, t_1]$ при $\forall u'' \in U''$ и $\forall t_0$, $\xi_0 \in D_1^0$, a, $c_0 \in A$ известна оценка Г-области достижимости по z вида

$$\gamma_\beta^0(t, y[t], a) \leqslant z_\beta[t] \leqslant \gamma_\beta^1(t, y[t], a)$$

$$(\gamma^\alpha \in \Gamma_1,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ u = u'' \in U'',\ \alpha = 0{,}1), \qquad (2.14)$$

$$z\in\Gamma=\{z\,|\,\gamma^0_\beta(t,y,a)\leqslant z_\beta\leqslant\gamma^1_\beta(t,y,a)\}\ (\gamma^0_\beta(t_0,y_0,a)\leqslant z_\beta[t_0]\leqslant$$

$$\leqslant\gamma^1_\beta(t_0,y_0,a),\ \beta=\overline{1,n-2}).$$

Для (2.3) введем две агрегированные системы Σ_0, Σ_1 с достаточно гладкими критериями $S_3{}^0$, $S_3{}^1$ их оптимальности

$$y^{\cdot}=Y(t,y,v,a),\ v=(z_\beta,u_\sigma)^*\in M\equiv G\times U,\ z\in G\equiv\{\gamma(t,y,a)\in\Gamma_1,\gamma\in\Gamma\},\tag{2.15}$$

$$S^0_3(t,y,a)=\min_{z\in G}\min_{u\in U}J_3=\min_{v\in M}J_3(J_3=\int\limits_t^{t_1}L'_3\,d\tau,\ \ L'_3=L',\ \ u=(u_\sigma)^*,\ \ \sigma=\overline{1,r}),$$

$$S^1_3(t,y,a)=\max_{z\in G}\min_{u\in U}J_3(t_1=\min t^1:y_2[t^1]=0,\ \ U=\{u(t,\xi,a)\subset C,u\in\Omega\}).$$

В силу (2.14) оптимальная модель (2.3) содержится в объекте (2.15)— модель систем Σ_0, Σ_1. Обозначим оптимальные стабилизирующие на $P_1{}^0$ регуляторы систем Σ_0, Σ_1 через $v_3{}^0$, $v_3{}^1$. Для них функции $S_3{}^0$, $S_3{}^1$ удовлетворяют в области $P\times A$ соотношениям

$$S^\alpha_3(t,y,a)\geqslant S^\alpha_3|_{y_2=0}\equiv0,\qquad \min_{v\in M}B[S^0_3,v]=0\ \text{на}\ P^0\times A,\tag{2.16}$$

$$\max_{z\in G}\min_{u\in U}B[S^1_3,v]=0\ \text{на}\ P^0\times A\left(B[S^\alpha_3,v^0]\equiv\frac{dS^\alpha}{dt}\bigg|_{v=v^0}+L'_3(v^0),\alpha=0{,}1\right),$$

$$v^\alpha_3=(z^\alpha_\beta(t,y,a),u^\alpha_{\sigma3}(t,y,a))^*,$$

$$J_3[v^\alpha_3]=S^\alpha_3,\ \ v^\alpha_3\in M'(\beta=\overline{1,n-2},\ \sigma=\overline{1,r}\leqslant n),$$

$$M'=\{v'(t,y,a)\subset C,v'\in M,\ \ y[t,P^0_1\,|\,v']\in P^0,\ \ y_2[t_1,P^0_1\,|\,v']=0\,(t_0\leqslant t\leqslant t_1),$$

$$S^0_3(t,y,a)\leqslant S_3(t,y,z,a)\equiv$$

$$\equiv\min_{u''\in U''}J_3\leqslant S^1_3(t,y,a)\ (D^0_1\times A\ni(y_1,y_2,z_\beta,a_k)^*,k\geqslant1).$$

Последние неравенства являются следствиями используемого предположения о существовании достаточно гладкого оптимального решения $u_0''(t,\xi,a)$, $S_3=J_3[u_0'']$ задачи (2.3) и уравнений (2.16), из которых они получаются интегрированием вдоль (2.3) $(u\equiv u_0'')$ оценок на $D^0\times A$, соответствующих (2.16)

$$(dS^1_3/dt)_{u=u''_0}\leqslant-L'_3(t,\xi,u''_0,a)\leqslant(dS^0_3/dt)_{u=u''_0}(\xi^{\cdot}=F(t,\xi,u,a)).\tag{2.17}$$

