EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 26. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1977.3.01

УДК 62.50 + 531.38

И. КЕЙС

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СУБОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ АГРЕГАЦИИ

Рассматриваются задачи субоптимального синтеза некоторых нелинейных динамических систем. Выражения субоптимальных регуляторов систем получены агрегацией [1, 2] системы порядка n из агрегированной системы размерности $l \ll n$ и методом оптимальных функций Ляпунова [3, 4]. Предлагаются различные варианты оптимизации по параметру агрегации с целью минимизации невязки и мажорантных функций. Результаты иллюстрируются на примере двух y-автономных [5] механических систем, для которых получены решения задач оптимального управления по всем (некоторым) переменным.

1. Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$x^{\cdot}=X(q)+A'(q)\,u\,(q=(t,x_\alpha)^*\in R':|t|<\infty,\ \ |x|<\infty), \qquad (1.1)$$

$$x=(x_\alpha)^*,\ u=(u_s)^*,\ X(t,0)\equiv 0,\ A'=\|a_{\alpha s}(q)\|\,(X(q),A(q)\subset C_1(R')),$$

$$1\leqslant \operatorname{rank}\|a_{\sigma s}\|=r\leqslant n,\ u\in\Omega\subseteq E^r\,(x^{\cdot}=dx/dt,\ \alpha=\overline{1,n};\ s,\sigma=\overline{1,r}),$$

для которой решения (1.1) при любых $t\geqslant t_0$, $q_0=q(t_0)\in R'$ существуют и единственны, если $u(t)\in\{u\}$ — множество кусочно непрерывных вектор-функций в Ω. Условие оптимальности управления $u(t)$ — минимум интеграла

$$I'(u\,|\,q,a)=\int_t^{t_1}L'(q,u)\,d\tau\,(L'>0,\ \ y\neq 0,\ \ u\neq 0;\ \ L'\subset C_1,\ \ q\in R',\ \ u\in\Omega), \qquad (1.2)$$

$t<t_1(a)=t_1$ — первый момент выполнения равенств $G_j\equiv y_j(q,a)=0$ $(j=1,2,\ \dots,\ l\ll n)$. Переменные агрегации $y_j=y_j(q,a)$ содержат постоянный параметр $a=(a_\nu)^*(\nu=\overline{1,m\leqslant ln})$ из области $P\subseteq E^m(a=0\in P)$, где выполнены условие гомеоморфности $x\leftrightarrow\xi$ $\xi=(y_j,x_\beta)^*$ при $y\neq 0\,(\forall t=\mathrm{const},\ \ \forall a\in P,\ \ \beta=\overline{l+1,n})$ и соотношения $y_j(t,0,x_2,a)\equiv 0$,

$$\det\|\partial y_j/\partial x'_i\|\neq 0,$$

$$y_j(q,a)\subset C_2,\ y\neq 0\ (x_1=(x_1,\ \dots,\ x_{l_1})^*,\ \ x_2=(x_{l_1+1},\ \dots,\ x_n))^*, \qquad (1.3)$$

$y_j(q,a)\subset C(q\in R',\ \ a\in P)$, $1\leqslant l_1\leqslant n$, $y\to 0$ при $x_1\to 0$ равномерно по t, x_2, a. Обозначим через $U'(t,x_2,a)$ область значений $\{y_j(x_1)\}\,(i=\overline{1,l})$. Примем для простоты, что $\bigcap\limits_{t,x_2,a} U'\equiv U$ — неограниченная область в $E^l(0\in U)$. Последнее вместе с (1.3) выполняется в случае линейной [1, 2] агрегации $y=A^0x$, $A^0=\|\overset{0}{a}_{j\alpha}\|=\mathrm{const}$, $\mathrm{rank}\,A^0=l$, $\dim a=m=ln$. На области $R^0:|t|<\infty$, $y\neq 0$, $y\in U$, $z\in E^{n-l}$ в переменных $\xi=(y_j,\ z_\beta)^*$, $z_\beta\equiv x_\beta$ система (1.1), (1.2) имеет при (1.3) вид

$$\xi^{\cdot}=F_0(t,\xi,a)+A(t,\xi,a)u\equiv F(t,\xi,a,u)\ (F_0=(Y_j,Z_\beta)^*),\tag{1.4}$$

$$y^{\cdot}=Y(t,\xi,a)+A_1(t,\xi,a)u,\ \ z^{\cdot}=Z(t,\xi,a)+A_2(t,\xi,a)u,$$

$$Y=(Y_j)^*,\ \ Y_j=X[y_i],\ X=\frac{\partial}{\partial t}+X_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha},\ Z=(Z_\beta)^*,\ \ Z_\beta=(X_\beta(q))^*$$

$$A=\left\|\begin{matrix}A_1\\A_2\end{matrix}\right\|,\ A_1=KA',\ K=\|k_{j\alpha}\|,\ k_{j\alpha}=\frac{\partial y_j}{\partial x_\alpha},\ A_2=\|a_{\beta s}(q)\|,$$

$$I(u\,|\,t,\xi,a)=\int\limits_t^{t_1}L(t,\xi,u,a)\,d\tau\,(L>0,\ \xi\neq 0,\ u\neq 0,\ L\subset C_1(R^0\times\Omega\times P)),$$

$$L(t,\xi,u,a)\equiv L'(t,x(t,\xi,a),u),\ F_0(t,0,a)\equiv 0\ \ (\xi\in R^0,\ u\in\Omega,\ a\in P).$$

