EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED, 26. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1977.3.02

УДК 535.41:517.91

П. КАРД

ОБ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЯХ, РЕШАЕМЫХ В ЗАМКНУТОМ ВИДЕ

Развит новый метод нахождения замкнутого решения одномерного волнового уравнения, применимый во многих случаях зависимости показателя преломления от координаты. Показано применение этого метода в теории матрицы интерференции неоднородной пленки.

Введение

Направленное распространение монохроматического света в неоднородной среде, показатель преломления $n(z)$ которой зависит только от одной координаты z, описывается одномерным волновым уравнением

$$d^2U/dz^2+k^2n^2(z)\,U=0, \tag{1}$$

где k — волновое число, U — амплитуда света. Предполагается, что волновой вектор направлен параллельно градиенту показателя преломления. Случай, когда волновой вектор образует с градиентом некоторый угол, приводится к уравнению того же вида, только под $n(z)$ следует понимать т. н. эффективный показатель преломления, зависящий от поляризации света. В нижеследующем мы этих случаев различать не будем, так как нас интересует здесь главным образом математический аспект — вопрос о решении уравнения вида (1).

Известен ряд функций $n(z)$, при которых это уравнение решается в т. н. замкнутом виде, т. е. решение выражается через известные функции. В настоящей статье мы приведем новые, до сих пор, по-видимому, неизвестные варианты уравнений, решаемых в замкнутом виде. Установим существование довольно обширного класса функций $n(z)$, при которых уравнение (1) имеет замкнутое решение. Отметим, что зависимость $n(z)$ задается в этих случаях параметрически.

Теория

Обозначим через u оптический путь света

$$u=\int n(z)\,dz \tag{2}$$

и введем вместо U функцию A по формуле

$$U=n^{-1/2}A. \tag{3}$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$d^2A/du^2+[k^2-(2n)^{-1}d^2n/du^2+(4n^2)^{-1}(dn/du)^2]=0. \tag{4}$$

Обозначим

$$-(2n)^{-1}d^2n/du^2+(4n^2)^{-1}(dn/du)^2=f(u). \tag{5}$$

Тогда

$$d^2A/du^2+(k^2+f(u))A=0. \tag{6}$$

Далее обратим внимание на то, что если

$$s=n^{1/2}, \tag{7}$$

то

$$s^{-1}d^2s/du^2=(2n)^{-1}d^2n/du^2-(4n^2)^{-1}(dn/du)^2. \tag{8}$$

Отсюда согласно формуле (5) имеем

$$d^2s/du^2+f(u)s=0. \tag{9}$$

Таким образом, первоначальное уравнение (1) приведено к системе уравнений (6) и (9). Задаваемой функцией является в этих уравнениях не $n(z)$, а $f(u)$. Предположим, что уравнение (9) разрешимо при заданной $f(u)$ в замкнутом виде. Тогда, пользуясь любым его решением, находим по формуле (7) соответствующий показатель преломления $n(u)$, который можно затем с помощью формулы (2) выразить как функцию z. Если теперь уравнение (6) тоже решается при той же функции $f(u)$ в замкнутом виде, то формула (3) даст и решение уравнения (1). Итак, для того чтобы решить уравнение (1) в замкнутом виде, достаточно знать решения уравнений (6) и (9).

Напишем несколько формул, поясняющих сказанное. Пусть s_1, s_2 — любые два линейно независимых решения уравнения (9). Подставляя одно из них, например, первое, в формулу (7), имеем

$$n=s_1^2. \tag{10}$$

Из формулы (2) тогда получим

$$dz=du/s_1^2. \tag{11}$$

Но так как

$$s_1s'_2-s'_1s_2=\sigma, \tag{12}$$

где σ — постоянная, то

$$du/s_1^2=\sigma^{-1}d(s_2/s_1); \tag{13}$$

следовательно,

$$dz=\sigma^{-1}d(s_2/s_1) \tag{14}$$

и

$$z=\sigma^{-1}(s_2/s_1). \tag{15}$$

Здесь мы положили постоянную интегрирования равной нулю, что не ограничивает общности, поскольку начало отсчета координат z и u произвольно.

