

А. ФЛЯЙШЕР

РЕДУКТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И НЕАССОЦИАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

§ 1. Предварительные сведения

Пусть G — связная группа Ли с алгеброй Ли \mathfrak{g} и H — замкнутая подгруппа в G с подалгеброй Ли \mathfrak{h} . Однородное пространство $M = G/H$ называется редуктивным ^[1, 2], если в \mathfrak{g} существует такое подпространство \mathfrak{m} , называемое редуктивным дополнением или оснащением, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{m}$ (прямая сумма) и $(\text{Ad}H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Локально (в терминах алгебр Ли) второе условие означает $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, и тогда соответствующая пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ называется редуктивной парой. Известно, что G/H является редуктивным, например, всегда, когда H компактна или полупроста ^[1]. Следуя А. Сэйглу ^[3], фиксированное редуктивное дополнение \mathfrak{m} можно наделить структурой неассоциативной антикоммутативной алгебры, полагая для $X, Y \in \mathfrak{m}$ произведение $X \cdot Y = [X, Y]_{\mathfrak{m}}$, где $[X, Y]_{\mathfrak{m}}$ — проекция скобки $[X, Y]$ на подпространство \mathfrak{m} (аналогично: $[X, Y]_{\mathfrak{h}}$ — проекция скобки $[X, Y]$ на \mathfrak{h}). Строение этой алгебры, которую мы будем обозначать через (\mathfrak{m}, \cdot) или просто через \mathfrak{m} , тесно связано с геометрией соответствующего редуктивного пространства G/H ^[3, 4]. Однако алгебра \mathfrak{m} не является единственной неассоциативной алгеброй, связанной с G/H . В силу результата К. Номидзу ^[2], на редуктивном пространстве G/H с фиксированным разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{m}$ существует биективное соответствие между множеством G -инвариантных связностей на G/H и множеством билинейных функций $\alpha: \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$, которые $\text{Ad}(H)$ -инвариантны, т. е. с каждой G -инвариантной связностью на G/H связывается некоторая неассоциативная алгебра (\mathfrak{m}, α) , для которой $\text{Ad}(H) \subset \text{Aut}(\mathfrak{m}, \alpha)$. Из всех инвариантных связностей на $M = G/H$ выделяется естественная связность без кручения ^[2], для которой $\alpha(X, Y) = 1/2 X \cdot Y$. Алгеброй, соответствующей этой связности, является, очевидно, алгебра \mathfrak{m} .

В дальнейшем метрику с естественной связностью без кручения будем обозначать буквой B . Однородное пространство G/H с такой метрикой называется естественно-редуктивным. Примером такого пространства является, в частности, однородное пространство, локально определяемое парой Киллинга $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ^[5].

Линейную группу голономии инвариантной связности α на однородном пространстве G/H будем обозначать через $\text{Hol}(\alpha)$ и алгебру голономии через $\text{hol}(\alpha)$. Если рассматривать только односвязные G/H , то $\text{Hol}(\alpha)$ всегда связна, потому $\text{Hol}(\alpha) = \exp \text{hol}(\alpha)$ и действие $\text{Hol}(\alpha)$ на \mathfrak{m} равносильно действию $\text{hol}(\alpha)$ на \mathfrak{m} . В данной работе все редуктивные однородные пространства предполагаются односвязными.

Определение 1. Односвязное однородное пространство G/H называется голономно неприводимым относительно связности α , если $\text{hol}(\alpha)$ действует неприводимо на \mathfrak{m} .

Известная теорема Ж. де Рама [6], согласно которой всякое полное односвязное риманово многообразие изометрично прямому произведению односвязных голономно неприводимых римановых многообразий, стимулирует исследование голономно неприводимых пространств. Строение алгебры \mathfrak{m} связано с голономной неприводимостью редуктивного G/H следующим результатом.

Теорема 1. (Сэйгл [3]). Пусть G/H — односвязное редуктивное однородное пространство с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$. Если $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} \neq 0$ и G/H голономно неприводимо относительно естественной связности без кручения, то алгебра \mathfrak{m} проста. Обратно: если G/H является псевдоримановым пространством и \mathfrak{m} проста, то G/H голономно неприводимо.