Для $u(t)\in\{u\}$ в области Ω решения (1.4) при t,t_0, $\xi_0\equiv\xi(t_0)\in R^0$ существуют и единственны на R^0 в силу (1.1), (1.3). Задача оптимального по (1.2) приведения x на $G_j=0$ сводится к I-оптимальному преобразованию y-компоненты решения $\xi(t)$ в нуль. Предположим, что $u(t)\in\{u\}\subset\Omega$, приводящим y в нуль, отвечают в R^0 z-продолжаемые решения (1.4). Для нахождения субоптимальных решений используем методы динамического программирования Ляпунова [3, 4] и параметрической оптимизации по a. Пусть система (1.4) в $R\equiv R^0\cup y=0,\ \forall a\in P$ имеет непрерывную функцию $S(t,\xi,a)$, удовлетворяющую условиям

$$S(t,0,z,a)\equiv 0,$$

$$S_1(y,a)\leqslant S(t,\xi,a)\leqslant S_2(y,a)\ \ (S_{1,2}>0,\ y\neq 0,\ S_{1,2}\subset C \text{ на } R\times P),\tag{1.5}$$

$$B[S,u]\geqslant B[S,u^0]\equiv 0,\ S\subset C_1;\ u,\ u^0\in\Omega,\ u^0=u^0(t,\xi,\Theta,a)\subset C \text{ на } R^0\times P,$$

$$S^{\cdot}|_{u=u_0}\equiv -L(t,\xi,u_0,a)\leqslant -w(y,a)\ \text{ на } R^0\ \ (S_1(0,a)\equiv S_2(0,a)\equiv 0 \text{ на } P),$$

$$(u_0=u_0(t,\xi,a)=u^0(t,\xi,\Theta(t,\xi,a),a)).$$

Здесь и ниже $f_{1,2}$, w — некоторые оценочные для f y-определенно положительные и непрерывные функции от y, a и приняты обозначения

$$B[f,u]=\frac{df}{dt}+L(t,\xi,u,a)=\frac{\partial f}{\partial t}+y^{\cdot}{}_j\frac{\partial f}{\partial y_j}+z^{\cdot}{}_\gamma\frac{\partial f}{\partial z_\gamma}+L\ \ (y\neq 0),\tag{1.6}$$

$$\Theta=(p'_j,\psi_\gamma)^*,\ p'_0=\frac{\partial S}{\partial t},\ p'_j=\frac{\partial S}{\partial y_j},\ \psi_\gamma=\frac{\partial S}{\partial z_\gamma}\ \ (z_\gamma\equiv z_\beta,\ j=\overline{1,l},\ \gamma=\overline{1,n-l}),$$

$$p^1=(p_0,p_j)^*,\ p=(p_j)^*,\ p_0=\frac{\partial V}{\partial t},\ p_j=\frac{\partial V}{\partial y_j}\ \ (a_ib_i\equiv\sum_{i=1}^N a_ib_i\equiv a\cdot b,\ i=\overline{1,N}).$$

Допустим, что существует открытое множество $\{V(t,y,a)\}$ непрерывных функций V на $R\times P$; $|p^1|<\infty$, $V(t,y,a)\subset C_1$ на $R^0\times P$, все элементы которого имеют свойства

$$V_1(y,a)\leqslant V(t,y,a)\leqslant$$

$$\leqslant V_2(y,a)\ (V_{1,2}(0,a)\equiv 0,\ V_{1,2}>0,\ y\neq 0,\ V_{1,2}\subset C \text{ на } R\times P),\tag{1.7}$$

$$0\geqslant B[V,u^1],\ B[V,u^1]\leqslant B[V,u]\ (u,u^1\in\Omega,\ u^1=u^1(t,\xi,p,a)\subset C \text{ на } R^0\times P),$$

$$L(t,\xi,u_1,a)\geqslant$$
$$\geqslant w(y,a)\,(u_1(t,\xi,a)\equiv u^1(t,\xi,p(t,y,a),a);\ w>0,\ y\neq 0,\ w\subset C(R\times P)).$$

Если $R^0\times P$ — нормальная по V область, то функция $u^1(t,\xi,p,a)\subset C$, $u^1\in\Omega$ и однозначна. Введем это условие в определение класса $\{V\}$.

