

Анализ результатов показывает, что на формирование эхо-сигнала существенное влияние оказывает сигнал, отраженный от задней стенки, время прибытия которого определяется как геометрией, так и материалом объекта.

### ЛИТЕРАТУРА

1. B a n a u g h, R. P., Bull. Seismol. Soc. America, 54, 1073 (1964).
2. S h a w, R. P., J. Acoust. Soc. America, 53, 514 (1973).
3. Г э (K o W. L.), Прикл. мех. (русс. пер.), Сер. Е, № 2, 92 (1970).

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
18/V 1976

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED, 26. KÕIDE  
FOOSIKA \* MATEMAATIKA. 1977, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26  
ФИЗИКА \* МАТЕМАТИКА. 1977, № 3

УДК 532.517.4

Ф. КАПЛАНСКИЙ

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВИХРЕВОМ КОЛЬЦЕ ПРИ МАЛОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

F. KAPLANSKI. VÄIKESE TURBULENTSE VISKOOSUSKOEFTSIENDIGA KEERISPAARI  
ANALOÜTILINE LAHEND

F. KAPLANSKI. AN ANALYTICAL SOLUTION OF THE VORTEX RING PROBLEM AT  
SUFFICIENTLY SMALL VALUES OF THE TURBULENT VISCOSITY COEFFICIENT

Автомодельная задача о движении турбулентного вихревого кольца, возникающего в несжимаемой жидкости в результате воздействия мгновенного точечного динамического импульса, сформулирована в [1] в виде

$$-4\zeta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - r \right) \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} =$$

$$= v_t \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\zeta}{r^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r\zeta, \quad (2)$$

$$\psi = \zeta = 0 \quad (r=0); \quad \psi = \zeta = 0 \quad (x, r \rightarrow \infty); \quad \pi \int_0^\infty \int_0^\infty r^2 \zeta \, dx \, dr = 1. \quad (3)$$

Здесь  $x, r$  — оси цилиндрической системы координат,  $\zeta$  — вихрь,  $\psi$  — функция тока,  $v_t$  — постоянный коэффициент турбулентной вязкости. Функция тока и вихрь связаны следующими соотношениями:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = u, \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} = v, \quad \zeta = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Все рассматриваемые переменные, согласно [1], — величины безразмерные.

Как показывает численное решение системы уравнений (1)–(3) [1], при малых  $v_t$  в структуре вихревого кольца происходят определенные изменения: зона, где значения вихря отличны от нуля, вытягивается в направлении заданного динамического импульса и принимает форму, близкую к форме вертикального пограничного слоя. Эти изменения при уменьшении  $v_t$  изображены на рис. 1.

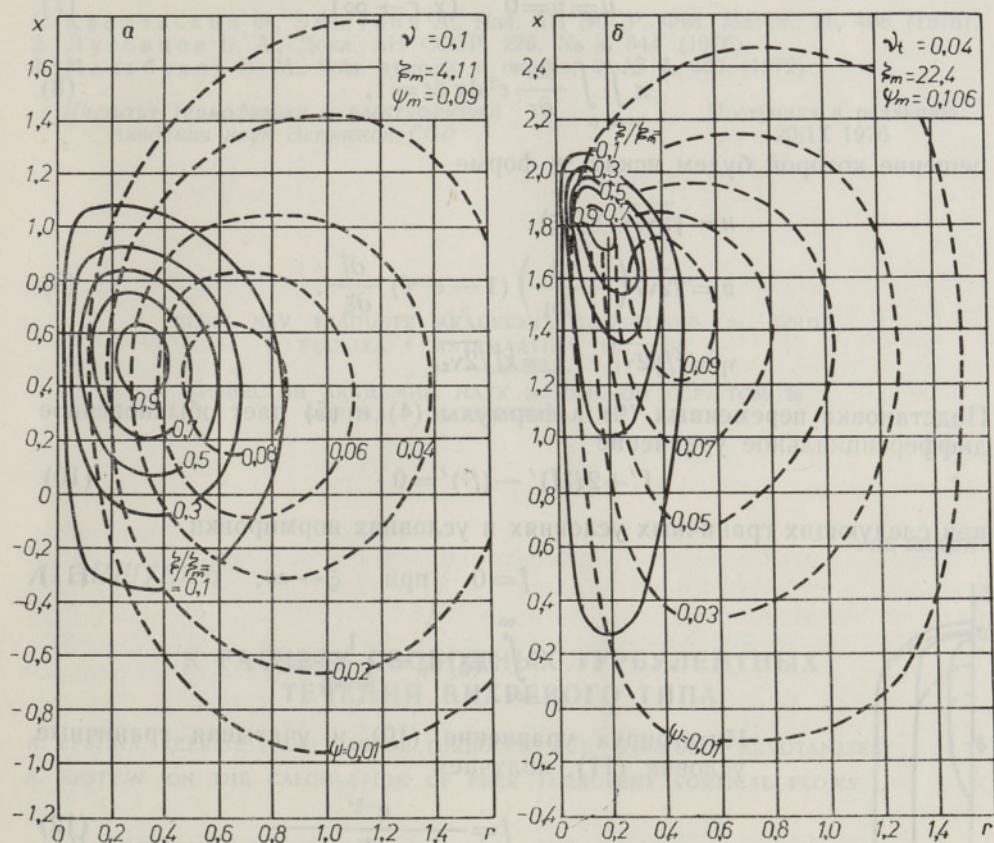


Рис. 1. Изолинии функции вихря  $\zeta(x, r)$  (сплошные линии) и функции тока  $\psi$  (пунктирные линии) при  $v_t = 0.1$  (а) и  $0.04$  (б).

