EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1978, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1978, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1978.3.03

УДК 513.013

А. ФЛЯЙШЕР

РЕДУКТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И НЕАССОЦИАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

§ 1. Предварительные сведения

Пусть G — связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и H — замкнутая подгруппа в G с подалгеброй Ли $\mathfrak{h}$. Однородное пространство $M = G/H$ называется редуктивным [1, 2], если в $\mathfrak{g}$ существует такое подпространство $\mathfrak{m}$, называемое редуктивным дополнением или оснащением, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{m}$ (прямая сумма) и $(AdH)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Локально (в терминах алгебр Ли) второе условие означает $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, и тогда соответствующая пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ называется редуктивной парой. Известно, что G/H является редуктивным, например, всегда, когда H компактна или полупроста ([1]). Следуя А. Сэйглу [3], фиксированное редуктивное дополнение $\mathfrak{m}$ можно наделить структурой неассоциативной антикоммутативной алгебры, полагая для $X, Y \in \mathfrak{m}$ произведение $X \cdot Y = [X, Y]_{\mathfrak{m}}$, где $[X, Y]_{\mathfrak{m}}$ — проекция скобки $[X, Y]$ на подпространство $\mathfrak{m}$ (аналогично: $[X, Y]_{\mathfrak{h}}$ — проекция скобки $[X, Y]$ на $\mathfrak{h}$). Строение этой алгебры, которую мы будем обозначать через $(\mathfrak{m}, \cdot)$ или просто через $\mathfrak{m}$, тесно связано с геометрией соответствующего редуктивного пространства G/H [3, 4]. Однако алгебра $\mathfrak{m}$ не является единственной неассоциативной алгеброй, связанной с G/H. В силу результата К. Номидзу [2], на редуктивном пространстве G/H с фиксированным разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{m}$ существует биективное соответствие между множеством G-инвариантных связностей на G/H и множеством билинейных функций $\alpha : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$, которые $Ad(H)$-инвариантны, т. е. с каждой G-инвариантной связностью на G/H связывается некоторая неассоциативная алгебра $(\mathfrak{m}, \alpha)$, для которой $Ad(H) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{m}, \alpha)$. Из всех инвариантных связностей на $M = G/H$ выделяется естественная связность без кручения [2], для которой $\alpha(X, Y) = 1/2\ X \cdot Y$. Алгеброй, соответствующей этой связности, является, очевидно, алгебра $\mathfrak{m}$.

В дальнейшем метрику с естественной связностью без кручения будем обозначать буквой B. Однородное пространство G/H с такой метрикой называется естественно-редуктивным. Примером такого пространства является, в частности, однородное пространство, локально определяемое парой Киллинга $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ [5].

Линейную группу голономии инвариантной связности α на однородном пространстве G/H будем обозначать через $\mathrm{Hol}\,(\alpha)$ и алгебру голономии через $\mathfrak{hol}\,(\alpha)$. Если рассматривать только односвязные G/H, то $\mathrm{Hol}\,(\alpha)$ всегда связна, потому $\mathrm{Hol}\,(\alpha) = \exp \mathfrak{hol}\,(\alpha)$ и действие $\mathrm{Hol}\,(\alpha)$ на $\mathfrak{m}$ равносильно действию $\mathfrak{hol}\,(\alpha)$ на $\mathfrak{m}$. В данной работе все редуктивные однородные пространства предполагаются односвязными.

Определение 1. *Односвязное однородное пространство G/H называется голономно неприводимым относительно связности* α, *если* $\mathfrak{hol}\,(\alpha)$ *действует неприводимо на* $\mathfrak{m}$.

Известная теорема Ж. де Рама [6], согласно которой всякое полное односвязное риманово многообразие изометрично прямому произведению односвязных голономно неприводимых римановых многообразий, стимулирует исследование голономно неприводимых пространств. Строение алгебры $\mathfrak{m}$ связано с голономной неприводимостью редуктивного G/H следующим результатом.

Теорема 1. (Сэйгл [3]). *Пусть G/H — односвязное редуктивное однородное пространство с разложением* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$. *Если* $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m} \neq 0$ *и G/H голономно неприводимо относительно естественной связности без кручения, то алгебра* $\mathfrak{m}$ *проста. Обратно: если G/H является псевдоримановым пространством и* $\mathfrak{m}$ *проста, то G/H голономно неприводимо.*

В случае риманова однородного пространства имеет место более сильное утверждение.