В случае риманова однородного пространства имеет место более сильное утверждение.

Теорема 2. (Костант [7]). Пусть G/H — односвязное риманово естественно-редуктивное однородное пространство. Оно голономно неприводимо относительно естественной связности без кручения тогда и только тогда, когда G проста.

В настоящей работе мы продолжаем сравнительное изучение алгебр (\mathfrak{m}, α) и \mathfrak{m} , начатое Б. Костантом [8], и выясняем взаимосвязь строения этих алгебр и соответствующего редуктивного пространства G/H , опираясь на результаты, полученные А. Сэйглом [4]. Основной результат: односвязное однородное естественно-редуктивное пространство при определенных условиях, накладываемых на инфинитезимальную структуру, разлагается в прямое произведение своих вполне геодезических подмногообразий или же голономно неприводимо (относительно естественной связности без кручения).

§ 2. Алгебры псевдоримановых связностей

Предложение 1. Пусть G/H — односвязное редуктивное однородное пространство с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ и α — инвариантная псевдориманова связность на G/H . Тогда простота алгебры \mathfrak{m} влечет простоту алгебры (\mathfrak{m}, α) .

Доказательство. Рассматриваемая связность α является связностью без кручения и потому

$$\text{Tor}(X, Y) = \alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) - X \cdot Y = 0. \quad (1)$$

Отсюда сразу следует, что (\mathfrak{m}, α) — алгебра с ненулевым умножением. Действительно, если имеет место обратное, то из соотношения (1) получаем $X \cdot Y = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{m}$, но тогда $\mathfrak{m}^2 = 0$, что противоречит простоте \mathfrak{m} . Если теперь (\mathfrak{m}, α) содержит двусторонний идеал \mathfrak{n} , то опять же из (1) получаем противоречие: \mathfrak{n} является идеалом и в алгебре \mathfrak{m} .

Предложение 2. Пусть G/H — односвязное однородное пространство с компактной G и \mathfrak{m} — ортогональное дополнение к \mathfrak{h} относительно положительно определенной квадратичной формы B на \mathfrak{g} . Тогда простота G влечет простоту алгебры (\mathfrak{m}, α) , где α — произвольная инвариантная псевдориманова связность на G/H .

Доказательство. Пусть алгебра (\mathfrak{m}, α) не проста, тогда не проста и алгебра \mathfrak{m} (предложение 1) и потому G/H голономно приво-

димо относительно естественной связности без кручения (теорема 1). Но это противоречит голономной неприводимости риманова редуктивного однородного пространства G/H с простой G относительно естественной связности без кручения (теорема 2).

Предложение 3. Пусть G/H — односвязное редуктивное несимметрическое пространство с инвариантной псевдоримановой связностью α . Если G/H голономно неприводимо относительно α , то алгебра (\mathfrak{m}, α) — проста.

Доказательство. Если $\alpha(X, Y) = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{m}$, то $0 = \text{Тог}(X, Y) = -X \cdot Y$, т. е. G/H оказывается симметрическим, что противоречит условию. Пусть (\mathfrak{m}, α) содержит собственный идеал. Тогда, согласно [3], она содержит собственный идеал \mathfrak{n} , инвариантный относительно $\text{hol}(\alpha)$, что противоречит голономной неприводимости G/H .

Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — редуктивная пара с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{m}$. Следуя А. М. Васильеву [9], назовем подалгебру $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ нормальной, если

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}.$$

Такая подалгебра определяет в соответствующем пространстве G/H вполне геодезическое подмногообразие относительно связности, определяемой оснащением \mathfrak{m} . Оснащение \mathfrak{m} называется «проникающим в \mathfrak{g} » ([7]), если в редуктивном разложении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{m}$ подалгебра $\mathfrak{h} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}}$. Таким оно является, в частности, в случае простой алгебры \mathfrak{h} ([10]). Следующая теорема дополняет результат Б. Костанта ([7], теорема 5) о голономной приводимости римановых однородных пространств.

Теорема 3. Пусть G/H — односвязное редуктивное несимметрическое однородное пространство с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{m}$ и \mathfrak{m} — «проникающее в \mathfrak{g} » оснащение. Если G/H голономно неприводимо относительно естественной связности без кручения, то \mathfrak{g} не содержит собственных нормальных идеалов.