Из (1.5)—(1.7) для $\forall a\in P$ и $\forall V\in\{V\}$ на основании результатов [3–6] находим, что существует цилиндр $C(a):|y|\leqslant\delta,\ \delta=\delta(a)=\mathrm{const}$ в R^0, где выполняются соотношения

$$I_*+V(t,y,a)\leqslant S(t,\xi,a)\leqslant I^*+V(t,y,a)\equiv \overset{1}{I_1}(|V-S|\leqslant|I_*|),\qquad(1.8)$$
$$S(t,\xi,a)=\min_{u\in\Omega}I(u\,|\,t,\xi,a),\ V(t,y,a)=\min_{u\in\Omega}I_1[V]\ \ (u\in\{u\},\ I_1[V]\equiv I_1),$$
$$I_*\equiv\int_t^{t_1}b(\tau,\xi^0(\tau),a)\,d\tau,\ \ I^*\equiv\int_t^{t_1^1}b(\tau,\xi^1(\tau),a)\,d\tau\ \ (I_*\leqslant I^*\leqslant 0),$$
$$\overset{1}{I_1}\equiv\int_t^{t_1^1}L(\tau,\xi^1,u_1,a)\,d\tau,\ I_1\equiv\int_t^{t_1^1}L(\tau,\xi,u,a)\,d\tau-\int_t^{t_1^1}b(\tau,\xi,a)\,d\tau,$$
$$b(\tau,\xi,a)\equiv B[V,u_1(t,\xi,a)]\leqslant 0,\ V_1\geqslant S_1,\ V_2\geqslant S_2,$$
$$S_1(y,a)\leqslant S(t,\xi,a)\leqslant V(t,y,a)\leqslant V_2(y,a)\ \ (t,\xi\in C(a)),$$

$t_1,\ \overset{1}{t_1}$ — первые моменты примыкания $0=y^0(t_1)=y^1(\overset{1}{t_1})$ траекторий (1.4) $\xi^0(t)$, $\xi^1(t)$, порожденных соответственно регуляторами u_0, u_1.

Неравенства (1.8) означают, что произведенный V-функцией вектор $u_1(t,\xi,a)$, оптимальный по $I_1=I_1[V]$ регулятор y-стабилизации, является субоптимальным регулятором системы (1.4) в $C(a)$. С учетом соотношений (1.3), аналогично [4, 6], получаем, что $\underset{0}{u^0}(q,a)\equiv\equiv u_0(t,\xi(q,a),a)$ и $\underset{1}{u^0}(q,a)\equiv u_1(t,\xi(q,a),a)$ — соответственно оптимальный и субоптимальный по (1.2), минимизирующий $I_1'\equiv\equiv I_1(u\,|\,t,\xi(q,a),a)$, регуляторы исходной задачи в цилиндре $C'(a):y(q,a)\neq 0,\ |x_1|\leqslant\delta'(a),\ \delta'=\delta^1(\delta,a)=\mathrm{const}$. При этом $\inf\limits_{a\in P}I'$ не зависит от a. u_1, $\underset{1}{u^0}$ — оптимальные по I_1, I_1' в $C(a)$, $C'(a)$ регуляторы y-стабилизации. Рассмотрим функционал

$$I_0[V]=\int_{\omega_0}f(V,p^1,t,\xi,a)\,d\omega\ (f\subset C_1\ \text{на}\ \omega_0\times P,\ \text{где область}\ \omega_0\subseteq R^0),\qquad(1.9)$$

определенный и дифференцируемый на $\{V\}$, $\forall a\in P$, где $\|V\|=\sup|V|+\sup|p^1|$ на $\omega_0\subseteq R^0$. Для достаточно гладкой невязки B положим $f=f_0\equiv B[V,u^1]$. Тогда из условия максимума (1.9) при $V^*\in\{V\}$ $(B\leqslant 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial\Phi}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial\Theta_0}\right)-\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial\Theta_\alpha}\right)=0\ \ \left(\Theta_0\equiv\frac{\partial\Phi}{\partial t},\ \Theta_\alpha\equiv\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_\alpha}\ \text{на}\ \omega_0\times P\right)$$

для определения V^* получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B^1}{\partial p_0}\right)-\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial B^1}{\partial p_j}\right)=0\ \ \left(p_0=\frac{\partial V}{\partial t},\ p=\frac{\partial V}{\partial y}\right),\qquad(1.10)$$

где $B^1(t,\xi,p^1,a)\equiv B[V,u^1(t,\xi,p,a)]$ на $\omega_0\times P(\alpha=\overline{1,n};\ \ j=\overline{1,l})$. Если $\{V\}\ni V^*$ — единственное решение (1.10), то максимум (1.9) достигается лишь при $V\equiv V^*$ в случае $I_0[V^*]\geqslant I_0[V]$. Функцию V^*, максимизирующую (1.9), минимизируем на P либо из условия близости

$V^*(t, y(q,a), a)$ к $\inf I'$ в точке $\mathrm{const} = q_0 \in C'(a)$, либо в смысле некоторой меры близости на Q-области $(Q \subseteq R')$. Если класс $\{V\}$ — полный для (1.9) и нет максимизирующей $V^* \in \{V\}$, то максимизирующая последовательность $V_n \in \{V\}$ для I_0 строится по методу Ритца. Пусть система $[V(t,y,a)] \neq \varnothing$ и не образует класса $\{V\}$. Для ее элементов выбор параметра $a \in P$ подчиним либо условию максимума $I_0(a)$, либо условиям a-экстремальности величин, рассматриваемых в п. 2. Экстремальные значения a^0 вектора $a \in P$ для этих функций $f(a)$ будут f-оптимальными параметрами нелинейной агрегации (1.3), которые удовлетворяют уравнению $\partial f/\partial a^0 = 0$.