Неравенства очевидны геометрически при подстановке в показатели (2.15) допустимого для Σ_0, Σ_1 оптимального элемента u_0'', ξ^0 модели (2.3). Регуляторы $u_3{}^0(t,y,a)$ и $u_3{}^1(t,y,a)$ оптимальны для экстремальных агрегированных систем $\Sigma_0{}^*$ и $\Sigma_1{}^*$, полученных из (2.15) заменой $z=z_3{}^\alpha(t,y,a)$ $(z_3{}^\alpha=(z_\beta{}^\alpha)^*,\ \alpha=0,1,\ \beta=\overline{1,n-2})$

$$dy^0/dt=Y(t,y^0,z^0(t,y^0,a),u,a),\ J^{*0}_3=\int\limits_t^{t^0_1}L'_3(\tau,y^0,z^0(t,y^0,a),u,a)\,d\tau,\tag{2.18}$$

$$dy^1/dt=Y(t,y^1,z^1(t,y^1,a),u,a),$$

$$J_3^{*1}=\int\limits_t^{t_1^1} L_3'(\tau, y^1, z^1(t, y^1, a), u, a)\,d\tau\,(y_2^\alpha[t_1^\alpha]=0),$$

$$S_3^\alpha(t, y, a)=\min_{u\in U_*''} J_3^{*\alpha}$$

$$(\dim y=2,\ t_0, y_0^\alpha\in P_1^0,\ y^\alpha[t]\in P^0,\ t\leqslant t_1^\alpha,\ u_3^\alpha\in U_*'',\ \alpha=0, 1).$$

Следовательно, они субоптимальны для (2.3) при $L'\equiv L'_3$. Допустим, что u_3^0, u_3^1 — регуляторы, стабилизирующие (2.3) на $D_1^0(u_3^\alpha\in U'')$. Тогда аналогично (2.7), (2.17) из (2.16) находим на $D_1^0\times A$ оценки

$$S_3^0(t, y, a)\leqslant J_3(t, \xi, a\,|\,u_3^0),\ S_3(t, \xi, a)\leqslant J_3(t, \xi, a\,|\,u_3^1),$$
$$J_3(t, \xi, a\,|\,u_3^1)\leqslant S_3^1(t, y, a), \tag{2.19}$$
$$J_3(t, \xi, a\,|\,u_3^0)-J_3(t, \xi, a\,|\,u_3^1)\geqslant S_3^0(t, y, a)-S_3^1(t, y, a)\quad(\alpha=0, 1).$$

Обозначим через t_0^0, t_0^1 первые моменты $\lim y_2^\alpha[t]=0$ при $t\to t_0^\alpha$ соответственно для $u=u_3^\alpha$ в (2.3). Интегрируя $B[S_3^\alpha, u_3^\delta]$ $(\delta=0,1)$ вдоль (2.3) для $\forall\, t_0, \xi_0\in D_1^0$, получим величину $\varrho=2[J_3(t, \xi, a|u_3^0)-$ $-J_3(t, \xi, a|u_3^1)]$, равную выражению

$$\varrho[t]=\int\limits_t^{t_0^0}(B[S_3^1, u_3^0]+B[S_3^0, u_3^0])\,d\tau-\int\limits_t^{t_0^1}(B[S_3^1, u_3^1]+B[S_3^0, u_3^1])\,d\tau, \tag{2.20}$$

знак которой фиксирует выбор u_3^α для лучшего приближения решения задачи (2.3). Если $t_0^0=t_0^1$ и $\varrho[t]$ монотонная функция, то для индекса $\alpha=0, 1$ имеем

$$2\alpha=1+\operatorname{sign}(B[S_3^1, u_3^0]+B[S_3^0, u_3^0]-B[S_3^1, u_3^1]-B[S_3^0, u_3^1]).$$

Из-за сложности проверки (2.20) в общем случае для субоптимальной стабилизации (2.3) выберем u_3^1 согласно (2.19). Критерии a-оптимизации приближения S_3^1, u_3^1 получаем из (2.9) заменой V_+^1, $V_+^{(2)}$ на $S_\alpha^*(t, x, a)\equiv S_3^\alpha(t, y(t, x, a), a)$, $I_3(t, x|u_3'^\alpha)$ $(u'=u(\xi(x)))$ с учетом обозначений (2.3), (2.18). При неопределенности выбора u_3^α заменим V_+^1 и $V_+^{(2)}$ соответственно на $|I_3(u_3^{1\prime})-I_3(u_3^{0\prime})|$ и $|S_\alpha^*-S_\delta^*|$ $(\alpha\neq$ $\neq\delta=0, 1)$.