Доказательство. В силу теоремы 1 алгебра \mathfrak{m} проста и пусть \mathfrak{g} содержит собственный нормальный идеал $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$. Предполагая действие группы эффективным, можем считать $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m} \neq 0$, так как в противном случае подалгебра \mathfrak{h} будет содержать идеал $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}$, являющийся идеалом и в \mathfrak{g} . По условию $[\mathfrak{g}', \mathfrak{m}] = [\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \subset \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$, и потому $[\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}, \mathfrak{m}] + [\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$. Но $[\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset (\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}) \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$, следовательно, $[\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{m}} = (\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}) \cdot \mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$, т. е. $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$ — идеал в \mathfrak{m} . Ввиду простоты \mathfrak{m} возможно лишь $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, но тогда $[\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ и необходимо $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}$. По условию $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$, что влечет $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 3. Об одном классе естественно-редуктивных пространств

Рассмотрим редуктивные однородные пространства G/H , для которых редуктивная структура задается подпространством

$$\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \mid B(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{h}\}$$

и ограничение формы B на подалгебре \mathfrak{h} невырождено. Поскольку в этом случае $B(X \cdot Y, Z) = B(X, Y \cdot Z)$ для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$, то G/H является естественно-редуктивным пространством [6].

Определение 2. Редуктивное однородное пространство G/H с фиксированным разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ называется пространством с идеально ненулевым умножением в \mathfrak{m} , если алгебра \mathfrak{m} не содержит идеалов с нулевым умножением.

Следующее предложение указывает на существование таких однородных пространств. Для его формулировки отметим, что на алгебре \mathfrak{m} , равно как и на произвольной конечномерной алгебре, можно определить форму Киллинга $\bar{B}(X, Y)$, полагая

$$\bar{B}(X, Y) = \text{tr}(L(X)L(Y)),$$

где $L(X) : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$, $Y \mapsto X \cdot Y$ для $X, Y \in \mathfrak{m}$.

Предложение 4. Пусть G — полупростая связная группа Ли и H — ее замкнутая подгруппа. Пусть B — форма Киллинга алгебры \mathfrak{g} , ограничение $B_{\mathfrak{h}}$ которой невырождено, и \mathfrak{m} — ортогональное дополнение к \mathfrak{h} относительно B . Если ограничение формы B на \mathfrak{m} совпадает с формой Киллинга самой алгебры \mathfrak{m} , то G/H есть естественно-редуктивное пространство с идеально ненулевым умножением в \mathfrak{m} .

Доказательство. Пусть \mathfrak{n} — идеал в \mathfrak{m} , удовлетворяющий условию $\mathfrak{n}^2 = 0$. Выберем базис в \mathfrak{n} и дополним его до базиса в \mathfrak{m} . Тогда для $X \in \mathfrak{n}$, $Y \in \mathfrak{m}$ преобразования $L(X)$ и $L(Y)$ примут вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

соответственно. Следовательно, $\text{tr}(L(X)L(Y)) = 0$ и потому $\bar{B}(\mathfrak{n}, \mathfrak{m}) = 0$. Отсюда следует, что в случае невырожденности формы B алгебра \mathfrak{m} не содержит идеалов \mathfrak{n} , удовлетворяющих условию $\mathfrak{n}^2 = 0$. Теперь наше утверждение будет вытекать из невырожденности ограничения формы Киллинга B алгебры \mathfrak{g} на \mathfrak{m} .

Прежде чем дать геометрическую характеристику введенных пространств, уточним формулировку известной теоремы Ж. де Рама [6] на случай естественно-редуктивных римановых однородных пространств.

Теорема 4. Пусть $M = G/H$ — односвязное риманово естественно-редуктивное однородное пространство с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ и Φ — группа голономии римановой связности. Тогда

1) имеет место единственное с точностью до порядка разложение

$$\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{m}}_0 \oplus \bar{\mathfrak{m}}_1 \oplus \dots \oplus \bar{\mathfrak{m}}_p \quad (2)$$

в прямую сумму взаимно ортогональных Φ -инвариантных подпространств; Φ действует тривиально на $\bar{\mathfrak{m}}_0$ и неприводимо на $\bar{\mathfrak{m}}_j$ ($1 \leq j \leq p$);

2) имеет место соответствующее разложение $M = M_0 \times M_1 \times \dots \times M_p$ в прямое произведение римановых пространств таких, что $\bar{\mathfrak{m}}_j$ является касательным пространством для M_j ($0 \leq j \leq p$).