2. Рассмотрим вариант агрегации, где элиминация z в (1.4) производится оператором вида max по z. Предполагается условие

$$|z(t)| \leqslant n' = \mathrm{const} \text{ при } |z(t_0)| \leqslant n_1 \leqslant n',\ y(t_0) \in U,\ |t_0| < \infty,\ u = u^1(t, \xi, p, a), \tag{2.1}$$

где $V = V^0(t,y,a)$, $p = \partial V^0/\partial y$, u^1 удовлетворяют неравенствам (1.7) в $N: |t| < \infty,\ y \in U,\ |z| \leqslant n'$ $(N^0 = N \backslash y = 0)$. Этот вариант практически связан с системами (1.1), у которых компонента $z = (x_\beta)^*$ ограничена в силу геометрических связей или устойчива при $\forall u \in \{x\}$ по Лагранжу, а также, когда $z(t)$ измерима и ограничена при неизвестной $\dot{z}$.

Пусть для $\forall a \in P$ существуют $V^0(t,y,a)$ и $u^1(t,\xi,p,a)$, удовлетворяющие в N^0 условиям (1.7) и неравенству

$$\max_{|z| \leqslant n'} B[V^0, u^1] \equiv b^*(t,y,a) \leqslant 0 \text{ на } N^0(u^1(t,\xi,p,a) \subset C). \tag{2.2}$$

Из (1.7), (2.1), (2.2), аналогично п. 1, заключаем, что $\Omega \ni u_1(t,\xi,a) \equiv$ $\equiv u^1(t,\xi,p,a)$ — регулятор y-стабилизации системы (1.4), оптимальный по функционалу $I_1[V^0]$ в области $n^0(a)$ вида

$$n^0(a): |t_0| < \infty,\ 0 < |y_0| \leqslant \delta^0(a) = \mathrm{const},\ |z_0| \leqslant n_1, \tag{2.3}$$

$$I_1[V^0] = \int_t^{t_1} (L(\tau,\xi,u,a) - B[V^0,u^1])\,d\tau \quad (V^0 = \min_{\{u\}\in\Omega} I_1[V^0]),$$

где $\delta^0 > 0$ находим [3, 4] по методу Ляпунова. Для субоптимального регулятора u_1 системы (1.4) получаем неравенство

$$\inf_{\{u\}\in\Omega} I(u\,|\,t,\xi,a) \leqslant \int_t^{t_1} L(\tau,\xi,u_1,a)\,d\tau \equiv I_1^0 \text{ на } n^0 \times P. \tag{2.4}$$

В отличие от п. 1 решение оптимальной задачи в виде S здесь не предполагается, единственность u^1 не требуется. Класс $\{V\}$ не вводится, условие $B[V^0,u^1] \leqslant 0$ следует из (2.2). При $a = 0$, $b^* \equiv 0$ из (2.3), (2.4) для y-автономных систем (1.1), (1.2) получаем известные [5] результаты. Цилиндру $n^0(a)$ в переменных t, x соответствует область $n_1^0(a)$ оптимальной управляемости $|t| < \infty$, $y(t,x,a) \neq 0$ $|x_1| \leqslant \delta_1^0(a) =$ $= \mathrm{const}$, $|x_\beta| \leqslant n_1$ $(\beta = l+1,\ l+2,\ \ldots,\ n)$. Число $\delta_1^0 = \delta_1^0(a,\delta^0) > 0$ и вид $u_1^0(q,a) \equiv u_1(t,\xi(q,a),a)$ находим, обращая (1.3). Для известного решения $V = V^0(t,y,a)$, $u^1[V^0] = u_1(t,\xi,a)$ задачи субоптимальной по системе (1.4) y-стабилизации подчиним выбор параметра агрегации в (1.3) условиям задач оптимизации по $a \in P$. Примем для простоты, что $\bigcap_{a\in P} n^0(a)$ содержит цилиндр $C^0: |t| < \infty,\ 0 < |y_0| \leqslant c^0 =$ $= \mathrm{const},\ |z| \leqslant n_1$. Заметим, что $\forall u_1(t,\xi,a)$ приводит любую $\xi_0 \in C^0$ в нуль за бесконечное или конечное время $t_1(t_0,\xi_0,a) - t_0$. Оба случая трактуются совместно в практически достаточном варианте достижения поверхности $\Phi \equiv V(t, y, a_*) - \varepsilon = 0$. Здесь $0 < \mathrm{const} = \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, $\sup\limits_{|y| \leqslant \varepsilon_1} V_2(y, a_*) \ll \inf\limits_{|y| = C^0} V_1(y, a_*)$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(c^0) = \mathrm{const}$, a_* — оптимальное значение параметра следующей задачи.

