

А. СТУЛОВ

## О ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА НА УПРУГОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ

A. STULOV. AKUSTILISE IMPULSI DIFRAKTSIOON ELASTSEL ELLIPTILISEL SILINDRIL

A. STULOV. DIFFRACTION OF ACOUSTICAL PULSE BY ELASTIC ELLIPTICAL CYLINDER

Интегральное представление потенциалов смещения дает возможность решать задачи дифракции, которые не могут быть решены методом разделения переменных. В настоящей работе задача дифракции плоского акустического импульса на упругом цилиндрическом препятствии эллиптического поперечного сечения решена с помощью интегральных формул Кирхгофа [1-3].

Процесс деформации упругого цилиндра будем описывать по линейной теории упругости. Для рассматриваемой плоской задачи граничные условия выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial n}, \quad (1)$$

$$\varrho_1 \left[ c_1^2 \nabla^2 \varphi + 2c_2^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial n \partial s} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \right) \right] - \varrho \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

$$\varrho_1 c_2^2 \left[ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n \partial s} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \right] = 0, \quad (3)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — скалярный потенциал и единственная отличная от нуля компонента векторного потенциала смещения в упругом объекте,  $F = f_i + f_e$  — непрерывная сумма потенциалов смещения в падающей и отраженной волнах,  $\varrho_1$  и  $\varrho$  — плотности материала цилиндра и жидкости соответственно.

Функции  $F$ ,  $\varphi$  и  $\psi$  удовлетворяют волновым уравнениям

$$c^2 \nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$c_1^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$c_2^2 \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (6)$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}$ ,  $s$  — длина дуги вдоль границы поперечного сечения цилиндра,  $n$  — внешняя нормаль цилиндра,  $c$  — скорость звука

в жидкости,  $c_1$  и  $c_2$  — скорости продольных и поперечных волн в материале объекта.

Граничные условия (1) — (3) и уравнения (4) — (6) совместно с начальными условиями, требующими отсутствия возмущений перед фронтом падающей волны  $f_i$  при  $t \leq 0$ , полностью определяют задачу, однако такая постановка неудобна для исследования случая произвольной формы границы объекта. Поэтому вместо уравнений (4) — (6) выпишем, согласно [3], интегральное уравнение Кирхгофа для значений потенциалов смещений на поверхности цилиндра

$$F(s, t) = 2f_i(s, t) - \pi^{-1} \iint \left[ R^{-1} \frac{\partial F(s_0, t_0)}{\partial n_0} + \left( R^{-2} F(s_0, t_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + c_1^{-1} R^{-1} \frac{\partial F(s_0, t_0)}{\partial t_0} \right) \frac{\partial R}{\partial n_0} \right]_{t_0=t-c_1 R} ds_0 dz_0, \quad (7)$$

$$\varphi(s, t) = \pi^{-1} \iint \left[ R^{-1} \frac{\partial \varphi(s_0, t_0)}{\partial n_0} + \left( R^{-2} \varphi(s_0, t_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + c_1^{-1} R^{-1} \frac{\partial \varphi(s_0, t_0)}{\partial t_0} \right) \frac{\partial R}{\partial n_0} \right]_{t_0=t-c_1 R} ds_0 dz_0, \quad (8)$$

$$\psi(s, t) = \pi^{-1} \iint \left[ R^{-1} \frac{\partial \psi(s_0, t_0)}{\partial n_0} + \left( R^{-2} \psi(s_0, t_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + c_2^{-1} R^{-1} \frac{\partial \psi(s_0, t_0)}{\partial t_0} \right) \frac{\partial R}{\partial n_0} \right]_{t_0=t-c_2 R} ds_0 dz_0. \quad (9)$$

Уравнения (7) — (9) совместно с уравнениями (1) — (3) представляют собой систему из шести уравнений с шестью неизвестными функциями  $F$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\frac{\partial F}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  и  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ , определение которых на поверхности цилиндра и является первой, основной частью задачи. Вычисление эхо-сигнала в произвольной точке пространства по формуле, аналогичной (7), не составляет трудности.

Предполагая, что неизвестные функции имеют постоянное среднее значение на фиксированных интервалах  $\Delta s$  и  $\Delta t$ , аппроксимируем двойные интегралы (7) — (9) двойной суммой запаздывающих по времени значений неизвестных функций, коэффициенты при которых являются интегралами от  $R^{-1} \frac{\partial R}{\partial n_0} :: R^{-2} \frac{\partial R}{\partial n_0}$  по соответствующим областям.

Производные по времени заменим отношением левых разностей, производные по дуге  $s$  — средними разностями. Такое приближение даст на каждом интервале  $\Delta s$  и  $\Delta t$  систему из шести алгебраических уравнений для определения средних значений неизвестных функций. Разностные уравнения из-за громоздкости приводить здесь не будем.

Изложенным выше способом были вычислены эхо-сигналы от упругих эллиптических цилиндров.

На рис. 1 показаны эхо-сигналы от эллиптического цилиндра с отношением полуосей  $a = 1,2$ . Расстояние от точки наблюдения  $A$  до оси цилиндра  $r = 20$ . Кривая 1 — давление в зондирующем импульсе, кривые 2—4 — эхо-сигналы от стального, свинцового и алюминиевого цилиндров соответственно.