Формулы (10) и (15) определяют зависимость n от z в параметрическом виде (параметром является u). Решение уравнения (1) получается в виде

$$U = s_1^{-1} A, \tag{16}$$

где A — решение уравнения (6). Очевидно, U является здесь тоже функцией u.

Исключение параметра предполагает обратимость формулы (15), т. е. возможность выразить из нее u в зависимости от z. Тогда и n, и U можно выразить прямо как функции z. Это действительно оказывается в ряде случаев возможным, однако, новых решений мы тут не находим. В других случаях решение ново, но исключение параметра невозможно. Несмотря на параметрический вид, решение и в этих случаях следует считать полноценным, поскольку оно позволяет вычислить все интересующие нас величины.

Тривиальный пример

Для иллюстрации вышеизложенного метода рассмотрим простейший пример. Пусть $f(u) = 0$. Тогда из уравнения (9) имеем

$$s_1 = au/h + b, \tag{17}$$

где h — толщина слоя, a и b — безразмерные постоянные. Другим решением является $s_2 = \mathrm{const.}$; тогда $\sigma = -as_2/h$ и формула (15) дает

$$z = (u/b)(au/h + b)^{-1} \tag{18}$$

(мы сместили здесь начало отсчета z, чтобы иметь $z = 0$ при $u = 0$). Показатель преломления, согласно формуле (10), равен

$$n(u) = (au/h + b)^2. \tag{19}$$

Исключая из формул (18) и (19) u, находим

$$n(z) = b^2(1 - abz/h)^{-2}. \tag{20}$$

Итак, волновое уравнение

$$d^2U/dz^2 + k^2b^4(1 - abz/h)^{-4}U = 0 \tag{21}$$

имеет, согласно формулам (3) и (6), общее решение

$$U = (1 - abz/h)\left[C_1 \cos\left(b^2kz(1 - abz/h)^{-1}\right) + C_2 \sin\left(b^2kz(1 - abz/h)^{-1}\right)\right], \tag{22}$$

где C_1, C_2 — постоянные. Волновое уравнение такого вида хорошо известно в числе решаемых в замкнутом виде (см., напр., [1], с. 519); поэтому ничего нового, кроме иллюстрации метода, приведенный пример не дает. Впрочем, здесь можно видеть также новый метод решения уравнения (21) и других подобных уравнений.

Примеры функций $f(u)$, приводящих к решаемым в замкнутом виде волновым уравнениям новых типов, приведем в последнем разделе статьи.

Матрица интерференции и оптические характеристики неоднородного слоя

Важным применением волновых уравнений является изучение оптических свойств неоднородных слоев. В этой теории основную роль играет величина, называемая матрицей интерференции. Ее определение и способ вычисления приведены в [2]. Здесь мы применим методику этой статьи к нахождению матрицы интерференции и оптических характеристик слоя в случае, когда его показатель преломления задается параметрически согласно изложенной выше теории.

Из формул (11) и (16) находим:

$$\begin{aligned} dU_1/dz &= s_1\, dA_1/du - (ds_1/du)A_1, \\ dU_2/dz &= s_1\, dA_2/du - (ds_1/du)A_2, \end{aligned} \tag{23}$$