Для точки $t, \xi \in C^0 (V_1(y) > \varepsilon \to \Phi > 0)$ требуется найти необходимые условия минимума по $a \in P$ функционала

$$I_1^*(a) = \int\limits_t^{t_1^*} L(t, \xi, u_1(t, \xi, a), a)\, d\tau \quad (\Phi(t_1^*, y(t_1^*), a_*, \varepsilon) = 0), \tag{2.5}$$

где $\xi = \xi(\tau|a)$ удовлетворяет (1.4) при $u = u_1(\tau, \xi|a)$. Здесь $t_1^*(t, \xi, a, a_*, \varepsilon) = t_1^*$ — первый момент выполнения связи (2.5). С учетом (1.7), (2.4), (2.5) для разности $I_1^0(t, \xi, a), I_1^*(t, \xi, a)$ имеем оценку

$$I_1^0 - I_1^* \leqslant \varepsilon \quad \left(I_1^0 = \int\limits_t^{t_1} L(\tau, \xi, u_1, a)\, d\tau\right),$$

которая означает непрерывность интеграла $I_1^*(\varepsilon)$ по $\varepsilon \geqslant 0$ в условии (2.5). Введем для импульсов и гамильтониана обозначения

$$\lambda = (\mu_j, \nu_\gamma)^*, \quad G(t, \xi, a, \lambda) = \lambda \cdot F_1(t, \xi, a) + M(t, \xi, a), \tag{2.6}$$

$$F_1 \equiv F(t, \xi, u_1(t, \xi, a), a), \quad M \equiv L(t, \xi, u_1(t, \xi, a), a) \quad (j = \overline{1, l};\ \gamma = \overline{1, n-l}).$$

Оптимальное значение параметра a_* «минимизирует» гамильтониан на $[t, t_1^*]$

$$\int\limits_t^{t_1^*} \frac{\partial G}{\partial a_\nu^*}\, d\tau \equiv \int\limits_t^{t_1^*} \left[\lambda_*(\tau) \frac{\partial F_1}{\partial a_\nu^*} + \frac{\partial M}{\partial a_\nu^*}\right] d\tau = 0 \quad (\xi = \xi_* = \xi(\tau\,|\,a_*),\ \nu = \overline{1, m}). \tag{2.7}$$

Здесь $\xi = \xi_*(t)$, $\lambda = \lambda_*(t)$ — начальное значение решения системы

$$\dot{\xi}_* = \partial G / \partial \lambda_*, \quad \dot{\lambda}_* = -\partial G / \partial \xi_* \quad (\xi_* = \xi(\tau, a_*)) \tag{2.8}$$

с $n+1$ граничными условиями

$$\mu_j(t_1^*) = \nu_0\, \partial V / \partial y_j(t_1^*), \quad \nu_\gamma(t_1^*) = 0, \tag{2.9}$$

$$V(t_1^*, y(t_1^*), a_*) = \varepsilon \quad (t_1^* = T(t, \xi, a_*) = \mathrm{const} > t),$$

$$\mu_j(\tau) = \partial V / \partial y_{*j}(\tau), \quad \nu_\gamma(\tau) = 0, \text{ если } b(\tau, \xi, a_*) \equiv 0,$$

где постоянные

$$0 < \mathrm{const} = \nu_0 = M[t_1^*]\,(M[t_1^*] - b[t_1^*])^{-1} \leqslant 1,$$

$$M[t_1^*] = M(t_1^*, \xi_*(t_1^*), a_*), \quad b[t_1^*] = b(t_1^*, \xi_*(t_1^*), a_*)$$

имеют смысл (1.8), (2.6). Если соотношения (2.7)—(2.9) определяют единственное решение $a_* = a_*(t, \xi) \in P$ для данной точки $t, \xi \in C^0$, то абсолютный минимум (2.5) достигается лишь при $a = a_*$. Выбирая $\xi = \xi(q, a_*)$, получаем отсюда для (1.1) минимизирующее (1.2) значение параметра агрегации $a_*' = a_*(t, \xi(q, a_*))$ при $q \in n_1^0$, $\xi \in C^0$.

Выберем $q \in n_1^0$ так, чтобы $\xi \in C^0$ для любых $a \in P$. Рассмотрим мажорантную для $\inf\limits_u I'(u|q, a)$ функцию $V' \equiv V'(q, a) \equiv V^0(t, \xi(q, a), a)$. Для ее минимальности $(V'(a^0) \leqslant V'(a) a, a^0 \in P)$ необходимо, чтобы

$\partial V'/\partial a^0=0$ в точке q. Так как $V^0(a)\geqslant I_1^0(a)\geqslant I_1^*(a)$, то в общем случае имеем $a^0\neq a_*$. Следовательно, параметры, минимизирующие оценочную функцию V^0 и функционал (2.5), вообще не совпадают. Ясно, что нахождение $a^0(t,x)$ из условий стационарности V' проще определения $a_*'(t,x)$ из (2.7)—(2.9).

Для выбора V-оптимального по мере параметра a_0 агрегации будем искать минимум функции

$$f(a)=\int_{\omega_1} f_0(V'(q,a),q)\,d\omega \quad (\omega_1\subseteq n_1^1\subseteq R',\ \xi(n_1^1)\subseteq C^0).$$

Здесь f_0 — достаточно гладкая, интегрируемая на области ω_1 весовая функция от V' типа $\varrho(q)V'(q,a)$ $(\varrho(q)\geqslant 0)$.