Из сравнения систем (2.11), (2.18) следует, что в отличие от 2.2 в варианте 2.3 вектор-функция $z_3^\alpha=\gamma_*^\alpha(t, y, a)$ подчинена условиям (2.14), (2.16) экстремальной задачи (2.15).

2.4. y-Автономный [7, 8] случай задачи (2.3), (2.14). В этом варианте на $D^0\times A$ существует оптимальное решение $S^0(t, y, a)$, $u^0(t, \xi, a)\in U''$ задачи (2.3), удовлетворяющее условиям

$$S^0\geqslant S^0|_{y_2=0}\equiv 0,\ B[S^0, u]\geqslant B[S^0, u^0]\equiv 0\ \ (t, y, a\in P\times A,\ u, u^0\in U''),$$
$$B[S^*, u^*]\equiv\lambda(t, \xi, a)\,b(t, y, p_*', a) \tag{2.21}$$

$$(S^*=S^*(t, y, a),\ S^*, S^0\subset C(P\times A),\ S^*, S^0\subset C_1(P^0\times A)),$$

$$b(t, y, p'_*, a)\equiv 0,\ \partial b/\partial p'_*\neq 0 \text{ на } P^0\times A,\ \lambda\in C(D^0\times A)$$

$$\left(p'_*=\left(\frac{\partial S^*}{\partial t}, \frac{\partial S^*}{\partial y_\beta}\right)^*,\ \beta=1, 2\right),$$

$$B[S^*, u] \geqslant B[S^*, u^*],\ u^* = u^*(t, \xi, p_*, a),\ u^0 = u^*|_{S^*=S^0}\left(p_* = \left(\frac{\partial S^*}{\partial y_\beta}\right)^*\right).$$

Из (2.16) и (2.21) выводим, что $S_3{}^0 = S^0 = S_3{}^1$, если регуляторы

$$u_3^0 \equiv u^*(t, y, z^0, p_*, a) = u_3^0(t, y, a),\ u_3^1 \equiv u^*(t, y, z^1, p_*, a) = u_3^1(t, y, a), \quad (2.22)$$

где $\lambda(t, y, z^0, a) \leqslant \lambda(t, y, z, a) \leqslant \lambda(t, y, z^1, a)$, $z^\alpha \subset C(P^0 \times A)$, $\alpha = 0, 1$, являются стабилизирующими на $D_1{}^0(u_3{}^\alpha \in U'')$ для (2.3). При этом условии из (2.1), (2.19), (2.21) и $B[S^0, u_3{}^\alpha] = 0$ получаем равенства

$$S_3^\alpha = J_3(t, \xi, a | u_3^\alpha) = S^0(t, y, a) = \min_{u'' \in U''} J_3(t, \xi, a | u'') = I_3^0(t, x) = \min_{u' \in U'} I_3.$$

Отсюда заключаем, что экстремальные для (2.18) вектор-функции (2.22) будут оптимальными регуляторами задачи (2.3) ($L' \equiv L'_3$), если система (2.3), (2.14) y-автономна (2.21) и $u_3{}^\alpha \in U''$. В силу независимости $I_3[u_3{}'^\alpha]$ от a при $u_3{}'^\alpha = u_3{}'^\alpha[t, y(x), a]$ оптимизируемая система является грубой и поэтому a-минимизация по (2.9) не требуется. Заметим, что экстремальные по (2.18) при $z = \gamma_*(t, y, a) \in G$ регуляторы $u_3[\gamma_*] = u^*(t, y, \gamma_*, p_*, a)$ оптимальны для задачи (2.3), если $u_3[\gamma_*] \in U''$. Для линейных по u систем (1.1) предложены [7] условия на матрицу, вводящую управление, и внутренняя аппроксимация нестационарных ограничений на u, при которых система (2.3) обращается в y-автономную.