где A_1, A_2 — линейно независимые решения уравнения (6), а U_1, U_2 — линейно независимые решения уравнения (1). Отсюда вычисляем величины Δ, D_1, D_2, D, D_{12} (см. [2], формулы (26) и (32)), выражая их через параметр u. Прежде всего определим величины

$$\begin{aligned} &P = \begin{vmatrix} A_1(u_1) & A_2(u_1) \\ A_1(u_2) & A_2(u_2) \end{vmatrix}, \quad P_{12} = \frac{1}{k^2} \begin{vmatrix} A'_1(u_1) & A'_2(u_1) \\ A'_1(u_2) & A'_2(u_2) \end{vmatrix}, \\ &P_1 = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} A'_1(u_1) & A'_2(u_1) \\ A_1(u_2) & A_2(u_2) \end{vmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} A_1(u_1) & A_2(u_1) \\ A'_1(u_2) & A'_2(u_2) \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{24}$$

где штрих означает производную по u, а u_1 и u_2 означают значения u на границах слоя. Затем из формул (16) и (23) находим

$$\Delta = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ dU_1/dz & dU_2/dz \end{vmatrix} = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ dA_1/du & dA_2/du \end{vmatrix}, \tag{25}$$

т. е. вронскианы уравнений (1) и (6) совпадают. Далее вычисляем по тем же формулам и по формуле (32) статьи [2] D, D_1, D_2, D_{12}, учитывая также соотношение (10):

$$\begin{aligned} D &= (n_1 n_2)^{-1/2} P, \\ D_1 &= (n_1/n_2)^{1/2} (P_1 - q_1 P), \\ D_2 &= (n_2/n_1)^{1/2} (P_2 - q_2 P), \\ D_{12} &= (n_1 n_2)^{1/2} (P_{12} - q_2 P_1 - q_1 P_2 + q_1 q_2 P), \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$q = (2kn)^{-1}\, dn/du; \tag{27}$$

индексы 1, 2 у n и q указывают значения этих величин на границах слоя. При этом

$$DD_{12} - D_1 D_2 = PP_{12} - P_1 P_2 = \Delta^2. \tag{28}$$

Затем найдем элементы матрицы интерференции

$$\begin{aligned} L_{11} &= t^{-1}, \\ L_{21} &= r/t, \end{aligned} \tag{29}$$

где r и t — амплитудные коэффициенты отражения и пропускания слоя, в случае, если на границах отсутствует скачок показателя преломления, т. е. когда ограничивающие среды имеют те же показатели преломления n_1 и n_2, что и слой на границах. Матрица интерференции имеет в этом случае вид

$$L=G(v_1)\begin{pmatrix} l_0+l_3 & l_1-il_2 \\ l_1+il_2 & l_0-l_3 \end{pmatrix} G(-v_2), \tag{30}$$

где

$$G(v)=\begin{pmatrix} \operatorname{ch} v & \operatorname{sh} v \\ \operatorname{sh} v & \operatorname{ch} v \end{pmatrix} \tag{31}$$

и

$$v_{1,2}=(1/2)\ln n_{1,2}, \tag{32}$$

а l_0, l_1, l_2, l_3 определяются формулами (31) статьи [2]. Сначала из формул (29) и (30) находим

$$\begin{aligned} t^{-1}&=l_0\operatorname{ch}(v_1-v_2)+l_3\operatorname{ch}(v_1+v_2)+l_1\operatorname{sh}(v_1-v_2)+il_2\operatorname{sh}(v_1+v_2), \\ r/t&=l_0\operatorname{sh}(v_1-v_2)+l_3\operatorname{sh}(v_1+v_2)+l_1\operatorname{ch}(v_1-v_2)+il_2\operatorname{ch}(v_1+v_2). \end{aligned} \tag{33}$$

Подставляя сюда выражения

$$\begin{aligned} l_0&=(2\Delta)^{-1}[e^{v_2-v_1}(P_2-q_2P)-e^{v_1-v_2}(P_1-q_1P)], \\ l_1&=(2\Delta)^{-1}[e^{v_2-v_1}(P_2-q_2P)+e^{v_1-v_2}(P_1-q_1P)], \\ l_2&=(2\Delta)^{-1}[e^{-v_1-v_2}P-e^{v_1+v_2}(P_{12}-q_2P_1-q_1P_2+q_1q_2P)], \\ l_3&=(2\Delta)^{-1}[e^{-v_1-v_2}P+e^{v_1+v_2}(P_{12}-q_2P_1-q_1P_2+q_1q_2P)], \end{aligned} \tag{34}$$