Обсуждение. Изложенные результаты и постановку задач можно без особых изменений распространить на нелинейные по u системы вида (1.1). Кроме того, достаточно использовать условие непрерывной дифференцируемости V, S соответственно вдоль направлений $(1,F_{0j}(t,\xi,u_1,a))^*$, $(1,F_{0\alpha}(t,\xi,u_0,a))^*(j=\overline{1,l};\ \alpha=\overline{1,n})$. Преобразуя надлежащим образом выражения невязки в (1.9) и мажоранты в (2.2), получим аналогичные выводы для задач, в которых вместо $L>0$, $B[V,u_1]\leqslant 0$, $L(t,\xi,u_1,a)\geqslant W(y,a)$ достаточно требовать лишь $L\geqslant 0$, $0\leqslant W(y,a)\leqslant L(t,\xi,u_1,a)-B(u_1)$. В качестве переменных агрегации можно предложить использовать параметрические связки от известных при $u\equiv 0$ функций Ляпунова, инвариантов и медленных переменных системы (1.1). В связи с этим возникает вопрос оптимального выбора функций $y_j(q,a)$ в соотношениях (1.3) относительно критериев типа минимума $|B[V,u_1]|$, либо из условий y-автономности переменных агрегации.

3. Примеры. В качестве переменной агрегации $(l=1)$ рассмотрим скалярную функцию $y=|x_1|$ для y-автономных систем [5, 7, 8]

$$\dot{x}_1=X_1(t,x)+u,\quad \dot{x}_2=X_2(t,x)+A_2(t,x)u,$$

$$x_1=(x_\alpha)^*,\quad x_2=(x'_\gamma)^*,\quad x=(x_\alpha,x'_\gamma)^*\quad (\alpha=\overline{1,r};\ \gamma=\overline{1,n-r}),$$

$$X_1=(X'_\alpha(t,x))^*,\quad X_2=(X'_\gamma(t,x))^*,\quad X_\delta(t,0)\equiv 0,\quad A_2=\|a_{\gamma\alpha}(t,x)\|,$$

$$\dim x_1=\dim u=r,\quad |u|\leqslant M=\mathrm{const},\quad 1\leqslant r\leqslant n\quad (\delta=1,2),$$

удовлетворяющих в области $t\geqslant 0$, $|x|<\infty$ соотношениям

$$X_1\cdot\partial y/\partial x_1\equiv Y_1(y),\quad y\neq 0\quad (y\equiv|x_1|\geqslant 0), \tag{3.1}$$

$$\dot{y}=Y_1(y)+y^{-1}x_1\cdot u,\quad y\neq 0\quad (Y_1(y)<M,\ Y_1(y)\subset C,\ y\geqslant 0).$$

Критерий оптимальности x_1-стабилизации — минимум затрат комбинации

$$I_2^1=\int_0^{t_1}[f_1(y)|u|+f_2(y)]\,d\tau\,(Mf_1+f_2>0,\ Y_1f_1+f_2\geqslant 0\ \text{на}\ y\geqslant 0) \tag{3.2}$$

типа времени-топлива. Из (1.5)—(1.8) с учетом (3.1), (3.2), $a=0$ получаем известные выражения оптимального регулятора и функции Ляпунова [5, 7, 8]

$$u_2^1(x_1)=-M|x_1|^{-1}x_1,\quad \min_{|u|\leqslant M} I_2^1=V(y)=S_1=\int_0^y(Mf_1+f_2)(M-Y_1)^{-1}dy. \tag{3.3}$$

Подстановка (3.3) в (3.1) дает $\dot{y}=Y_1(y)-M$. Отсюда следует, что

$u_2^1(x_1)$ — оптимальный по (3.2) регулятор x_1-стабилизации в целом исходной механической системы.

Рассмотрим теперь ограниченную задачу стабилизации относительного равновесия гиростата [8–11], образованного корпусом и роторами, оси которых закреплены вдоль его главных центральных осей. Предполагается, что вращение гиростата не влияет на равномерное движение его центра масс по окружности $r_0 = \text{const}$ с угловой скоростью $\omega_0 = = \text{const} = \mu^{1/2} r_0^{-3/2}$ в нецентральном гравитационном поле массивного сфероида.

Уравнения возмущенного вращательного движения при стабилизации моментами u_1, u_2 от трех роторов и реактивных рулей, действующих через демпфирующий преобразователь с матрицей R, имеют в обозначениях [11] вид

$$A\omega^{\cdot} = (A\omega^1 + z^1) \times \omega^1 + 3\omega_0^2 (\sigma^1 \times G\sigma^1) + R_1 u, \tag{3.4}$$

$$z^{\cdot} = R_2 u, \quad \sigma^{\cdot} = \sigma^1 \times (\omega^1 - \omega_0 \gamma^1), \quad \gamma^{\cdot} = \gamma^1 \times \omega^1,$$

$$\omega = \omega^1 - \omega^0, \quad z = z^1 - z^0, \quad \sigma = \sigma^1 - \sigma^0, \quad \gamma = \gamma^1 - \gamma^0,$$