3. Примеры. Применим результаты пп. 1 и 2 к задачам оптимальной стабилизации невозмущенного движения некоторых консервативных и y-автономных систем. Функции Беллмана и оптимальные регуляторы для этих классов систем удовлетворяют условиям теорем 1 и 2. Для z-стабилизации движения $z \equiv 0$ консервативной системы

$$\dot q = \partial h/\partial p,\ \dot p = Au - \partial h/\partial q\ (z = (q_i, p_i)^*,$$
$$q = (q_i)^*,\ p = (p_i)^*,\ u = (u_s)^*,\ i = \overline{1, n},\ s = \overline{1, r}), \quad (3.1)$$
$$h = h(z) > 0,\ z \neq 0,\ h(0) = 0,\ \left.\frac{\partial h}{\partial q}\right|_{p=0,\, q\neq 0} \neq 0$$
$$\left(\frac{\partial h}{\partial z} = 0,\ z = 0,\ h \subset C_2(|z| < \infty)\right),$$
$$a^1 \neq 0,\ p \neq 0;\ a^1 = 0,\ p = 0$$
$$\left(a^1 = -A^* b,\ b = \frac{\partial h}{\partial p},\ A = |p| A_0,\ A_0 = \|a_{is}(z)\| \subset C_1(|z| < \infty)\right)$$

найдем при условии $0 \leqslant \nu(u) \leqslant \nu^0$, где $\nu(u)$ — положительно однородная выпуклая функция типа нормы [7], регулятор u^0 и оптимальный по критерию функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \tau[f_0(h) + f_1(h, \nu)]\, dt\ (t_1 = \infty,\ \nu^0 = \mathrm{const} > 0,\ f_0, f_1 \subset C(h \geqslant 0,\ \nu \geqslant 0)), \quad (3.2)$$
$$f_1(h, 0) \equiv 0,\ \left.\frac{\partial f_1}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} \geqslant 0,\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial \nu^2} > 0,\ f_0 \geqslant \nu^0 \frac{\partial f_1}{\partial \nu^0} - f_1(h, \nu^0) \equiv g_1(h) > 0,$$
$$\tau = \tau(z) = \varrho(a^1),\ \varrho(u) \equiv \sup_\xi (u \cdot \xi)\ \text{на}$$

$$\nu(\xi)=1\,(\varrho(0)=0;\ \varrho>0,\ u\neq 0;\ r\leqslant n)$$

на ограниченном множестве $N_0=\{z|h(z)<l^0\}$, где $0<l^0=\text{const}<$ $<\sup h$ при $z\in E^{2n}$. Множество N_0 ограничено, если $h\to\infty$ при $|z|\to\infty$. Функция $\varrho(u)$ имеет все свойства сопряженной ей функции $\nu(u)$ [7]. Экстремально решение

$$S_1=\int\limits_0^h\psi(h)\,dh,\ 0\leqslant h\leqslant l^0,\ u^0=\nu^0\partial\varrho/\partial a^1,\ z\in N_0^0\equiv N_0\backslash p=0, \tag{3.3}$$

$$\nu^0\psi(h)=f_0(h)+f_1(h,\nu^0)$$

$$(a^1=-A^*\partial h/\partial p;\ a^1\neq 0;\ p\neq 0;\ u^0(z)\equiv 0,\ z\in N^0\backslash N_0^0).$$

В силу (3.1) при $u=u^0(z)$, $z\in N_0$, имеем неравенства

$$h^{\cdot}=-\nu^0a^1\cdot\partial\varrho/\partial a^1=-\nu^0\varrho(a^1)\leqslant 0,\ p^{\cdot}=-\partial h/\partial q\neq 0 \text{ при}$$

$$p=0,\ z\neq 0\,(\varrho(a^1)>0,\ p\neq 0).$$

Отсюда по теореме Барбашина—Красовского находим, что регулятор (3.3) дает асимптотическую устойчивость $z\equiv 0$, если $z(t_0)\in N_0$. Тогда из теорем 1 и 2 следует, что u^0 — оптимальный по (3.2) регулятор задачи (3.1), (3.2). S_1 — минимум функционала $I(u)$ для $\forall z(t_0)\in N_0$. Регулятор $u^0(z)$ дает оптимальную стабилизацию $z\equiv 0$ в целом, если $h\to\infty$ при $|z|\to\infty$. Заменим равенства в (3.1) условиями

$$h_1(p)\leqslant h(z)\leqslant h_2(p),\ z\in C^1=\{z:|p|\leqslant c_1\}$$
$$(h_\alpha(0)=0,\ h_\alpha\subset C(C^1),\ c_1=\text{const},\ \alpha=1,2), \tag{3.4}$$
$$|A^*\partial h/\partial p|\geqslant w(h)\ (w(0)=0,\ \ w(h)\subset C[0,l_0],\ \ z\in C^1,\ \ h(z)\leqslant l_0\equiv\sup_{z\in C^1}h).$$