Заметим, что в разложении (2) каждое $\bar{\mathfrak{m}}_j$ ($0 \leq j \leq p$) является идеалом в \mathfrak{m} , так как $[\bar{\mathfrak{m}}_j, \bar{\mathfrak{m}}_j] \subset \mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{m}}_j$ и $\bar{\mathfrak{m}}_i \cdot \bar{\mathfrak{m}}_j = 0$ для $i \neq j$ ([6], с. 213). Далее, всякий идеал с нулевым умножением $\bar{\mathfrak{m}}_h$ алгебры \mathfrak{m} является центральным (действительно, $\bar{\mathfrak{m}}_h \cdot \mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{m}}_h \cdot \bar{\mathfrak{m}}_h = 0$) и потому алгебра \mathfrak{m} разложима в прямую сумму своего центра \mathfrak{z} и подалгебры \mathfrak{f} , не содержащей идеалов с нулевым умножением, подобно тому, как любая редуктивная алгебра Ли разложима в прямую сумму своего центра и полупростой подалгебры. В разложении (2) можно изменить порядок таким образом, чтобы $\mathfrak{z} = \bar{\mathfrak{m}}_0 \oplus \dots \oplus \bar{\mathfrak{m}}_s$ и $\mathfrak{f} = \bar{\mathfrak{m}}_{s+1} \oplus \dots \oplus \bar{\mathfrak{m}}_p$

давали, соответственно, центр и полупростую подалгебру алгебры \mathfrak{m} . Итак, справедлива

Теорема 5. Пусть G/H — односвязное риманово естественно-редуктивное однородное пространство с фиксированным разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$. Тогда $\mathfrak{m} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{k}$, где \mathfrak{z} и \mathfrak{k} — идеалы в \mathfrak{m} , причем $\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{m} = 0$. Имеет место соответствующее разложение

$$G/H = G_1/H \times G_2/H,$$

где G_1/H — симметрическое пространство с касательным пространством \mathfrak{z} , а G_2/H — несимметрическое пространство с идеально ненулевым умножением в касательном пространстве \mathfrak{k} .

Из данной теоремы следует, что односвязные римановы естественно-редуктивные однородные пространства с идеально ненулевым умножением в фиксированном редуктивном дополнении \mathfrak{m} образуют естественный класс редуктивных «максимально не симметрических» пространств.

Теорема 6. Пусть G/H — односвязное естественно-редуктивное однородное пространство с метрикой B и идеально ненулевым умножением в редуктивном дополнении \mathfrak{m} . Если G/H голономно приводимо, то \mathfrak{m} является прямой суммой $\text{hol}(B)$ -инвариантных простых идеалов

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_r, \quad (3)$$

причем это разложение ортогонально относительно B и

- (а) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{m}_i$;
- (б) $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{m}_i$ ($\mathfrak{m}_i \cdot \mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}_i$);
- (в) $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] = 0$, $i \neq j$; ($i, j = 0, 1, \dots, r$).

Доказательство. В силу теоремы 1 алгебра \mathfrak{m} содержит собственный идеал. Тогда множество собственных $D(\mathfrak{h})$ -инвариантных идеалов алгебры \mathfrak{m} не пусто. Пусть идеал \mathfrak{m}_0 минимален в этом множестве, т. е. $\mathfrak{m}_0 \neq 0$, и не существует идеалов, строго промежуточных между 0 и \mathfrak{m}_0 . Пусть, далее, \mathfrak{m}'_0 обозначает ортогональное дополнение к \mathfrak{m}_0 относительно B , т. е. $\mathfrak{m}'_0 = \{X \in \mathfrak{m} \mid B(X, \mathfrak{m}_0) = 0\}$. В силу равенств

$$B([\mathfrak{m}'_0, \mathfrak{h}], \mathfrak{m}_0) = B(\mathfrak{m}'_0, [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}_0]) = 0,$$

$$B(\mathfrak{m}'_0 \cdot \mathfrak{m}, \mathfrak{m}_0) = B(\mathfrak{m}'_0, \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}_0) = 0$$