$$\omega^0 = (0, 0, \omega_0)^*, \quad z^0 = (0, 0, z_0)^*, \quad \sigma^0 = (1, 0, 0)^*, \quad \gamma = (0, 0, 1)^* \quad (z_0 = \text{const}),$$

$$A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, A_3) > 0, \quad G = \operatorname{diag}(G_1, G_2, G_3) > 0, \quad G - A > 0,$$

$$u = (u_s)^* = (u''_k - u'_k,\ u'_k)^*, \quad u_1 = (u'_k)^*, \quad u_2 = (u''_k)^*, \qquad (s = \overline{1, 6};\ k = \overline{1, 3}),$$

$$R = |v|\, R^0 = \left\| \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \right\|, \quad R^0 = \|\overset{0}{r}_{s\sigma}\| = \text{const}, \ \operatorname{rank} R^0 = 6 \quad (\sigma, s = \overline{1, 6}),$$

$$v^* = \|A_1(\omega_1 - \beta_1),\ A_2(\omega_2 - \beta_2),\ A_3(\omega_3 - \beta_3),\ c_1 z_1 - \beta_1,\ c_2 z_2 - \beta_2,\ c_3 z_3 - \beta_3\|,$$

$$\beta = \omega_0 \gamma, \quad c_k = \text{const} > 0, \quad \dim \sigma, \gamma, \omega, z = 3 \quad (v = l(\gamma, \omega, z \mid c_k)),$$

ω^1, z^1, σ^1, γ^1 обозначают вектор-функции возмущенного движения.

Задачей оптимальной стабилизации движения $\omega = 0$, $z = 0$, $\sigma = 0$, $\gamma = 0$ является гашение компоненты $x_1 = (x_i)^* = (\sigma_\alpha, \gamma_k, \omega_k, z_k)^*\ (\alpha = 2, 3)$ возмущения $x = (x_j)^* = (\sigma_1, x_i)^*\ (j = \overline{1, 12};\ i = \overline{2, 12})$ при условии минимума интеграла

$$I_2 = \int_0^{t_1} \lambda(v) f(w, y)\, d\tau \quad (\lambda \equiv |v|\, |R^0 v| \geqslant 0), \tag{3.5}$$

$$w \equiv |u| \leqslant M = \text{const}, \qquad f(M, y) > 0, \qquad M f(w, y) \geqslant w f(M, y),$$

$$f(w, y) \subset C \quad \text{при} \quad 0 \leqslant w \leqslant M, \quad 0 \leqslant y.$$

Здесь $y = y(x_1, c_0)$ — положительно определенный по x_1 инвариант системы (3.4) при $u \equiv 0$, содержащий положительный скалярный параметр $c_0 = \text{const}$

$$2y = \omega_0^2 B_\alpha \sigma_\alpha^2 + \omega_0^2 A_0 \gamma \cdot \gamma - 2\omega_0 A\omega \cdot \gamma + A_k \omega_k^2 - 2\omega_0 \gamma \cdot z + c_k z_k^2, \tag{3.6}$$

$$B_\alpha \equiv 3(G_\alpha - G_1), \ A_0 \equiv A_3 + z_0 \omega_0^{-1}, \ c_k = (c_0 - 3G_k - A_k)^{-1} > 0$$

при условиях, что A_k, G_k, z_0, c_0 удовлетворяет неравенствам

$$\max A_k < A_3 + z_0 \omega_0^{-1}, \ G_\alpha - G_1 > 0 \quad (\alpha = \overline{2, 3};\ k = \overline{1, 3}), \tag{3.7}$$

$$\max A_k + 3 \max G_\alpha < c_0 < A_0 + 3G_1 + \min A_k - \max A_k \quad (c_0 = \text{const}).$$

Аналогично рассмотренному примеру получаем выражения граничного регулятора и оптимальной функции

$$u_2^0 = u_2^0(\omega, z, \gamma, c_0) = -M\,|R^0 v|^{-1} R^{0*} v, \tag{3.8}$$

$$V = V(y) = S_2(x_1, c_0) = \int_0^y M^{-1} f(M, \xi)\, d\xi.$$

Переменная агрегации $y = y(x_1, c_0)$ в силу (3.4), (3.8) удовлетворяет уравнению $y^{\cdot} = -M\lambda(v) = -M|v||R^0 v| \leqslant 0$. Используя (3.6) и геометрические инварианты системы (3.4)

$$2\sigma_1 + \sigma\cdot\sigma = 0, \quad \sigma_3 + \gamma_1 + \sigma\cdot\gamma = 0, \quad 2\gamma_3 + \gamma\cdot\gamma = 0,$$