Теорема 2. (Костант [7]). *Пусть G/H — односвязное риманово естественно-редуктивное однородное пространство. Оно голономно неприводимо относительно естественной связности без кручения тогда и только тогда, когда G проста.*

В настоящей работе мы продолжаем сравнительное изучение алгебр $(\mathfrak{m}, \alpha)$ и $\mathfrak{m}$, начатое Б. Костантом [8], и выясняем взаимосвязь строения этих алгебр и соответствующего редуктивного пространства G/H, опираясь на результаты, полученные А. Сэйглом [4]. Основной результат: односвязное однородное естественно-редуктивное пространство при определенных условиях, накладываемых на инфинитезимальную структуру, разлагается в прямое произведение своих вполне геодезических подмногообразий или же голономно неприводимо (относительно естественной связности без кручения).

§ 2. Алгебры псевдоримановых связностей

Предложение 1. *Пусть G/H — односвязное редуктивное однородное пространство с разложением* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ *и* α *— инвариантная псевдориманова связность на G/H. Тогда простота алгебры* $\mathfrak{m}$ *влечет простоту алгебры* $(\mathfrak{m}, \alpha)$.

Доказательство. Рассматриваемая связность α является связностью без кручения и потому

$$\operatorname{Tor}(X, Y) = \alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) - X\cdot Y = 0. \tag{1}$$

Отсюда сразу следует, что $(\mathfrak{m}, \alpha)$ — алгебра с ненулевым умножением. Действительно, если имеет место обратное, то из соотношения (1) получаем $X\cdot Y = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{m}$, но тогда $\mathfrak{m}^2 = 0$, что противоречит простоте $\mathfrak{m}$. Если теперь $(\mathfrak{m}, \alpha)$ содержит двусторонний идеал $\mathfrak{n}$, то опять же из (1) получаем противоречие: $\mathfrak{n}$ является идеалом и в алгебре $\mathfrak{m}$.

Предложение 2. *Пусть G/H — односвязное однородное пространство с компактной G и* $\mathfrak{m}$ *— ортогональное дополнение к* $\mathfrak{h}$ *относительно положительно определенной квадратичной формы B на* $\mathfrak{g}$. *Тогда простота G влечет простоту алгебры* $(\mathfrak{m}, \alpha)$, *где* α *— произвольная инвариантная псевдориманова связность на G/H.*

Доказательство. Пусть алгебра $(\mathfrak{m}, \alpha)$ не проста, тогда не проста и алгебра $\mathfrak{m}$ (предложение 1) и потому G/H голономно приводимо относительно естественной связности без кручения (теорема 1). Но это противоречит голономной неприводимости риманова редуктивного однородного пространства G/H с простой G относительно естественной связности без кручения (теорема 2).

Предложение 3. *Пусть G/H — односвязное редуктивное несимметрическое пространство с инвариантной псевдоримановой связностью α. Если G/H голономно неприводимо относительно α, то алгебра $(\mathfrak{m}, \alpha)$ — проста.*

Доказательство. Если $\alpha(X, Y) = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{m}$, то $0 = \operatorname{Tor}(X, Y) = -X \cdot Y$, т. е. G/H оказывается симметрическим, что противоречит условию. Пусть $(\mathfrak{m}, \alpha)$ содержит собственный идеал. Тогда, согласно [3], она содержит собственный идеал $\mathfrak{n}$, инвариантный относительно $\mathfrak{hol}(\alpha)$, что противоречит голономной неприводимости G/H.

Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — редуктивная пара с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{m}$. Следуя А. М. Васильеву [9], назовем подалгебру $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ нормальной, если

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}.$$

Такая подалгебра определяет в соответствующем пространстве G/H вполне геодезическое подмногообразие относительно связности, определяемой оснащением $\mathfrak{m}$. Оснащение $\mathfrak{m}$ называется «проникающим в $\mathfrak{g}$» ([7]), если в редуктивном разложении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{m}$ подалгебра $\mathfrak{h} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}}$. Таким оно является, в частности, в случае простой алгебры $\mathfrak{h}$ ([10]). Следующая теорема дополняет результат Б. Костанта ([7], теорема 5) о голономной приводимости римановых однородных пространств.

