EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED, 26. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 3

УДК 530.12:531.51

А. КОППЕЛЬ

ОБ АНАЛОГИИ МЕЖДУ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИЕЙ ГРАВИТАЦИИ И ТЕОРИЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

A. KOPPEL. MITTERELATIVISTLIKU GRAVITATSIOONITEOORIA JA ELEKTROMAGNETVÄLJA TEOORIA ANALOOGIAST

A. KOPPEL. ON THE ANALOGY BETWEEN THE NON-RELATIVISTIC GRAVITATIONAL THEORY AND THEORY OF ELECTROMAGNETIC FIELD

В данной работе обсудим некоторые общие свойства уравнений нерелятивистского (НР) гравитационного поля (Г-поля), вытекающих из подхода Кереса [1-3], запишем эти уравнения в виде, формально одинаковом с уравнениями Максвелла—Лоренца в квазистационарном случае электромагнитного поля (ЭМ-поля), введем в случае НР Г-поля ряд величин, аналогичных электромагнитным величинам, и рассмотрим применение лагранжева и гамильтонова формализмов в обсуждаемой обобщенной теории НР Г-поля.

1. Согласно X. Кересу [1-3], свойства НР Г-полей выражаются в свойствах искривленных 4-пространств $\tilde{V}_4$ с аффинной связностью, но с вырожденной метрикой $(0,+,+,+)$. Для 4-пространств $\tilde{V}_4$ сингулярные метрические формы типа *

$$\mathrm{d}s^2=\tilde{v}_s\tilde{v}^s\,\mathrm{d}t^2+2\tilde{v}_s\,\mathrm{d}\tilde{x}^s\,\mathrm{d}t+\tilde{\gamma}_{sp}\,\mathrm{d}\tilde{x}^s\,\mathrm{d}\tilde{x}^p\equiv\tilde{g}_{\mu\nu}\,\mathrm{d}\tilde{x}^\mu\,\mathrm{d}\tilde{x}^\nu \tag{1}$$

получаются предельным переходом $c\to\infty$ из соответствующих релятивистских метрических форм для римановых V_4, описывающих релятивистские Г-поля в определенных системах отсчета с ньютоновым временем (в т. н. G-системах). Общие уравнения НР Г-поля также получаются как предельный вид релятивистских уравнений Г-поля, записанных в G-системах.

Имеем [4] формулу

$$\tilde{R}_{\mu\nu}=(1/2)\tilde{\lambda}_{\mu\nu}, \tag{2}$$

где $\tilde{R}_{\mu\nu}\equiv\lim\limits_{c\to\infty}R_{\mu\nu}$ толкуются как компоненты тензора Риччи для $\tilde{V}_4$, $\tilde{\lambda}_{\mu\nu}\equiv\lim\limits_{c\to\infty}\left[\frac{16\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)\right]$, $T_{\mu\nu}$ — составляющие тензора энергии-импульса для источников Г-поля. Конкретный вид уравнений (2) существенно зависит от структуры релятивистского тензора энергии-импульса материи. В случае т. н. обычной материи ($T_{\mu\nu}$ описывает идеальную жидкость или ЭМ-поле) только компонента T_{00} дает ненулевой

---

* В данной работе греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а латинские — значения 1, 2, 3. По индексам в квадратных скобках проводится альтернирование. Запятая с индексом означает дифференцирование по соответствующей координате.

вклад в $\tilde{\lambda}_{\mu\nu}$, и $\tilde{V}_3$ с метрическим тензором $\tilde{\gamma}_{sp}$ является евклидовым. После введения декартовых координат в $\tilde{V}_3$ уравнения (2) принимают вид

$$\tilde{v}_{s,s,0}-(1/2)\,(\tilde{v}_p\tilde{v}_p)_{,s,s}+\tilde{v}_{[p,s]}\tilde{v}_{[p,s]}=4\pi G\tilde{\varrho}, \tag{3}$$

$$\tilde{v}_{[i,s],s}=0, \tag{4}$$

где $\tilde{\varrho}$ — плотность вещества. Подчеркнем, что без *ad hoc* дополнительных условий далее ограничивать вид этих уравнений нельзя. Поэтому ниже и рассмотрим содержание уравнений (3)—(4) в общем случае.

Движение свободной пробной частицы в НР Г-поле определяется геодезическими линиями в $\tilde{V}_4$. В силу этого ускорение пробной частицы относительно декартовой координатной системы удовлетворяет уравнениям

$$\frac{d\tilde{u}_k}{dt}=-\tilde{v}_{k,0}+\frac{1}{2}(\tilde{v}_p\tilde{v}_p)_{,k}+2\tilde{u}_s\tilde{v}_{[s,k]}. \tag{5}$$

Если хотя бы для одной тройки индексов

$$\tilde{v}_{[i,j],k}\neq 0, \tag{6}$$

то в этом случае НР Г-поле является неньютоновым (вихревым). Только при $\tilde{v}_{[i,j],k}=0$ получается ньютонова теория гравитации [2, 4].