оно также является $D(\mathfrak{h})$ -инвариантным идеалом в \mathfrak{m} . Покажем, что $\mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{m}'_0 = 0$. Если это не так, то минимальность \mathfrak{m}_0 влечет включение $\mathfrak{m}_0 \subset \mathfrak{m}'_0$. Это означает, что $B(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0) = 0$, откуда $B(\mathfrak{m}_0^2, \mathfrak{m}) = B(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}) = 0$. Следовательно, $\mathfrak{m}_0^2 = 0$, вопреки условию. Итак, $\mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{m}'_0 = 0$, и потому \mathfrak{m} является прямой суммой \mathfrak{m}_0 и \mathfrak{m}'_0 . Равенство $B(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0) = 0$ влечет $0 = B(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0 \cdot \mathfrak{m}) = B(\mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}'_0, \mathfrak{m})$. Но $B(\mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}'_0, \mathfrak{h}) = 0$, потому $B(\mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}'_0, \mathfrak{g}) = 0$ и $\mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}'_0 = 0$. Следовательно, $[\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0] \subset \mathfrak{h}$ и $B([\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0], \mathfrak{m}) = 0$. Далее, $B([\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0], \mathfrak{h}) = B(\mathfrak{m}_0, [\mathfrak{m}'_0, \mathfrak{h}]) \subset B(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0) = 0$. В итоге $B([\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0], \mathfrak{g}) = 0$ и $[\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0] = 0$.

Из включений $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}_0] \subset \mathfrak{m}_0$, $[\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0] \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{m}_0$ вытекает, что подпространство $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}_0$ является подалгеброй Ли в \mathfrak{g} . Так как $B(\mathfrak{h}_0, \mathfrak{m}'_0) = 0$, то G/H_0 — естественно-редуктивное пространство, где H_0 — связная подгруппа в G , имеющая \mathfrak{h}_0 своей алгеброй Ли. Однородное пространство G/H_0 есть пространство с идеально ненулевым умножением в \mathfrak{m}'_0 . Действительно, если \mathfrak{n} — такой идеал в \mathfrak{m}'_0 , что $\mathfrak{n}^2 = 0$, то \mathfrak{n} является идеалом и в \mathfrak{m} , так как $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cdot (\mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}'_0) = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}'_0 \subset \mathfrak{n}$ (поскольку $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}_0 = 0$), что противоречит условию. Теперь,

если \mathfrak{m}'_0 проста, дальнейшее разложение невозможно. Если же \mathfrak{m}'_0 не проста, то условия теоремы наследуются пространством G/H_0 , и процесс продолжается до тех пор, пока \mathfrak{m} не разложится в прямую сумму простых идеалов, взаимно ортогональных относительно формы B . Так как алгебра голономии $\text{hol}(B)$ связности, определяемой формой B , порождена всеми отображениями $L(X)$ ([4]), то все \mathfrak{m}_i являются $\text{hol}(B)$ -инвариантными. Заключение (а) — (в) следуют непосредственно из доказательства.

Покажем, что полученное разложение (3) является аналогом разложения де Рама касательного пространства $T_0(M) = \mathfrak{m}$ односвязного риманова естественно-редуктивного пространства M .

Теорема 7. Пусть $M = G/H$ — односвязное риманово естественно-редуктивное однородное пространство с идеально ненулевым умножением в касательном пространстве $T_0(M) = \mathfrak{m}$. Тогда разложение (3) алгебры \mathfrak{m} является разложением де Рама касательного пространства $T_0(M)$.