Здесь равенство $A=|p|A_0$ не требуется, $h_\alpha(p)$, $w(h)\gg 0$ на C^1, $[0,l_0]$. Пусть $c_0=\text{const}$ — минимум модуля корня $h_2(p)=l_1\equiv\min h_1(p)$ при $|p|=c_1$. На $D^1=\{0\leqslant h\leqslant l_1,\ z\in C^1\}$ рассмотрим

$$S_1^0(h)=\nu^{0^{-1}}\int\limits_0^h[f_0(h)+f_1(h,\nu^0)]\,dh,\ 0\leqslant h\leqslant l_0,\ u^0=\nu^0\frac{\partial\varrho}{\partial a^1}$$
$$(z\in C^1,\ p\neq 0,\ a^1=-A^*b\neq 0). \tag{3.5}$$

Из (3.2)—(3.5) получаем неравенства

$$\varrho(a^1)\geqslant\varrho_0|a^1|\geqslant\varrho_0 w(h),\ dS_1^0/dt\leqslant-\varrho_0[f_0+f_1(h,\nu^0)]\,w(h),$$

$$B[S_1^0,u]\geqslant B[S_1^0,u^0]=0,$$

$$\varrho_0=\min_e\varrho(e),\ |e|=1,\ u\in\{\nu(u)\leqslant\nu^0\},\ \nu(u^0)=\nu^0(z\in C^1,\ p\neq 0,\ 0<h\leqslant l_0),$$

при которых удовлетворяются условия теорем 1 и 2, а $u^0(z)$ будет оптимальным по (3.2) регулятором p-стабилизации (3.1), (3.4) для любого $z(t_0)\in C^0=\{z:|p|<c_0,\ p\neq 0\}$. Здесь $t_1\leqslant\infty$, а переменная типа действия $y_2=h(z)$ — инвариант (3.1) при $u\equiv 0$, $b=\partial h/\partial p$.

Пусть для уравнений возмущенного движения регулируемой системы

$$x^{\cdot}=X(t,x)+A(t,x)\,u\,(x=(x_k)^*,\ z=(t,x_k)^*\in E^{n+1},$$

$$u=(u_s)^*,\ k=\overline{1,n},\ s=\overline{1,r}), \tag{3.6}$$

$$0\leqslant\nu(u)\leqslant\nu^0,\ X=(X_k)^*,\ X(t,0)\equiv 0,\ A=\|a_{ks}\|\subset C_1(E^{n+1}),\ X\subset C_1(E^{n+1}),$$

$$x'=(x_i)^*,\ x''=(x_j)^*,\ X^1=(X_i)^*,\ A_1=\|a_{is}\|\,(i=\overline{1,\lambda\leqslant n},\ j=\overline{\lambda+1,n\geqslant r})$$

известна x'-определенно положительная функция $y(z)$ со свойствами

$$y_1(x')\leqslant y(z)\leqslant y_2(x')$$

$$(y_\alpha(0)=0,\ y_\alpha\to\infty,\ |x'|\to\infty,\ y, y_\alpha\subset C(E^{n+1}),\ \alpha=1,2), \tag{3.7}$$

$$F[y]\equiv\tau g(y),\ x'\neq 0$$

$$\left(y\subset C_1(x'\neq 0),\ \tau\equiv\varrho(-a),\ a\equiv A^*\frac{\partial y}{\partial x},\ F=\frac{\partial}{\partial t}+X_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right),$$

$$\sup_{y\to 0} g(y)\equiv g^0<\nu^0,$$

$$|A^*\,\partial y/\partial x|\geqslant w(y)>0,\ x'\neq 0,\ y\neq 0\,(w(0)=0, w\subset C(y\geqslant 0)).$$