Теорема 3. *Пусть G/H — односвязное редуктивное несимметрическое однородное пространство с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}$ — «проникающее в $\mathfrak{g}$» оснащение. Если G/H голономно неприводимо относительно естественной связности без кручения, то $\mathfrak{g}$ не содержит собственных нормальных идеалов.*

Доказательство. В силу теоремы 1 алгебра $\mathfrak{m}$ проста и пусть $\mathfrak{g}$ содержит собственный нормальный идеал $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$. Предполагая действие группы эффективным, можем считать $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m} \neq 0$, так как в противном случае подалгебра $\mathfrak{h}$ будет содержать идеал $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}$, являющийся идеалом и в $\mathfrak{g}$. По условию $[\mathfrak{g}', \mathfrak{m}] = [\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$, и потому $[\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}, \mathfrak{m}] + [\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$. Но $[\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset (\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}) \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$, следовательно, $[\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{m}} = (\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}) \cdot \mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$, т. е. $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$ — идеал в $\mathfrak{m}$. Ввиду простоты $\mathfrak{m}$ возможно лишь $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, но тогда $[\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ и необходимо $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}$. По условию $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$, что влечет $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 3. Об одном классе естественно-редуктивных пространств

Рассмотрим редуктивные однородные пространства G/H, для которых редуктивная структура задается подпространством

$$\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \mid B(X, Y) = 0 \ \ \forall Y \in \mathfrak{h}\}$$

и ограничение формы B на подалгебре $\mathfrak{h}$ невырождено. Поскольку в этом случае $B(X \cdot Y, Z) = B(X, Y \cdot Z)$ для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$, то G/H является естественно-редуктивным пространством [6].

Определение 2. *Редуктивное однородное пространство G/H с фиксированным разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ называется пространством с идеально ненулевым умножением в $\mathfrak{m}$, если алгебра $\mathfrak{m}$ не содержит идеалов с нулевым умножением.*

Следующее предложение указывает на существование таких однородных пространств. Для его формулировки отметим, что на алгебре $\mathfrak{m}$, равно как и на произвольной конечномерной алгебре, можно определить форму Киллинга $\tilde{B}(X, Y)$, полагая

$$\tilde{B}(X, Y) = \operatorname{tr}(L(X)L(Y)),$$

где $L(X) : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$, $Y \mapsto X \cdot Y$ для $X, Y \in \mathfrak{m}$.

Предложение 4. *Пусть G — полупростая связная группа Ли и H — ее замкнутая подгруппа. Пусть B — форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$, ограничение $B_{\mathfrak{h}}$ которой невырождено, и $\mathfrak{m}$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ относительно B. Если ограничение формы B на $\mathfrak{m}$ совпадает с формой Киллинга самой алгебры $\mathfrak{m}$, то G/H есть естественно-редуктивное пространство с идеально ненулевым умножением в $\mathfrak{m}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{n}$ — идеал в $\mathfrak{m}$, удовлетворяющий условию $\mathfrak{n}^2 = 0$. Выберем базис в $\mathfrak{n}$ и дополним его до базиса в $\mathfrak{m}$. Тогда для $X \in \mathfrak{n}$, $Y \in \mathfrak{m}$ преобразования $L(X)$ и $L(Y)$ примут вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

соответственно. Следовательно, $\operatorname{tr}(L(X)L(Y)) = 0$ и потому $\tilde{B}(\mathfrak{n}, \mathfrak{m}) = 0$. Отсюда следует, что в случае невырожденности формы $\tilde{B}$ алгебра $\mathfrak{m}$ не содержит идеалов $\mathfrak{n}$, удовлетворяющих условию $\mathfrak{n}^2 = 0$. Теперь наше утверждение будет вытекать из невырожденности ограничения формы Киллинга B алгебры $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{m}$.

Прежде чем дать геометрическую характеристику введенных пространств, уточним формулировку известной теоремы Ж. де Рама [6] на случай естественно-редуктивных римановых однородных пространств.