вытекающие из формул (31) статьи [2] и формул (26) настоящей статьи, находим

$$t^{-1}=(2\Delta)^{-1}\{(q_1-q_2)P-(P_1-P_2)+i[(1+q_1q_2)P-q_2P_1-q_1P_2+P_{12}]\} \tag{35}$$

и

$$r/t=(2\Delta)^{-1}\{-(q_1+q_2)P+(P_1+P_2)+i[(1-q_1q_2)P+q_2P_1+q_1P_2-P_{12}]\}. \tag{36}$$

Таким образом, вычисление спектральных характеристик слоя в зависимости от волнового числа не требует знания величин D, D_1, D_2 и D_{12}. Нужно вычислить только величины Δ, q_1, q_2, P, P_1, P_2 и P_{12}. Для этого служат формулы (24), (25) и (27), применение которых предполагает знание решений A_1, A_2 уравнения (6). Кроме того, нужно знать показатель преломления $n(u)$ как функцию параметра u. Он задается выбором того или другого решения s_1 уравнения (9) согласно формуле (10). Зависимость же показателя преломления от координаты z определяется, независимо от вычисления спектральных характеристик, обоими линейно независимыми решениями уравнения (9) согласно формулам (10) и (15).

Нетривиальные примеры

В этом разделе приведем несколько нетривиальных примеров функций $f(u)$. Соответствующие им волновые уравнения обладают замкнутыми решениями, которые могут быть найдены согласно вышеизложенной теории.

1. Пусть

$$f(u)=-b^2/h^2-m(m+1)(a^2/h^2)\cos^{-2}(au/h), \tag{37}$$

где a, b — вещественные или мнимые безразмерные постоянные, h — толщина слоя, m — натуральное число. Линейно независимые решения уравнения

$$d^2s/du^2 - [b^2/h^2 + m(m+1)(a^2/h^2)\cos^{-2}(au/h)]s = 0 \tag{38}$$

при $m = 1$ имеют вид (см. [1], с. 527, уравнение 2.420)

$$\begin{aligned} s_1^{(1)} &= b\,\mathrm{ch}\,(bu/h) + a\,\mathrm{sh}\,(bu/h)\tan(au/h), \\ s_2^{(1)} &= b\,\mathrm{sh}\,(bu/h) + a\,\mathrm{ch}\,(bu/h)\tan(au/h), \end{aligned} \tag{39}$$

где верхним индексом обозначено значение m. Решения при других значениях m могут быть найдены с помощью рекуррентной формулы

$$s^{(m+1)} = h\,ds^{(m)}/du + a(m+1)\tan(au/h)\cdot s^{(m)}. \tag{40}$$

Уравнение для A имеет такой же вид, как и для s:

$$d^2A/du^2 - [b^2/h^2 - k^2 + m(m+1)(a^2/h^2)\cos^{-2}(au/h)]A = 0 \tag{41}$$

и решается так же с заменой только b^2 на $b^2 - k^2h^2$.

Отметим два особых случая. Во-первых, при $a^2 + b^2 = 0$, как легко убедиться по формулам (39) и (40), второе решение обращается в нуль *. Во-вторых, при $b = 0$ обращается в нуль первое решение. В этих случаях следует брать вместо обращающегося в нуль решения предел его производной по b при $b \to ia$ или $b \to 0$ соответственно. Так, уравнение

$$d^2s^{(1)}/du^2 + (a^2/h^2)(1 - 2\cos^{-2}(au/h))s^{(1)} = 0 \tag{42}$$

имеет решения

$$\begin{aligned} s_1^{(1)} &= \cos^{-1}(au/h), \\ s_2^{(1)} &= (au/h)\cos^{-1}(au/h) + \sin(au/h), \end{aligned} \tag{43}$$

а уравнение

$$d^2s^{(1)}/du^2 - 2(a^2/h^2)\cos^{-2}(au/h)s^{(1)} = 0 \tag{44}$$

имеет решения

$$\begin{aligned} s_1^{(1)} &= 1 + (au/h)\tan(au/h), \\ s_2^{(1)} &= \tan(au/h). \end{aligned} \tag{45}$$

Решения аналогичных уравнений при $m > 1$ получаются с помощью той же рекуррентной формулы (40).