Здесь $y_\alpha(x')$, $w(y)$ — положительно определенные функции на E^λ, $y\geqslant 0$, $g=g(y)$ непрерывна на $y>0$ и не зависит явно от z, $\varrho(u)$ задана формулой (3.2). Неравенства (3.7) справедливы для норм-инвариантной, а также y-автономной системы (3.6), удовлетворяющей условиям

$$y(z)=y^1(x')\equiv|P^*x'|,\ P=\|p_{is}\|=\mathrm{const},\ \det P\neq 0,$$

$$i,s=\overline{1,r}=\dim x'=\dim u, \tag{3.8}$$

$$\nu(u)=\nu^1(u)\equiv|C^*u|,\ C=c_0^{-1}A_1^*P,\ A_1=\|a_{is}\|=\mathrm{const},\ \det A_1\neq 0,\ X^1=(X_i)^*,\ r\leqslant n,$$

$$|c_0|^{-1}PP^*x'\cdot X^1\equiv g(y^1)\,|P^*x'|,\quad |c_0|\,\nu^0>k^0p^0,\quad p^0=\max_{|e|=1}|Pe|,\quad \sup_{x'=0,t\geqslant 0}|X^1|\equiv$$
$$\equiv k^0<\infty,$$

при которых $\tau=|c_0|=\mathrm{const}$, $\nu^1=|c_0|^{-1}|P^*A_1u|$, $\varrho^1(u)=|c_0|\times\times|P^{-1}A_1^{*-1}u|$. Для x'-стабилизации (3.6) найдем регулятор u^0, оптимальный по критерию

$$I=\int_{t_0}^{t_1}\tau(z)\,[k_0(y)+k_1(y)\nu(u)]\,dt\,\left(I^1=|c_0|\int_{t_0}^{t_1}[k_0(y^1)+k_1(y^1)\nu^1(u)]\,dt\right), \tag{3.9}$$

$$g(y)\geqslant l(y)\equiv -k_0(y)\,k_1^{-1}(y),$$

$$k_0\geqslant 0,\ k_1>0,\ y>0\,(k_\gamma\subset C(y\geqslant 0), t_1\leqslant\infty, \gamma=0,1)$$

типа времени-импульса. Если существуют $y_0>0$, где $g(y_0)\geqslant\nu^0$, то обозначим через d^1 наименьший корень уравнения $g(y)=\nu^0$ и через $D_0{}^1$ область в $E_+{}^{n+2}$ вида $\{0<y<d^1,\ y(z)<d^1\}$. Из (3.6), (3.7), (3.9) находим выражения

$$u^0(z)=\nu^0\,\partial\varrho/\partial a_1,\ \tau[k_0+\nu^0k_1+f_2\psi]=0, y^{\cdot}|_{u=u^0}=\tau f_2\ \ (f_2\equiv g-\nu^0, \nu(u^0)=\nu^0), \tag{3.10}$$

$$S=\int_0^y\psi(y)\,dy,\ 0\leqslant y\leqslant d^1,\ \psi=$$

$$=-f_2^{-1}(k_0+\nu^0k_1),\ 0<y<d^1\left(a_1=-A^*\frac{\partial y}{\partial x}, \tau=\varrho(a_1)\right).$$

При условиях $k_0\equiv -gk_1$, $g\leqslant 0$ $(y>0)$ получаем в $D_0{}^1$ стационарный граничный режим [7], для которого имеем полную систему уравнений

$$b^{(1)}[S_*]=b^{(2)}[S_*]=(b^{(1)},b^{(2)})=$$
$$=\frac{dg}{dy}b^{(2)}=0\left(b^1=k_0+g\psi_*,\ b^{(2)}=k_1-\psi_*,\ \psi=\frac{dS_*}{dy}\right), \qquad (3.11)$$

где $\quad g(y)\equiv l(y)\leqslant 0,\ y>0,\ u^0_*=u^0=\nu^0\,\partial\varrho/\partial a_1,\ x'\neq 0,\ \psi_*=k_1(y).$

$$S_*=S|_{l=g}=\int\limits_0^y k_1(y)\,dy,\ y\geqslant 0\,(k_0k_1^{-1}\equiv -l,\ k_1,g\subset C_1(y\geqslant 0)).$$