Решение задачи при  $v_t$ , стремящемся к нулю, встречает принципиальные трудности при расчетах с использованием современных вычислительных методов (см. [2]). А именно такая постановка задачи интересна для приложений. Попробуем найти такое решение путем упрощения исходной системы уравнений (1)–(3). Примем, что для зоны отличных от нуля значений вихря при малых  $v_t$  справедливо

$$\frac{\partial u}{\partial r} \gg \frac{\partial v}{\partial x}.$$



Такое предположение не противоречит численным расчетам (см. рис. 1, б): функция тока изменяется в продольном направлении сравнительно слабее, чем в поперечном. Исходя из сказанного, преобразуем краевую задачу (1) — (3) к виду

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ -3u + (u - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (v - r) \frac{\partial u}{\partial r} - v_t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right\} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(ur)}{\partial x} + \frac{\partial(vr)}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

$$\partial u / \partial r = v = 0 \quad (r = 0), \quad (6)$$

$$u = v = 0 \quad (x, r \rightarrow \infty), \quad (7)$$

$$\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial r} r^2 dx dr = 1, \quad (8)$$

решение которой будем искать в форме

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{2v_t} e^{-\eta^2} f(\xi), \\ v &= \sqrt{2v_t} \left( -\frac{1}{2\eta} \right) (1 - e^{-\eta^2}) \frac{\partial f}{\partial \xi}, \\ \eta &= r/\sqrt{2v_t}, \quad \xi = x/\sqrt{2v_t}. \end{aligned} \quad (9)$$

Подстановка переменных (9) в формулы (4) и (5) дает обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f'' + 2(\xi f)' - (f^2)' = 0 \quad (10)$$

при следующих граничных условиях и условиях нормировки

$$f = 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = \frac{1}{4\pi v_t^2} = I.$$

Интегрируя уравнение (10) и учитывая граничные условия (11), получаем

$$f = \frac{e^{-\xi^2}}{\sqrt{\pi c} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx} \quad (12)$$

и, подставляя это выражение в соотношение (11), находим постоянную

$$c = 1/(e^I - 1).$$

Отметим сходство решения (11) с решением задачи о термике [3].

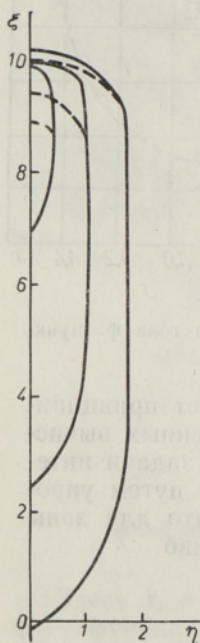


Рис. 2. Изолинии функции  $F(\xi, \eta) = e^{-\eta^2} f(\xi)$  аналитического (сплошные линии) и функции  $u(\xi, \eta)$  численного (пунктирные линии) решений при  $I = 100$ .

На рис. 2 сравнены аналитическое и численное решения полной системы уравнений (1) — (3) при  $I = 100$ . Как видно, наряду с удовлетворительным согласием полученных решений наблюдается и некоторое их различие во фронтальной для вихревого кольца области. Однако эти различия связаны, по-видимому, с тем, что при уменьшении  $v_i$  эта область становится тоньше и, кроме того, погрешности численного решения (обусловленные большими величинами разностного числа Рейнольдса) здесь более значительны. Таким образом, есть основания считать найденный результат асимптотическим для численного решения при  $v_i$ , стремящемся к нулю.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Капланский Ф., Эпштейн А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 25, 408 (1976).
2. Луговцов Б. А., Докл. АН СССР, 226, № 3, 544 (1976).
3. Мальбахов В. М., Физ. атмосф. и океана, 8, № 7, 683 (1972).

Институт термодинамики и электрофизики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
20/IX 1976

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED, 26. KOIDE  
FÜSIKA \* MATEMAATIKA. 1977, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26  
ФИЗИКА \* МАТЕМАТИКА. 1977, № 3

УДК 532.517.4

А. ЭПШТЕЙН

#### К РАСЧЕТУ СВОБОДНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВИХРЕВОГО ТИПА

A. EPSTEIN. KEERISE TOUPI VABADE TURBULENTSETE VOOLUSTE ARVUTAMISEST

A. EPSTEIN. ON THE CALCULATION OF FREE TURBULENT VORTICAL FLOWS

В настоящее время при расчете турбулентных пограничных слоев, в частности свободных — струй и следов, широкое применение находят простейшие полуэмпирические теории турбулентности Прандтля, Тейлора и другие [1]. По существу почти все инженерные приложения современной теории струй и следов основаны на этих моделях, хотя на сегодняшний день разработано немало более совершенных (но и более сложных) теорий турбулентности [2]. Это можно объяснить тем, что, несмотря на присущие простейшим теориям недостатки, полученные с их помощью результаты достаточно правильно описывают основные свойства течений. Особенно хорошие результаты получаются при расчете автомодельных течений. Представляются поэтому оправданными попытки распространить заложенные в простейших полуэмпирических теориях идеи на более сложные турбулентные течения (и в первую очередь на автомодельные), для которых упрощения теории погранич-