Теорема 4. *Пусть $M = G/H$ — односвязное риманово естественно-редуктивное однородное пространство с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ и Φ — группа голономии римановой связности. Тогда*

1) *имеет место единственное с точностью до порядка разложение*

$$\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}_0 \oplus \overline{\mathfrak{m}}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{\mathfrak{m}}_p \tag{2}$$

в прямую сумму взаимно ортогональных Φ-инвариантных подпространств; Φ действует тривиально на $\overline{\mathfrak{m}}_0$ и неприводимо на $\overline{\mathfrak{m}}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$;

2) *имеет место соответствующее разложение $M = M_0 \times M_1 \times \ldots \times M_p$ в прямое произведение римановых пространств таких, что $\overline{\mathfrak{m}}_j$ является касательным пространством для M_j $(0 \leqslant j \leqslant p)$.*

Заметим, что в разложении (2) каждое $\overline{\mathfrak{m}}_j (0 \leqslant j \leqslant p)$ является идеалом в $\mathfrak{m}$, так как $[\overline{\mathfrak{m}}_j, \overline{\mathfrak{m}}_j] \subset \mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{m}}_j$ и $\overline{\mathfrak{m}}_i \cdot \overline{\mathfrak{m}}_j = 0$ для $i \neq j$ ([6], с. 213). Далее, всякий идеал с нулевым умножением $\overline{\mathfrak{m}}_k$ алгебры $\mathfrak{m}$ является центральным (действительно, $\overline{\mathfrak{m}}_k \cdot \mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}_k \cdot \overline{\mathfrak{m}}_k = 0$) и потому алгебра $\mathfrak{m}$ разложима в прямую сумму своего центра $\mathfrak{z}$ и подалгебры $\mathfrak{k}$, не содержащей идеалов с нулевым умножением, подобно тому, как любая редуктивная алгебра Ли разложима в прямую сумму своего центра и полупростой подалгебры. В разложении (2) можно изменить порядок таким образом, чтобы $\mathfrak{z} = \overline{\mathfrak{m}}_0 \oplus \ldots \oplus \overline{\mathfrak{m}}_s$ и $\mathfrak{k} = \overline{\mathfrak{m}}_{s+1} \oplus \ldots \oplus \overline{\mathfrak{m}}_p$

давали, соответственно, центр и полупростую подалгебру алгебры $\mathfrak{m}$. Итак, справедлива

Теорема 5. *Пусть G/H — односвязное риманово естественно-редуктивное однородное пространство с фиксированным разложением* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$. *Тогда* $\mathfrak{m} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{k}$, *где* $\mathfrak{z}$ *и* $\mathfrak{k}$ — *идеалы в* $\mathfrak{m}$, *причем* $\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{m} = 0$. *Имеет место соответствующее разложение*

$$G/H = G_1/H \times G_2/H,$$

где G_1/H — симметрическое пространство с касательным пространством $\mathfrak{z}$, а G_2/H — несимметрическое пространство с идеально ненулевым умножением в касательном пространстве $\mathfrak{k}$.

Из данной теоремы следует, что односвязные римановы естественно-редуктивные однородные пространства с идеально ненулевым умножением в фиксированном редуктивном дополнении $\mathfrak{m}$ образуют естественный класс редуктивных «максимально не симметрических» пространств.

Теорема 6. *Пусть G/H — односвязное естественно-редуктивное однородное пространство с метрикой B и идеально ненулевым умножением в редуктивном дополнении $\mathfrak{m}$. Если G/H голономно приводимо, то $\mathfrak{m}$ является прямой суммой* $\mathrm{hol}\,(B)$*-инвариантных простых идеалов*

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{m}_r, \tag{3}$$

причем это разложение ортогонально относительно B и

(а) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{m}_i$;

(б) $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{m}_i \quad (\mathfrak{m}_i \cdot \mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}_i)$;

(в) $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] = 0, \quad i \neq j; \quad (i, j = 0, 1, \ldots, r)$.

Доказательство. В силу теоремы 1 алгебра $\mathfrak{m}$ содержит собственный идеал. Тогда множество собственных $D(\mathfrak{h})$-инвариантных идеалов алгебры $\mathfrak{m}$ не пусто. Пусть идеал $\mathfrak{m}_0$ минимален в этом множестве, т. е. $\mathfrak{m}_0 \neq 0$, и не существует идеалов, строго промежуточных между 0 и $\mathfrak{m}_0$. Пусть, далее, $\mathfrak{m}'_0$ обозначает ортогональное дополнение к $\mathfrak{m}_0$ относительно B, т. е. $\mathfrak{m}'_0 = \{X \in \mathfrak{m} \mid B(X, \mathfrak{m}_0) = 0\}$. В силу равенств

$$B([\mathfrak{m}'_0, \mathfrak{h}], \mathfrak{m}_0) = B(\mathfrak{m}'_0, [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}_0]) = 0,$$

$$B(\mathfrak{m}'_0 \cdot \mathfrak{m}, \mathfrak{m}_0) = B(\mathfrak{m}'_0, \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}_0) = 0$$