2. Запишем систему уравнений, формально совпадающих при надлежащем выборе единиц с уравнениями Максвелла—Лоренца при $\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{e}=0$, т. е. без учета тока смещения [5–6]:

$$\nabla\boldsymbol{e}=4\pi G\varrho, \tag{7}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{e}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{h}, \tag{8}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{h}=4\pi G\boldsymbol{j}, \tag{9}$$

$$\nabla\boldsymbol{h}=0. \tag{10}$$

Здесь ϱ и $\boldsymbol{j}$ — пока неизвестные величины, а операции дивергенции и роторы берутся в $\tilde{V}_3$. Далее определим напряженности поля $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{h}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{e}=-\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\boldsymbol{v}}+(1/2)\nabla(\tilde{\boldsymbol{v}}\tilde{\boldsymbol{v}}), \tag{11}$$

$$\boldsymbol{h}=\nabla\times\tilde{\boldsymbol{v}}. \tag{12}$$

В силу этих определений, как легко убедиться, соотношения (8) и (10) тождественно удовлетворяются, а из уравнений (7) и (9) получается соответственно

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\tilde{\boldsymbol{v}})-(1/2)\nabla\nabla(\tilde{\boldsymbol{v}}\tilde{\boldsymbol{v}})+(1/2)\,(\nabla\times\tilde{\boldsymbol{v}})\,(\nabla\times\tilde{\boldsymbol{v}})=4\pi G\tilde{\varrho}, \tag{13}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\tilde{\boldsymbol{v}})=4\pi G\boldsymbol{j}, \tag{14}$$

где

$$\tilde{\varrho}=-\varrho+\frac{1}{8\pi G}(\nabla\times\tilde{\boldsymbol{v}})\,(\nabla\times\tilde{\boldsymbol{v}}). \tag{15}$$

Видим, что если положить $j = 0$, то соотношения (13) и (14) эквивалентны уравнениям (3) и (4) соответственно для составляющих поля скоростей $\tilde{v}$. Итак, при $j = 0$ уравнения (7)—(10) типа Максвелла—Лоренца действительно эквивалентны уравнениям НР Г-поля (3)—(4). С учетом (11) и (12) уравнения движения (5) принимают вид, вполне аналогичный выражению лоренцевой силы в электродинамике, если последнее записать в надлежащей системе единиц для частицы с единичными массой и зарядом [5, 6]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathrm{u}}=\boldsymbol{e}+[\tilde{\mathrm{u}}\times\boldsymbol{h}]. \tag{16}$$

Если же условие (6) не имеет места, то можно дополнительно принять $\boldsymbol{h} = 0$. Теперь уравнения (7), (8) и (16) описывают, очевидно, ньютоново НР Г-поле.

Отметим, что из общих уравнений НР Г-поля (2) можно было бы получить и случай $\mathrm{j} \neq 0$, но для этого мы должны располагать тензором энергии-импульса материи «экзотического» типа, таким, для которого в некоторых областях Г-поля в пределе $c \to \infty$ имело бы место $\tilde{\lambda}_{0i} \neq 0$ и $\tilde{\lambda}_{ik} = 0$.

3. Отделим друг от друга градиентную (потенциальную) и роторную (соленоидальную) части в векторном поле $\tilde{\boldsymbol{v}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{v}}=\nabla\varphi+\boldsymbol{A}=\nabla\varphi+\nabla\times\boldsymbol{a}. \tag{17}$$

(Величины φ и $\boldsymbol{a}$ введены Х. Кересом [2] как потенциалы поля скоростей $\tilde{\boldsymbol{v}}$). В силу определений (11) и (12) видим, что $\boldsymbol{A}$ является аналогом векторного, а величина

$$U=\frac{\partial}{\partial t}\varphi-(1/2)\tilde{\boldsymbol{v}}\tilde{\boldsymbol{v}} \tag{18}$$

— аналогом скалярного потенциала ЭМ-поля. Вместо $\boldsymbol{A}$ и U Х. Керес определяет потенциалы, так сказать, «классического гравитационного типа» — ψ и Φ [2]. В случае $j = 0$ связь вышеупомянутых потенциалов между собой и с напряженностями поля можно задать соотношениями [4]

$$\boldsymbol{e}=-\nabla U-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}=-\nabla(\Phi-\psi^2)-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{h}=\nabla\times\boldsymbol{A}=2\nabla\psi. \tag{20}$$

Уравнение (13) принимает вид

$$\triangle\Phi=4\pi G\tilde{\varrho}, \tag{21}$$

где $\triangle \equiv \nabla\nabla$ — оператор Лапласа, а уравнение (14) можно заменить условием интегрируемости соотношения $\nabla \times \boldsymbol{A} = 2\nabla\psi$:

$$\triangle\psi=0. \tag{22}$$

Условие (6) можно записать теперь в виде

$$(\nabla\otimes\nabla)\psi\neq0. \tag{23}$$

Отметим, что ψ — аналог скалярного потенциала квазистационарного магнитного поля для «магнитовакуума». Отсюда, кстати, следует, что формулы и вычислительные методы, известные для этого частного вида магнитного поля (см., напр., [7]), формально переносятся на неньютонов случай НР Г-поля.