2. Аналогичный предыдущему тип разрешимых уравнений получается при

$$f(u) = -b^2/h^2 - m(m+1)(a^2/h^2)\,\mathrm{sh}^{-2}(au/h), \tag{46}$$

где a, b, h, m имеют тот же смысл. Уравнения для s и A вытекают здесь из уравнений (38) и (41) посредством замены

---

* У Э. Камке в [1] это обстоятельство не оговаривается; приведенное им для уравнения $y'' \cos^2 x - [a\cos^2 x + n(n-1)]y = 0$ общее решение

$$y = \cos^n x(\cos^{-1} x\,d/dx)^n(C_1e^{x\sqrt{a}} + C_2e^{-x\sqrt{a}})$$

при $a = -1$ неверно, так как содержит фактически только одно решение (если $n \geqslant 2$).

$$u \to \pi h/2a - u,$$
$$a \to ia.$$

Соответственно, рекуррентная формула (40) заменяется следующей:

$$s^{(m+1)} = -h ds^{(m)}/du + a(m+1)\,\mathrm{cth}\,(au/h)\cdot s^{(m)}, \tag{47}$$

а при $m = 1$ решения имеют вид:

$$\begin{aligned} s_1^{(1)} &= b\,\mathrm{ch}\,(bu/h) - a\,\mathrm{sh}\,(bu/h)\,\mathrm{cth}\,(au/h),\\ s_2^{(1)} &= b\,\mathrm{sh}\,(bu/h) - a\,\mathrm{ch}\,(bu/h)\,\mathrm{cth}\,(au/h). \end{aligned} \tag{48}$$

Особыми случаями являются здесь $a = b$ и $b = 0$. Одно из решений обращается в нуль; его следует заменить пределом производной по b при $b \to a$ или $b \to 0$. Так, уравнение

$$d^2 s^{(1)}/du^2 - (a^2/h^2)\,(1 + 2\,\mathrm{sh}^{-2}(au/h))\,s^{(1)} = 0 \tag{49}$$

имеет решения

$$\begin{aligned} s_1^{(1)} &= (au/h)\,\mathrm{sh}^{-1}(au/h) - \mathrm{ch}\,(au/h),\\ s_2^{(1)} &= \mathrm{sh}^{-1}(au/h), \end{aligned} \tag{50}$$

а уравнение

$$d^2 s^{(1)}/du^2 - 2\,(a^2/h^2)\,\mathrm{sh}^{-2}(au/h)\,s^{(1)} = 0 \tag{51}$$

имеет решения

$$\begin{aligned} s_1^{(1)} &= 1 - (au/h)\,\mathrm{cth}\,(au/h),\\ s_2^{(1)} &= \mathrm{cth}\,(au/h). \end{aligned} \tag{52}$$

Решения аналогичных уравнений с $m > 1$ можно найти по рекуррентной формуле (47).

3. Третьим примером является

$$f(u) = a^2/h^2 - b^2/u^2, \tag{53}$$

где a и b безразмерные постоянные, а h — толщина слоя. Уравнения

$$d^2 s/du^2 + (a^2/h^2 - b^2/u^2)\,s = 0 \tag{54}$$

и

$$d^2 A/du^2 + (k^2 + a^2/h^2 - b^2/u^2)\,A = 0 \tag{55}$$

имеют решения

$$s = (u/h)^{1/2} Z_\nu(au/h) \tag{56}$$

и

$$A = (u/h)^{1/2} Z_\nu((u/h)\,(a^2 + k^2 h^2)^{1/2}), \tag{57}$$

где

$$\nu = (b^2 + 1/4)^{1/2} \tag{58}$$

и Z_ν — функция Бесселя.