На рис. 2 изображены эхо-сигналы, вызванные зондирующим импульсом давления (кривая 1), от различных эллиптических стальных цилиндров. Кривые 2, 3, 4, 5 — эхо-сигналы от цилиндров с отноше-



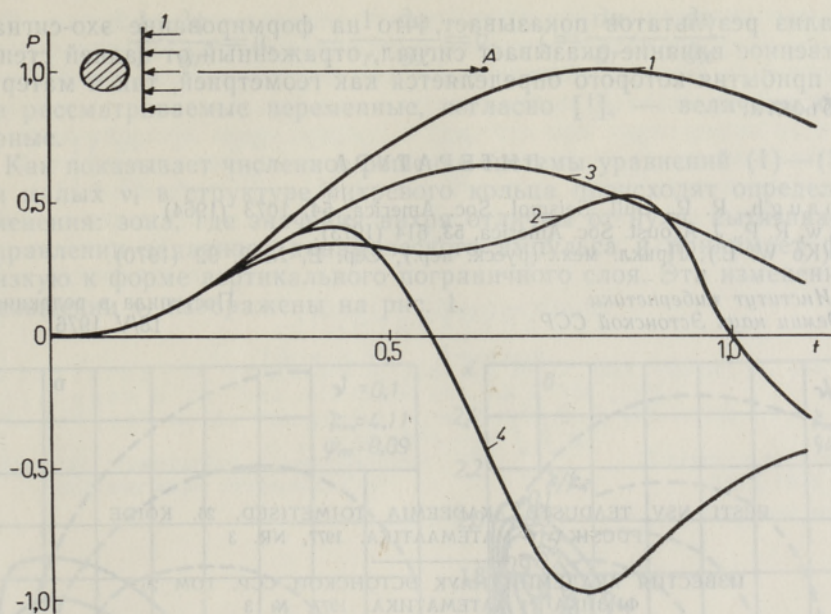


Рис. 1.

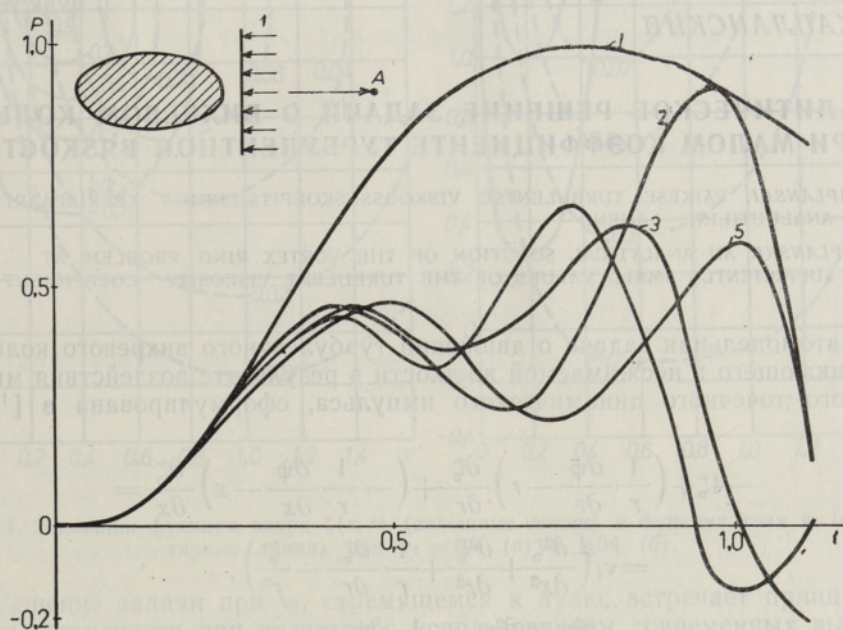


Рис. 2.

нием полуосей  $a = 1,0; 1,2; 1,6; 2,0$  соответственно, вычисленные для точки наблюдения  $A$ . Все эхо-сигналы на рис. 1 и 2 нормированы геометрическим множителем  $(2rK+1)^{1/2}$ , где  $r$  — расстояние от точки наблюдения до оси эллипса,  $K$  — кривизна цилиндра в точке отражения.

Анализ результатов показывает, что на формирование эхо-сигнала существенное влияние оказывает сигнал, отраженный от задней стенки, время прибытия которого определяется как геометрией, так и материалом объекта.

### ЛИТЕРАТУРА

1. B a n a u g h, R. P., Bull. Seismol. Soc. America, 54, 1073 (1964).
2. S h a w, R. P., J. Acoust. Soc. America, 53, 514 (1973).
3. Г э (K o W. L.), Прикл. мех. (русс. пер.), Сер. Е, № 2, 92 (1970).

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
18/V 1976

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED, 26. KÕIDE  
FOOSIKA \* MATEMAATIKA. 1977, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26  
ФИЗИКА \* МАТЕМАТИКА. 1977, № 3

УДК 532.517.4

Ф. КАПЛАНСКИЙ

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВИХРЕВОМ КОЛЬЦЕ ПРИ МАЛОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

F. KAPLANSKI. VÄIKESE TURBULENTSE VISKOOSUSKOEFTSIENDIGA KEERISPAARI  
ANALOÜTILINE LAHEND

F. KAPLANSKI. AN ANALYTICAL SOLUTION OF THE VORTEX RING PROBLEM AT  
SUFFICIENTLY SMALL VALUES OF THE TURBULENT VISCOSITY COEFFICIENT

Автомодельная задача о движении турбулентного вихревого кольца, возникающего в несжимаемой жидкости в результате воздействия мгновенного точечного динамического импульса, сформулирована в [1] в виде

$$\begin{aligned} -4\zeta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - r \right) \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \\ = v_t \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\zeta}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r\zeta, \quad (2)$$

$$\psi = \zeta = 0 \quad (r=0); \quad \psi = \zeta = 0 \quad (x, r \rightarrow \infty); \quad \pi \int_0^\infty \int_0^\infty r^2 \zeta \, dx \, dr = 1. \quad (3)$$

Здесь  $x, r$  — оси цилиндрической системы координат,  $\zeta$  — вихрь,  $\psi$  — функция тока,  $v_t$  — постоянный коэффициент турбулентной вязкости. Функция тока и вихрь связаны следующими соотношениями: