На рис. 2 сравнены аналитическое и численное решения полной системы уравнений (1)—(3) при $I=100$. Как видно, наряду с удовлетворительным согласием полученных решений наблюдается и некоторое их различие во фронтальной для вихревого кольца области. Однако эти различия связаны, по-видимому, с тем, что при уменьшении ν_t эта область становится тоньше и, кроме того, погрешности численного решения (обусловленные большими величинами разностного числа Рейнольдса) здесь более значительны. Таким образом, есть основания считать найденный результат асимптотическим для численного решения при ν_t, стремящемся к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капланский Ф., Эпштейн А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 25, 408 (1976).
2. Луговцов Б. А., Докл. АН СССР, 226, № 3, 544 (1976).
3. Мальбахов В. М., Физ. атмосф. и океана, 8, № 7, 683 (1972).

Институт термофизики и электрофизики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
20/IX 1976

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 26. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 3

УДК 532.517.4

А. ЭПШТЕЙН

К РАСЧЕТУ СВОБОДНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВИХРЕВОГО ТИПА

A. EPSTEIN. KEERISE TÜÜPI VABADE TURBULENTSETE VOOLUSTE ARVUTAMISEST

A. EPSTEIN. ON THE CALCULATION OF FREE TURBULENT VORTICAL FLOWS

В настоящее время при расчете турбулентных пограничных слоев, в частности свободных — струй и следов, широкое применение находят простейшие полуэмпирические теории турбулентности Прандтля, Тейлора и другие [1]. По существу почти все инженерные приложения современной теории струй и следов основаны на этих моделях, хотя на сегодняшний день разработано немало более совершенных (но и более сложных) теорий турбулентности [2]. Это можно объяснить тем, что, несмотря на присущие простейшим теориям недостатки, полученные с их помощью результаты достаточно правильно описывают основные свойства течений. Особенно хорошие результаты получаются при расчете автомодельных течений. Представляются поэтому оправданными попытки распространить заложенные в простейших полуэмпирических теориях идеи на более сложные турбулентные течения (и в первую очередь на автомодельные), для которых упрощения теории пограничного слоя неприемлемы. К такого рода течениям можно отнести течения вихревого типа, которые возникают обычно от мгновенных источников импульса или плавучести и реализуются в виде кольцевых или сферических вихрей. К течениям вихревого типа следует отнести и такое, с формальной стороны струйное течение, как пространственная струя в поперечном потоке [3].

При расчете течений вихревого типа удобно воспользоваться уравнениями движения в форме Гельмгольца, т. е. в переменных вихрь ζ — функция тока ψ. В случае двухмерного движения несжимаемой жидкости и отсутствия массовых сил эти уравнения для осредненных параметров развитого турбулентного течения можно записать в виде

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\frac{\partial(-\overline{u'\zeta'})}{\partial x}+\frac{\partial(-\overline{v'\zeta'})}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\zeta \quad \left(\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2}$$

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{3}$$

где x, y — оси декартовой системы координат, u, v — компоненты скорости по этим направлениям, t — время.

Наиболее простой путь замыкания системы (1)—(3) связан с гипотезой, согласно которой турбулентные члены в (1) могут быть представлены следующим образом:

$$-\overline{u'\zeta'}=\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \quad -\overline{v'\zeta'}=\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial y}, \tag{4}$$

где $\varepsilon=\varepsilon(t)$ — коэффициент вихревой вязкости, предполагаемый одинаковым по всей зоне турбулентного смешения и зависящим только от времени. С помощью этой гипотезы в [4, 5] было получено численное решение автомодельной задачи о движении турбулентных вихревых пар и колец. Результаты расчетов удовлетворительно описывают основные особенности течения. Вместе с тем сравнение с экспериментальными данными обнаруживает и определенные различия в некоторых существенных деталях. Непосредственные наблюдения дают основание для заключения, что коэффициент вихревой вязкости не может быть одинаковым по всей зоне смешения, поскольку он связан с деформацией поля течения [6].

Альтернативную зависимость для замыкания системы (1)—(3) можно получить на основе предложенной Тейлором обобщенной теории переноса завихренности. Согласно этой теории [7]

$$\zeta'=-\frac{\partial}{\partial x}(l_x\zeta)-\frac{\partial}{\partial y}(l_y\zeta), \tag{5}$$

где l_x, l_y — составляющие масштаба турбулентности l по направлениям x, y.

Если принять, что при отсутствии твердых границ и при наличии автомодельного режима течения масштаб турбулентности постоянен по всей зоне смешения и зависит только от времени, т. е. $l=l(t)$, то из соотношения (5) следует, что в области течения, где $\frac{\partial u}{\partial y}\gg\frac{\partial v}{\partial x}$,

$$u' = -l_x \frac{\partial u}{\partial x} - l_y \frac{\partial u}{\partial y} + C_u, \tag{6}$$

а в области течения, где $\frac{\partial u}{\partial y} \ll \frac{\partial v}{\partial x}$, —

$$v' = -l_x \frac{\partial v}{\partial x} - l_y \frac{\partial v}{\partial y} + C_v. \tag{7}$$

Здесь C_u и C_v — компоненты некоторой пульсационной скорости неградиентного происхождения $\mathbf{C}$, причем в автомодельном режиме $\mathbf{C} = \mathbf{C}(t)$ и $\mathbf{C}$ совпадает по направлению с $\mathbf{l}$. Легко показать, что выражения (6) и (7) удовлетворяют уравнению неразрывности для пульсации скорости.

Если, наконец, предположить, что выражения (6) и (7) справедливы для всей зоны смешения и что турбулентный перенос равновероятен в любом направлении, придем окончательно к следующим выражениям для турбулентных потоков завихренности:

$$\begin{aligned} \overline{u'\zeta'} &= l^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{C}{l} \right) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right], \\ \overline{v'\zeta'} &= l^2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{C}{l} \right) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \tag{8}$$

согласно которым коэффициент вихревой вязкости следует рассматривать как тензор, составляющие которого равны

$$\varepsilon_{xx} = l^2 \left(\frac{C}{l} - \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xy} = -l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\varepsilon_{yx} = -l^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yy} = l^2 \left(\frac{C}{l} - \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Отметим, что по формулам (8) вихревая вязкость не равна нулю на оси симметрии, так как при $y = 0$ имеем $\varepsilon_{xx} \neq 0$ и $\varepsilon_{yy} \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н., Теория турбулентных струй, М., 1960.
2. Bradshaw, P., Aeronautical J., No. 7, 463 (1972).
3. Эпштейн А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **24**, 81 (1975).
4. Капланский Ф. Б., Эпштейн А. М., Изв. АН СССР, МЖГ, № 1, 21 (1976).
5. Капланский Ф., Эпштейн А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **25**, 408 (1976).
6. Fox, D. G., J. Atmos. Sci., **29**, 322 (1972).
7. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, под ред. С. Гольдштейна, т. 1, М., 1948.

Институт термофизики и электрофизики Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию 3/XII 1976