находим, что инвариантное множество (3.4) при $u = u_2{}^0$ содержит в плоскости $v = 0$ лишь восемь перманентных вращений гиростата вокруг бинормали $\gamma = \sigma \times \nu$ к плоскости его орбиты ($r^{\cdot} = r_0\omega_0\nu$)

$$\overset{1}{x_1} = (0, \ldots, 0)^*, \; \overset{1}{x_2} = (-2, 0, \ldots, 0) \; (\dim \overset{1}{x_p} = 12, \; p = \overline{1, 8}), \tag{3.9}$$

$$\overset{1}{x_3} = (-1, +1, 0, \ldots, 0)^*, \; \overset{1}{x_4} = (-1, -1, 0, \ldots, 0)^*, \; \overset{1}{x_5} = (0, 0, \delta_q)^*,$$

$$\overset{1}{x_6} = (-2, 0, \delta_q)^*, \; \overset{1}{x_7} = (-1, +1, \delta_q)^*, \; \overset{1}{x_8} = (-1, -1, \delta_q)^*,$$

$$\delta_4 = -2, \; \delta_7 = -2\omega_0, \; \delta_{10} = -2\omega_0 \overset{-1}{c_3}, \; \delta_q = 0, \; q \neq 4, 7, 10 \; (q = \overline{1, 10}).$$

Траектории системы (3.4) при $u = u_2{}^0$ примыкают к (3.9) за бесконечный промежуток времени.

Рассмотрим уравнение $y^{\cdot} = -M\lambda(v)$ в области $y(x_1, c_0) < h^0 \equiv \equiv 2 \inf y(\|x_1\|^{-1} x_1)$, где нет точек (3.9), отличных от $\overset{1}{x_1} = 0$. Из теоремы Барбашина—Красовского следует, что в этой области регулятор (3.8) реализует x_1-стабилизацию относительного равновесия гиростата, оптимальную по (3.5). При этом из первого геометрического инварианта находим либо неравенство $|\sigma_1(t) + 2| < \varepsilon$ при $t \geqslant T_1(\varepsilon)$, либо неравенство $|\sigma_1(t)| < \varepsilon$ при $t \geqslant T_2(\varepsilon)$, которые означают соответственно «зеркальную» и полную стабилизацию ($t_1 = +\infty$). В этом примере $V = V(y)$ не зависит от c_0 явно. Выбор параметра $c_0 = \mathrm{const}$ можно подчинить условию минимизации $\operatorname{tr} Q$ ($Q = \mathrm{const}$, $\overset{*}{x_1} Q x_1 = 2y$) с целью увеличения области управляемости либо минимизации $y^{\cdot}$ по c_0 с учетом последнего из условий (3.7).

Существенно отметить, что при отсутствии демпфирования ($R = \mathrm{const}$) применение регулятора $\overset{0}{u_2}$ требует рассмотрения скользящих режимов на множестве $v = 0$. При отключенных газовых рулях ($u_2 \equiv 0$) результаты примера можно модифицировать для случая управления с одним маховиком ($u_1 = w'(a_1^0, a_2^0, a_3^0)^*$, $a_k^0 = \mathrm{const}$, $k = \overline{1,3}$). В примерах используется расширенная система — объединение исходной с уравнением эволюции переменной агрегации. Сохраняя основные из рассмотренных рассуждений, этот прием нетрудно распространить на общий случай, чтобы уменьшить затруднения, связанные с получением значений $x = x(t, \xi, a)$. При этом равенства $y_j - y_j(t, x, a) = 0$ определяют ограничения на переменные расширенной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wismer, D. A., Aoki, M., Optimization methods for large-scale systems, New York, 1971, p. 191—232.
2. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 3 (1971).
3. Красовский Н. Н., В кн.: Малкин И. Г., Теория устойчивости движений, изд. 4, М., 1966.
4. Румянцев В. В., ПММ, **34**, вып. 3, 440 (1970).
5. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **26**, 37 (1977).
6. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **24**, 178 (1975).
7. Атанс М., Фалб П., Оптимальное управление, М., 1968.
8. Летов А. М., Динамика полета и управления, М., 1969.
9. Румянцев В. В., Об устойчивости стационарных движений спутников, М., 1967.
10. Крементуло В. В., ПММ, **34**, вып. 5, 965 (1970).
11. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **24**, 277 (1975).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
18/VI 1976

I. KEIS

LIIKUMISE SUBOPTIMAALSE STABILISEERIMISE ÜLESANNETE LAHENDAMISEST AGREGEERIMISMEETODIL MÕNEDE DÜNAAMILISTE SÜSTEEMIDE KORRAL

Vaadeldakse suboptimaalset sünteesi mõnedes mittelineaarsetes dünaamilistes süsteemides. Suboptimaalsed regulaatorid saadakse optimaalsete funktsioonide meetodit ja agregeerimist kasutades. Esitatakse vea ja majorantfunktsioonide parameetrilise minimeerimise meetodid. Kahe y-autonoomse süsteemi korral annavad tulemused y-optimaalse stabiliseerimise ülesannete lahendi.

I. KEIS

ON SUBOPTIMAL STABILIZATION PROBLEM SOLUTION FOR A DYNAMICAL SYSTEM VIA AGGREGATION METHOD

In the paper the suboptimal stabilization problem for a nonlinear system is considered. The suboptimal control is found on the basis of Lyapunov's direct method and dimension reduction in aggregation. Optimal aggregation parameter choice is submitted to various minimum conditions. Exact optimal solutions are obtained for two y-autonomous mechanical systems as examples.