При $g>l$ для $y>0$ на D_0^1 имеем нестационарный граничный режим и равенства $S^*\equiv S(y)$, $0\leqslant y\leqslant d^1$, $u_*^1\equiv u^0(z)$ на области D_0^1. С учетом (3.7)—(3.10) и неравенств $B[S,u]\geqslant B[S,u^0]=0$, $\nu(u^0)=\nu^0=$ $=\mathrm{const}$, $-S^{\cdot}\geqslant\varrho_0(k_0+\nu^0k_1)w$, $\varrho_0=\min\varrho(e)\,(|e|=1)$ заключаем, что для всякого $z(t_0)\in C^0=\{t\geqslant 0,\ 0<|x'|<r_\delta,\ |x''|<\infty\}$ $(\delta=0,1)$ регулятор (3.10) — оптимальный для (3.6), (3.7), (3.9). Здесь $r_\delta=\mathrm{const}$ — минимальный модуль корня уравнения $y_2(x')=d^\delta$, $d^0=\min y_1(x')$ при $|x'|=r_1=\mathrm{const}$. Регулятор (3.10) оптимально x'-стабилизирует (3.6) в целом, если $f_2<0$ на $y>0$. Это справедливо в случае (3.11) для $\forall\,\nu^0>0$. При $I=I^1$ из (3.8), (3.10) находим простые выражения

$$u^0=-|c_0|\nu^0A_1^{-1}x'|P^*x'|^{-1},$$

$$t_1=t_0+|c_0|^{-1}\int\limits_0^{y_0^1}(\nu^0-g(\xi))^{-1}d\xi<\infty\,(y^1(t_0)<d^1,\ y^1=|P^*x'|),$$

аналогичные формулам Атанса—Летова, полученным для случая

$$\lambda=r=n,\ y^1=|x|,\ \nu^1(u)=|u|,\ g(y^1)\equiv 0,\ k_\delta=\mathrm{const}\geqslant 0,\ \delta=0{,}1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. — В кн.: Малкин И. Г. «Теория устойчивости движений», доп. 4. М., 1966, с. 475—514.
2. Румянцев В. В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем. — ПММ, 1970, т. 34, вып. 3, с. 440—456.
3. Демин В. Г., Фурасов В. Д. К стабилизации управляемых систем по части переменных. — ПММ, 1976, т. 40, вып. 2, с. 355—359.
4. Wismer, D. A., Aoki, M. Optimization methods for large-scale systems, 5 aggregation. New York, 1971, p. 191—232.
5. Ульм С. Метод агрегации для синтеза субоптимальных управлений. — Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 1971, т. 20, № 1, с. 3—7.
6. Grujič, Lj. T., Gentina, J. C., Borne, P. General aggregation of large-scale systems by vector Lyapunov functions and vector norms. — Int. J. Control, 1976, v. 24, N 4, p. 529—537.
7. Кейс И. О понижении размерности в задачах оптимального синтеза некоторых динамических систем. — Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 1977, т. 26, № 1, с. 37—47.
8. Летов А. М. Динамика полета и управления. М., 1969, с. 130—174.
9. Kleinman, D. L., Athans M. The design of suboptimal linear time-varying systems. — IEEE Trans. Automat. Control, 1968, v. AC—13, N 2, p. 150—152.
10. Ульм С. Ю. О приближенных методах синтеза управлений. — Автоматика и телемеханика, 1972, № 5, с. 27—32.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
20/IX 1977

I. KEIS

JUHTIMISE SUBOPTIMAALSEST SÜNTEESIST AGREGEERIMISMEETODIL

Artiklis on vaadeldud mittelineaarse dünaamilise süsteemi juhtimise ülesannet integraalse efektiivsusindeksi korral ja uuritud n-mõõtmelise süsteemi agregeerimise erinevaid viise juhtimise optimaalse sünteesi ülesande ligikaudseks lahendamiseks. Suboptimaalsed regulaatorid on leitud agregeeritud süsteemist Bellmann—Ljapunovi taastavate funktsioonide meetodil. On esitatud ligikaudsete lahendite optimeerimise kriteeriumid agregeerimisvektori järgi ja näited mõnede konservatiivsete ja y-autonoomsete süsteemide liikumise optimaalse stabiliseerimise ülesannete lahendamiseks.

I. KEIS

SYNTHESIS OF SUBOPTIMAL CONTROL VARIANTS VIA AGGREGATION METHOD

The control problem of nonlinear dynamical system with an integral performance index is considered in the paper. Various aggregation ways for approximate control synthesis are investigated. Suboptimal controls are determined via Lyapunov—Bellman generating functions for aggregated systems. Exact optimal solutions for y-autonomous systems and some criteria for optimal aggregation vector choice are put forward.