Доказательство. Как было указано выше, в разложении де Рама (2) касательного пространства $T_0(M) = \mathfrak{m}$ каждое $\bar{\mathfrak{m}}_j$ является идеалом в \mathfrak{m} . Далее, так как риманова связность, определяемая положительно определенной формой B на \mathfrak{m} , совпадает с канонической связностью без кручения, то алгебра голономии $\text{hol}(B)$ этой связности совпадает с алгеброй Ли, определяемой отображениями $L(X): \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$, $Y \mapsto X \cdot Y$ ([4]). Пусть некоторая алгебра $\bar{\mathfrak{m}}_j$ не проста. Так как в предположениях теоремы $\bar{\mathfrak{m}}_j^2 \neq 0$, то $\bar{\mathfrak{m}}_j$ должна содержать собственный идеал $\bar{\mathfrak{p}}_j$. В силу положительной определенности B на \mathfrak{m} подпространство

$$\bar{\mathfrak{m}}'_j = \{X \in \mathfrak{m} \mid B(X, \mathfrak{m}_j) = 0\}$$

представляет собой прямое слагаемое в $\mathfrak{m} (\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{m}}_j \oplus \bar{\mathfrak{m}}'_j)$ и, в силу $\bar{\mathfrak{p}}_j \cdot \bar{\mathfrak{m}}'_j = 0$, подпространство $\bar{\mathfrak{p}}_j$ является идеалом и в \mathfrak{m} , т. е. $L(m) —$ приводимым подпространством, что противоречит неприводимости $\text{hol}(B)$ на $\bar{\mathfrak{m}}_j$. Следовательно, все идеалы $\bar{\mathfrak{m}}_j$ просты, и теперь утверждение теоремы следует непосредственно из результата о единственности разложения конечномерной неассоциативной алгебры в прямую сумму простых идеалов.

Теорема 8. Пусть G/H — односвязное естественно-редуктивное однородное пространство. Согласно предположениям теоремы 6,

если $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i=1}^r \mathfrak{m}_i$ — разложение (3), то

$$(1) \mathfrak{g}_i = [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{m}_i \text{ являются идеалами в } \mathfrak{g};$$

кроме того, если \mathfrak{m} «проникает в \mathfrak{g} », то

$$(2) \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_r.$$

Доказательство. Так как каждое \mathfrak{m}_i является $D(\mathfrak{h})$ -инвариантным, то подпространства $\mathfrak{h}_i = [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}}$ — идеалы в \mathfrak{h} ([7]), и потому

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}] = [[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{m}_i, \mathfrak{h}] \subset [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{m}_i.$$

Далее

$$[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}] = [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_0 + \dots + \mathfrak{m}_r] = [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i] \subset [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{m}_i = \mathfrak{g}_i,$$

и, наконец,

$$\begin{aligned}
 & [[m_i, m_i]_{\mathfrak{h}}, m] \subset [[m_i, m_i], m] \subset [[m_i, m], m_i] = \\
 & = [[m_i, m]_{\mathfrak{h}} + m_i \cdot m, m_i] \subset [[m_i, m]_{\mathfrak{h}} + m_i, m_i] \subset \\
 & \subset [m_i, m_i]_{\mathfrak{h}} + m_i = \mathfrak{g}_i.
 \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что $[\mathfrak{g}_i, m] \subset \mathfrak{g}_i$, вследствие чего подпространства \mathfrak{g}_i являются идеалами в \mathfrak{g} . Далее,

$$\mathfrak{h} = [m, m]_{\mathfrak{h}} = \left[\sum_{i=0}^r m_i, \sum_{i=0}^r m_i \right]_{\mathfrak{h}} = \sum_{i=0}^r [m_i, m_i]_{\mathfrak{h}} = \sum_{i=0}^r \mathfrak{h}_i,$$

так как $[m_i, m_j] = 0$ при $i \neq j$. Покажем, что полученная сумма есть прямая сумма. Пусть $X \in \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{h}_j$ для некоторого $i \neq j$. Тогда $X \in \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j$ и потому

$$[X, m] \subset [X, \mathfrak{g}_0] + \dots + [X, \mathfrak{g}_r] = 0.$$

В силу точности линейного представления изотропии $D(\mathfrak{h})$ имеем $X = 0$, т. е. $\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{h}_j = 0$. Теперь $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}_r$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_r$.

Аналогичная теорема для случая римановых естественно-редуктивных пространств была получена Б. Костантом в [7].

Следствие. Пусть G/H — односвязное естественно-редуктивное однородное пространство с идеальным ненулевым умножением в редуктивном дополнении \mathfrak{m} . Если G проста, то G/H голономно неприводимо относительно естественной связности без кручения.