Поскольку для ньютонова Г-поля $\boldsymbol{h}=0$ и, следовательно, можно принять $\psi=0$, то в этом случае Φ и U совпадают и обе величины могут толковаться как ньютоновы потенциалы. В общем неньютоновом случае понятие ньютонова потенциала по существу определяется неоднозначно: в качестве его можно толковать как Φ, так и U. Связь между «кулоновой» (ньютоновой) и «магнитной» (неньютоновой) компонентами НР Г-поля является на самом деле нелинейной. Например, вместо уравнения (21) получается более сложное уравнение для U и ψ, которое по-прежнему переходит в известное уравнение Пуассона для чисто ньютонова поля, но теперь уже как U, так и ψ связываются с плотностью $\tilde{\varrho}$ как источником НР Г-поля.

4. Исходя из аналогии с электродинамикой, приведенную выше теорию НР Г-полей можно развить также в лагранжевом и гамильтоновом формализмах. Например, применяя соответствующие формулы электродинамики [6], получаем для частицы с единичной массой в НР Г-поле функции Лагранжа L и Гамильтона H в виде

$$L=(1/2)\tilde{\boldsymbol{u}}^2-U+\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{u}}=(1/2)\tilde{\boldsymbol{u}}^2-\Phi+\psi^2+\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{u}} \tag{24}$$

и

$$H=(1/2)\tilde{\boldsymbol{u}}^2+U=(1/2)\tilde{\boldsymbol{u}}^2+\Phi-\psi^2. \tag{25}$$

Из соотношения (25) видим, что в неньютоновом (вихревом) НР Г-поле отрицательная потенциальная энергия частицы по абсолютной величине больше, чем в ньютоновом поле с потенциалом Φ, следовательно, и сила притяжения к «вихревому гравитирующему центру» больше, чем сила тяготения к чисто ньютонову центру, определяющему потенциал Φ.

Для обобщенных импульса $\boldsymbol{P}$ и силы $\boldsymbol{F}$ имеем

$$\boldsymbol{P}=\tilde{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{A}, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{F}=-\nabla U+(\tilde{\boldsymbol{u}}\nabla)\boldsymbol{A}+\tilde{\boldsymbol{u}}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}). \tag{27}$$

Как известно, уравнение Гамильтона—Якоби получается заменой в функции Гамильтона $\boldsymbol{P}$ на ∇S, а H — на $-\frac{\partial}{\partial t}S$:

$$-\frac{\partial}{\partial t}S=\frac{1}{2}[\nabla S-\boldsymbol{A}]^2+\Phi-\psi^2. \tag{28}$$

В силу соотношений (17) и (18) это уравнение тождественно удовлетворяется, если принять

$$S=-\varphi. \tag{29}$$

Таким образом, в качестве частного решения уравнения (28) скалярный потенциал φ поля скоростей $\tilde{\boldsymbol{v}}$ можно интерпретировать как функцию действия (с обратным знаком) для свободной пробной частицы в соответствующем НР Г-поле.

В заключение автор выражает благодарность П. Карду за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Керес Х., ЖЭТФ, 46, 1741 (1964).
2. Керес Х., ЖЭТФ, 48, 1319 (1965).
3. Керес Х., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 25, 349 (1976).
4. Коппель А., Нерелятивистские гравитационные поля в общей теории относительности, Ротапринт ТГУ, 1977.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., 1973, с. 70, 91.
6. Левич В. Г., Курс теоретической физики I, М., 1969, с. 41, 43, 182.
7. Gordon, W. B., J. Math. Phys., 16, 448 (1975).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 16/XII 1976

ДЕПОНИРОВАННЫЕ СТАТЬИ

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 26. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 3

УДК 681.142.01

А. СИЙМОН

КОНЪЮНКЦИЯ И ДИЗЪЮНКЦИЯ СИГНАЛОВ В ИМПУЛЬСНОЙ СТРУКТУРЕ

Опираясь на аппарат векторно-переменных переключательных функций (ВП-функций) как на язык для аналитического описания логических схем, рассмотрены все возможные виды схемной реализации конъюнкции и дизъюнкции сигналов минимальными логическими схемами в импульсной элементной структуре.

Определены два вида конъюнкции сигналов: обычная конъюнкция (т. е. совпадение сигналов) и конъюнкция, инвариантная ко времени существования сигналов — ее аргументов (т. е. конъюнкция разновременных сигналов). Сигналы-аргументы либо существуют сами, либо существуют их отрицания.

Указанные выше задачи реализуются на комбинационных или накапливающих схемах. В последнем случае используются логические схемы на отдельных триггерах и на целых сдвиговых регистрах.

Рукопись депонирована Институтом кибернетики АН ЭССР в ВИНИТИ, № 4490-76 от 21/XII 1976, с. 26, библ. 19 назв.

Реферат поступил в редакцию 4/II 1977.