оно также является $D(\mathfrak{h})$-инвариантным идеалом в $\mathfrak{m}$. Покажем, что $\mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{m}'_0 = 0$. Если это не так, то минимальность $\mathfrak{m}_0$ влечет включение $\mathfrak{m}_0 \subset \mathfrak{m}'_0$. Это означает, что $B(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0) = 0$, откуда $B(\mathfrak{m}_0^2, \mathfrak{m}) = B(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}) = 0$. Следовательно, $\mathfrak{m}_0^2 = 0$, вопреки условию. Итак, $\mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{m}'_0 = 0$, и потому $\mathfrak{m}$ является прямой суммой $\mathfrak{m}_0$ и $\mathfrak{m}'_0$. Равенство $B(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0) = 0$ влечет $0 = B(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0 \cdot \mathfrak{m}) = B(\mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}'_0, \mathfrak{m})$. Но $B(\mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}'_0, \mathfrak{h}) = 0$, потому $B(\mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}'_0, \mathfrak{g}) = 0$ и $\mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}'_0 = 0$. Следовательно, $[\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0] \subset \mathfrak{h}$ и $B([\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0], \mathfrak{m}) = 0$. Далее, $B([\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0], \mathfrak{h}) = B(\mathfrak{m}_0, [\mathfrak{m}_0', \mathfrak{h}]) \subset B(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0) = 0$. В итоге $B([\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0], \mathfrak{g}) = 0$ и $[\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0] = 0$.

Из включений $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}_0] \subset \mathfrak{m}_0$, $[\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0] \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{m}_0$ вытекает, что подпространство $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}_0$ является подалгеброй Ли в $\mathfrak{g}$. Так как $B(\mathfrak{h}_0, \mathfrak{m}'_0) = 0$, то G/H_0 — естественно-редуктивное пространство, где H_0 — связная подгруппа в G, имеющая $\mathfrak{h}_0$ своей алгеброй Ли. Однородное пространство G/H_0 есть пространство с идеально ненулевым умножением в $\mathfrak{m}'_0$. Действительно, если $\mathfrak{n}$ — такой идеал в $\mathfrak{m}'_0$, что $\mathfrak{n}^2 = 0$, то $\mathfrak{n}$ является идеалом и в $\mathfrak{m}$, так как $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cdot (\mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}'_0) = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}'_0 \subset \mathfrak{n}$ (поскольку $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}_0 = 0$), что противоречит условию. Теперь, если $\mathfrak{m}'_0$ проста, дальнейшее разложение невозможно. Если же $\mathfrak{m}'_0$ не проста, то условия теоремы наследуются пространством G/H_0, и процесс продолжается до тех пор, пока $\mathfrak{m}$ не разложится в прямую сумму простых идеалов, взаимно ортогональных относительно формы B. Так как алгебра голономии $\mathfrak{hol}(B)$ связности, определяемой формой B, порождена всеми отображениями $L(X)$ ([4]), то все $\mathfrak{m}_i$ являются $\mathfrak{hol}(B)$-инвариантными. Заключения (а) — (в) следуют непосредственно из доказательства.

Покажем, что полученное разложение (3) является аналогом разложения де Рама касательного пространства $T_0(M)=\mathfrak{m}$ односвязного риманова естественно-редуктивного пространства M.

Теорема 7. *Пусть $M=G/H$ — односвязное риманово естественно-редуктивное однородное пространство с идеально ненулевым умножением в касательном пространстве $T_0(M)=\mathfrak{m}$. Тогда разложение* (3) *алгебры $\mathfrak{m}$ является разложением де Рама касательного пространства* $T_0(M)$.