Доказательство. Простота группы G влечет простоту алгебры \mathfrak{m} (вследствие результата теоремы 8), что, в свою очередь, указывает нам на неприводимость G/H (теорема 1).

Как следует из теоремы 8, редуктивная пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ является прямой суммой своих подпар $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$ [10] и, в силу соответствия между подпарами редуктивной пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и вполне геодезическими подмногообразиями соответствующего редуктивного пространства G/H [9], имеет место

Теорема 9. Пусть G/H — односвязное естественно-редуктивное голономно приводимое пространство с разложением $\mathfrak{g} = [m, m]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{m}$ и идеальным ненулевым умножением в \mathfrak{m} . Тогда имеет место разложение

$$G/H = G_0/H_0 \times G_1/H_1 \times \dots \times G_r/H_r,$$

где каждое G_i/H_i является вполне геодезическим подмногообразием в G/H .

Автор благодарит Ю. Лумисте за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рашевский П. К. О геометрии однородных пространств. — Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, 1952, вып. 9, с. 49—74.
2. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces. — Amer. J. Math., 1954, v. 76, p. 33—65.
3. Sagle, A. On anticommutative algebras and homogeneous spaces. — J. Math. and Mech., 1967, v. 16, N 12, p. 1381—1393.
4. Sagle, A. On homogeneous spaces, holonomy and nonassociative algebras. — Nagoya Math. J., 1969, v. 32, June, p. 373—394.
5. Фляйшер А. Г. Об одном классе редуктивных пространств. — Тр. геом. семинара, 1974, т. 6, с. 267—276.

6. Kobayashi, S., Nomizu, K. Foundation of differential geometry. New York—London, 1969, v. II, p. 210—316.
7. Kostant, B. On differential geometry and homogeneous spaces II. — Proc. Nat. Acad. Sci., 1956, v. 42, p. 354—357.
8. Kostant, B. On holonomie and homogeneous spaces. — Nagoya Math. J., 1957, v. 12, p. 31—54.
9. Васильев А. М. О вполне геодезических подмногообразиях однородных пространств. — Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 2, с. 223—226.
10. Фляйшер А. Г. Заметки о редуктивных парах. — Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1975, № 355, с. 27—34.

Информационно-вычислительный центр
Министерства финансов ЭССР

Поступила в редакцию
24/X 1977

A. FLJAISER

REDUKTIIVSED HOMOGEESESED RUUMID JA MITTEASSOTSIIATIIVSED ALGEBRAD

Olgu $M=G/H$ reduktiivne homogeenne ruum fikseeritud lahutusega $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$. On teada [2], et iga G -invariantne seostus α ruumil M tekitab mingi mitteassotsiatiivse algebra (\mathfrak{m}, α) . Artiklis [4] saadud tulemusi kasutades on käesolevas töös uuritud reduktiivse ruumi M ja temale vastava algebra vastastikuseid seoseid. Põhilist tähelepanu on pööratud reduktiivsetele homogeensetele ruumidele [6], mille hulgast on vaadeldud nulliteguriteta ideaalidega ruume \mathfrak{m} [5]. Niisugused homogeenused ruumid on väga sarnased Riemanni reduktiivsete ruumidega (teoreemid 8, 9). On märgitud, et kehtib puutuja ruumi $T_0(M)$ de Rhami lahutuse analoog.

A. FLAISHER

REDUCTIVE HOMOGENEOUS SPACES AND NON-ASSOCIATIVE ALGEBRAS

Let $M=G/H$ be a reductive homogeneous space with a fixed decomposition $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$. It is well known ([2]) that for each G -invariant connection α on M there exists a non-associative algebra (\mathfrak{m}, α) corresponding to α . Using results of ([4]), the dependence between the structure of these algebras and the properties of the space M is studied in the present paper. The main part of the paper is devoted to naturally reductive homogeneous spaces ([6]). We pick out the class of spaces G/H , for which the algebra \mathfrak{m} does not contain ideals with zero-multiplication. Those spaces are similar to Riemannian reductive spaces (theorems 8, 9). In particular, the analogue of de Rham's decomposition of the tangent space $T_0(M)$ is obtained for them.