В заключение подчеркнем, что каждой конкретной функции $f(u)$ соответствует, вообще говоря, множество форм зависимости показателя преломления от координаты, так как в формуле (10) выбор s_1 произволен. В дальнейшем нами будут выполнены конкретные расчеты спектральных характеристик неоднородных слоев для некоторых типичных случаев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Изд. 2-е, М., 1961.
2. Кард П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 23, 113 (1974).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 10/XII 1976

P. KARD

LÕPLIKUL KUJUL LAHENDUVATEST ÜHEMÕÕTMELISTEST LAINEVÕRRANDITEST

Asendused (2), (3) ja (7) teisendavad ühemõõtmelise lainevõrrandi (1) võrranditeks (6) ja (9), kus $f(u)$ on optilise teepikkuse u meelevaldne funktsioon. Valemite (10) ja (15) kaudu, kus s_1, s_2 on võrrandi (9) lineaarselt sõltumatud lahendid ja σ selle vronskiaan, määrab see funktsioon murdumisnäitaja $n(z)$ parameetrilise sõltuvuse koordinaadist z. Kui võrrandid (6) ja (9) lahenduvad lõplikul kujul, siis annab valem (16) lõpliku kujuga lahendi ka lainevõrrandile (1). Sel teel on võimalik leida uusi lahenduvaid lainevõrrandeid, näit. valides $f(u)$ valemite (37), (46) või (53) kohaselt. Neil juhtudel aga, kui lahend on juba tuntud, pakub uus meetod mõningaid võimalusi lahenduskäigu põhimõtteliseks lihtsustamiseks (näit. lainevõrrandi (21) puhul). Meetodi rakendamine mittehomogeensetele optilistele interferentskiledele, mille piirpindadel murdumisnäitaja pidevalt muutub, annab valemid (35) ja (36), kus r on kile amplituudne peegeldumis- ja t läbilaskvustegur. Suurused P, P_1, P_2, P_{12}, Δ, q_1 ja q_2 on määratud valemitega (24), (25) ja (27), kus indeksid 1, 2 u ja q juures viitavad kihi piirpindadele. A juures aga märgivad võrrandi (6) kaht lineaarselt sõltumatut lahendit.

P. KARD

ON THE ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATIONS HAVING CLOSED SOLUTIONS

The substitutions (2), (3), and (7) transform the one-dimensional wave equation (1) into the equations (6) and (9), where $f(u)$ is an arbitrary function of the optical path u. This function determines, by the formulae (10) and (15), where s_1, s_2 are the linearly independent solutions of the eq. (9) and σ its wronskian, parametrically the refractive index n versus co-ordinate z. If the eqs. (6) and (9) are solvable in a closed form (i. e., in terms of known functions), then the formula (16) gives the closed solution of the wave equation (1) as well. By this procedure a number of newly solvable wave equations can be detected, e. g., those which are generated by the function $f(u)$ given by the formulae (37), (46), or (53). This method can also be successfully applied when the solution is already known by other methods (e. g., for the wave equation (21)). The spectral characteristics of the inhomogeneous optical interference films with continuously varying refractive indices at boundaries can be expressed in terms of the new method by the formulae (35) and (36), where r and t are the amplitude reflectance and the amplitude transmittance of the film. The quantities P, P_1, P_2, P_{12}, Δ, q_1, q_2, entering these formulae, are determined by the formulae (24), (25), and (27), where A_1, A_2 are the linearly independent solutions of the eq. (6), and the indices 1, 2 next to the u and q refer to the boundaries of the film.