Доказательство. Как было указано выше, в разложении де Рама (2) касательного пространства $T_0(M)=\mathfrak{m}$ каждое $\overline{\mathfrak{m}}_j$ является идеалом в $\mathfrak{m}$. Далее, так как риманова связность, определяемая положительно определенной формой B на $\mathfrak{m}$, совпадает с канонической связностью без кручения, то алгебра голономии $\mathfrak{hol}(B)$ этой связности совпадает с алгеброй Ли, определяемой отображениями $L(X):\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}$, $Y\mapsto X\cdot Y$ ([4]). Пусть некоторая алгебра $\overline{\mathfrak{m}}_j$ непроста. Так как в предположениях теоремы $\overline{\mathfrak{m}}_j^2\neq 0$, то $\overline{\mathfrak{m}}_j$ должна содержать собственный идеал $\overline{\mathfrak{n}}_j$. В силу положительной определенности B на $\mathfrak{m}$ подпространство

$$\overline{\mathfrak{m}}'_j=\{X\in\mathfrak{m}\mid B(X,\mathfrak{m}_j)=0\}$$

представляет собой прямое слагаемое в $\mathfrak{m}(\mathfrak{m}=\overline{\mathfrak{m}}_j\oplus\overline{\mathfrak{m}}_j')$ и, в силу $\overline{\mathfrak{n}}_j\cdot\overline{\mathfrak{m}}_j'=0$, подпространство $\overline{\mathfrak{n}}_j$ является идеалом и в $\mathfrak{m}$, т. е. $L(m)$ — приводимым подпространством, что противоречит неприводимости $\mathfrak{hol}\,(B)$ на $\overline{\mathfrak{m}}_j$. Следовательно, все идеалы $\overline{\mathfrak{m}}_j$ просты, и теперь утверждение теоремы следует непосредственно из результата о единственности разложения конечномерной неассоциативной алгебры в прямую сумму простых идеалов.

Теорема 8. *Пусть G/H — односвязное естественно-редуктивное однородное пространство. Согласно предположениям теоремы 6, если $\mathfrak{m}=\bigoplus_{i=1}^{r}\mathfrak{m}_i$ — разложение* (3), *то*

(1) $\mathfrak{g}_i=[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}}+\mathfrak{m}_i$ *являются идеалами в* $\mathfrak{g}$;

кроме того, если $\mathfrak{m}$ *«проникает в* $\mathfrak{g}$», *то*

(2) $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}_r$.

Доказательство. Так как каждое $\mathfrak{m}_i$ является $D(\mathfrak{h})$-инвариантным, то подпространства $\mathfrak{h}_i=[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}}$ — идеалы в $\mathfrak{h}$ ([7]), и потому

$$[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{h}]=[[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}}+\mathfrak{m}_i,\mathfrak{h}]\subset[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}}+\mathfrak{m}_i.$$

Далее

$$[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}]=[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_0+\ldots+\mathfrak{m}_r]=[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]\subset[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}}+\mathfrak{m}_i=\mathfrak{g}_i,$$

и, наконец,

$$[[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}}, \mathfrak{m}] \subset [[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i], \mathfrak{m}] \subset [[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}], \mathfrak{m}_i] =$$

$$= [[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{m}_i \cdot \mathfrak{m}, \mathfrak{m}_i] \subset [[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i] \subset$$

$$\subset [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{m}_i = \mathfrak{g}_i.$$

Тем самым доказано, что $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}_i$, вследствие чего подпространства $\mathfrak{g}_i$ являются идеалами в $\mathfrak{g}$. Далее,

$$\mathfrak{h} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}} = [\sum_{i=0}^{r} \mathfrak{m}_i, \sum_{i=0}^{r} \mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}} = \sum_{i=0}^{r} [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}} = \sum_{i=0}^{r} \mathfrak{h}_i,$$

так как $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] = 0$ при $i \neq j$. Покажем, что полученная сумма есть прямая сумма. Пусть $X \in \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{h}_j$ для некоторого $i \neq j$. Тогда $X \in \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j$ и потому

$$[X, \mathfrak{m}] \subset [X, \mathfrak{g}_0] + \ldots + [X, \mathfrak{g}_r] = 0.$$

В силу точности линейного представления изотропии $D(\mathfrak{h})$ имеем $X = 0$, т. е. $\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{h}_j = 0$. Теперь $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{h}_r$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_r$.

Аналогичная теорема для случая римановых естественно-редуктивных пространств была получена Б. Костантом в [7].

Следствие. *Пусть G/H — односвязное естественно-редуктивное однородное пространство с идеально ненулевым умножением в редуктивном дополнении $\mathfrak{m}$. Если G проста, то G/H голономно неприводимо относительно естественной связности без кручения.*

Доказательство. Простота группы G влечет простоту алгебры $\mathfrak{m}$ (вследствие результата теоремы 8), что, в свою очередь, указывает нам на неприводимость G/H (теорема 1).

Как следует из теоремы 8, редуктивная пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ является прямой суммой своих подпар $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$ [10] и, в силу соответствия между подпарами редуктивной пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и вполне геодезическими подмногообразиями соответствующего редуктивного пространства G/H [9], имеет место

Теорема 9. *Пусть G/H — односвязное естественно-редуктивное голономно приводимое пространство с разложением $\mathfrak{g} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{m}$ и идеально ненулевым умножением в $\mathfrak{m}$. Тогда имеет место разложение*

$$G/H = G_0/H_0 \times G_1/H_1 \times \ldots \times G_r/H_r,$$

где каждое G_i/H_i является вполне геодезическим подмногообразием в G/H.

Автор благодарит Ю. Лумисте за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рашевский П. К. О геометрии однородных пространств. — Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, 1952, вып. 9, с. 49—74.
2. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. — Amer. J. Math., 1954, v. 76, p. 33—65.
3. Sagle, A. On anticommutative algebras and homogeneous spaces. — J. Math. and Mech., 1967, v. 16, N 12, p. 1381—1393.
4. Sagle, A. On homogeneous spaces, holonomy and nonassociative algebras. — Nagoya Math. J., 1969, v. 32, June, p. 373—394.
5. Фляйшер А. Г. Об одном классе редуктивных пространств. — Тр. геом. семинара, 1974, т. 6, с. 267—276.

6. Kobayashi, S., Nomizu, K. Foundation of differential geometry. New York—London, 1969, v. II, p. 210—316.
7. Kostant, B. On differential geometry and homogeneous spaces II. — Proc. Nat. Acad. Sci., 1956, v. 42, p. 354—357.
8. Kostant, B. On holonomie and homogeneous spaces. — Nagoya Math. J., 1957, v. 12, p. 31—54.
9. Васильев А. М. О вполне геодезических подмногообразиях однородных пространств. — Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 2, с. 223—226.
10. Фляйшер А. Г. Заметки о редуктивных парах. — Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1975, № 355, с. 27—34.

Информационно-вычислительный центр
Министерства финансов ЭССР

Поступила в редакцию
24/X 1977

A. FLJAIŠER

REDUKTIIVSED HOMOGEENSED RUUMID JA MITTEASSOTSIATIIVSED ALGEBRAD

Olgu $M=G/H$ reduktiivne homogeenne ruum fikseeritud lahutusega $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$. On teada [2], et iga G-invariantne seostus α ruumil M tekitab mingi mitteassotsiatiivse algebra $(\mathfrak{m}, \alpha)$. Artiklis [4] saadud tulemusi kasutades on käesolevas töös uuritud reduktiivse ruumi M ja temale vastava algebra vastastikuseid seoseid. Põhilist tähelepanu on pööratud reduktiivsetele homogeensetele ruumidele [6], mille hulgast on vaadeldud nulliteguriteta ideaalidega ruume $\mathfrak{m}$ [5]. Niisugused homogeensed ruumid on väga sarnased Riemanni reduktiivsete ruumidega (teoreemid 8, 9). On märgitud, et kehtib puutuja ruumi T_0 (M) de Rhami lahutuse analoog.

A. FLAISHER

REDUCTIVE HOMOGENEOUS SPACES AND NON-ASSOCIATIVE ALGEBRAS

Let $M=G/H$ be a reductive homogeneous space with a fixed decomposition $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$. It is well known ([2]) that for each G-invariant connection α on M there exists a non-associative algebra $(\mathfrak{m}, \alpha)$ corresponding to α. Using results of ([4]), the dependence between the structure of these algebras and the properties of the space M is studied in the present paper. The main part of the paper is devoted to naturally reductive homogeneous spaces ([6]). We pick out the class of spaces G/H, for which the algebra $\mathfrak{m}$ does not contain ideals with zero-multiplication. Those spaces are similar to Riemannian reductive spaces (theorems 8, 9). In particular, the analogue of de Rham's decomposition of the tangent space $T_0(M)$ is obtained for them.