EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1976.3.13

УДК 519.281

В. ОЛЬМАН

МИНИМАКСНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА СДВИГА УСТОЙЧИВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

V. OLMAN. STABIILSE JAOTUSE NIHKEPARAMEETRI LINEAARNE MINIMAKSHINNANG

V. OLMAN. A MINIMAX LINEAR ESTIMATOR OF LOCATION PARAMETER OF STABLE DISTRIBUTION

Рассмотрим схему независимых наблюдений

$$\mathbf{X}_i=\Theta+\mathscr{E}_i, \quad i=1, 2, \ldots, \mathrm{n}, \quad n\geqslant 1, \tag{1}$$

где $\mathbf{X}_i$, $\mathscr{E}_i$, $i=1, 2, \ldots, n$ — m-мерные ($m\geqslant 1$) случайные векторы, причем $\mathbf{X}_i$ — наблюдаемый, а Θ — m-мерный параметр сдвига. Задача оценки параметра Θ заключается в выборе m-мерной статистики $g(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)$, минимизирующей критерий

$$\sup_{\Theta\in R^m} E\{F[g(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n), \Theta]/\Theta\},$$

где $F(\cdot,\cdot)$ — функция потери. Как и в работе [1], ограничимся рассмотрением только линейных статистик, т. е.

$$g(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{T}_i\mathbf{X}_i+\mathbf{u},$$

где $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_n$ — неслучайные матрицы порядка $m\times m$, а $\mathbf{u}$ — неслучайный m-мерный вектор.

Обозначим через $\mathfrak{L}$ класс функций потери $F(\cdot,\cdot)$ таких, что $F(\mathbf{s},\mathbf{t})=L((\mathbf{s}-\mathbf{t})^{\mathrm{T}}(\mathbf{s}-\mathbf{t}))$, $\mathbf{s},\mathbf{t}\in R^m$, и функция $L(v)$, $v\in R^1$, неотрицательная и неубывающая на $[0,\infty)$. Таким образом, для функций потери из класса $\mathfrak{L}$ задача сводится к минимизации

$$\sup_{\Theta\in R^m} E\{L[(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{T}_i\mathbf{X}_i+\mathbf{u}-\Theta)^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{T}_i\mathbf{X}_i+\mathbf{u}-\Theta)]/\Theta\} \tag{2}$$

по матрицам $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_n$ и вектору $\mathbf{u}$. В дальнейшем нас будут интересовать лишь те функции из $\mathfrak{L}$, для которых критерий (2) конечен при каком-либо наборе матриц $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_n$.

Как известно [2], для квадратичной потери оптимальной по критерию (2) оценкой является выборочное среднее, т. е. $\mathbf{T}_1^0=\mathbf{T}_2^0=\ldots=\mathbf{T}_n^0=\mathbf{I}_m/n$, $\mathbf{u}^0=\mathbf{O}_m$ ($\mathbf{O}_m$ — m-мерный нулевой вектор).

Это свойство оптимальности выборочного среднего, как показано в [1], сохраняется при всех L из класса $\mathfrak{L}$ в случае одномерного устойчивого распределения помехи $\mathcal{E}_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. В настоящей статье этот факт обобщает

Теорема. *Если m-мерные* $(m \geqslant 1)$ *векторы* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ *из* (1) *обладают устойчивым симметричным распределением, т. е. характеристической функцией* $f(\mathbf{t}) = \exp\left[-c(\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{t})^{\alpha}\right]$ [3], $\mathbf{t} \in R^m$, $c > 0$, $1 > \alpha > 0$, *то минимум критерия* (2) *реализуется на выборочном среднем при любой потере* L *из класса* $\mathfrak{L}$.

Доказательство. Для матриц, минимизирующих (2), необходимо $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{T}_i = \mathbf{I}_m$, с учетом чего можно считать, что в (2) $\Theta = \mathbf{O}_m$. В силу теоремы 3 работы [1] достаточно доказать минимаксность выборочного среднего для функций

$$L_s(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leqslant s^2, \\ 1, & \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} > s^2, \quad \mathbf{x} \in R^m, \end{cases}$$

при любом $s > 0$.

Характеристическая функция случайного вектора $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{T}_i \mathbf{X}_i$ при $\Theta = \mathbf{O}_m$ есть $\exp\left[-c \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{T}_i\mathbf{t})^{\alpha}\right]$ и, следовательно, используя обратное преобразование Фурье, можем записать

$$1 - E\{L_s(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{T}_i\mathbf{X}_i + \mathbf{u})/\mathbf{O}_m\} =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{x}\in R^m:\, (\mathbf{x}+\mathbf{u})^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}+\mathbf{u}) \leqslant s^2} \Big[\int\limits_{\mathbf{t}\in R^m} \cos(\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}) \exp\big(-c\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{T}_i\mathbf{t})^{\alpha}\big)\, d\mathbf{t}\Big]\, d\mathbf{x}. \tag{3}$$

Поменяв местами интегрирование в (3) и сделав ортогональное преобразование $\mathbf{V}_{\mathbf{t}}$ над вектором $\mathbf{x}$ такое, что $\mathbf{V}_{\mathbf{t}}\mathbf{t} = (\sqrt{\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}}, 0, \ldots, 0)$, получим

$$\int\limits_{\mathbf{x}\in R^m:\, (\mathbf{x}+\mathbf{V}_{\mathbf{t}}^{\mathrm{T}}\mathbf{u})^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}+\mathbf{V}_{\mathbf{t}}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}) \leqslant s^2} \Big[\int\limits_{\mathbf{t}\in R^m} \cos(\sqrt{\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}}\, x_1) \exp\big(-c\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{T}_i\mathbf{t})^{\alpha}\big)\, d\mathbf{t}\Big]\, d\mathbf{x}.$$

Переходя к сферическим координатам

$$\begin{gathered} \mathbf{t} = r\Psi, \quad \Psi^{\mathrm{T}} = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{m-1}, \sin\theta_1 \ldots \cos\theta_{m-1}, \ldots, \cos\theta_1), \\ 0 < r < \infty, \quad 0 \leqslant \theta_{m-1} \leqslant 2\pi, \quad 0 < \theta_i < \pi, \quad i = 1, 2, \ldots, m-2, \end{gathered} \tag{4}$$

имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_N \Big[\int\limits_{\mathbf{x}\in R^m:\, (\mathbf{x}+\mathbf{V}_{\Psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{u})^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}+\mathbf{V}_{\Psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}) \leqslant s^2} & \cos(rx_1) \exp\big(-cr^{2\alpha}\sum_{i=1}^{n} (\Psi^{\mathrm{T}}\mathbf{T}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{T}_i\Psi)^{\alpha}\big) \times \\ & \times r^{m-1}\, dr\, d\mathbf{x}\Big]\, dH(\Psi), \end{aligned} \tag{5}$$

где N — m-мерная область (4), а

$$dH(\Psi) = \sin^{m-2}\theta_1 \cdot \sin^{m-3}\theta_2 \ldots \sin\theta_{m-2}\, d\theta_1 \ldots d\theta_{m-1}.$$

Матрица $\mathbf{V}_{\mathbf{t}}^{\mathrm{T}}$ в новых переменных принимает вид $\mathbf{V}_{\Psi}^{\mathrm{T}}$, так как она не зависит от переменной r. Сделав замену переменных

$$\mathbf{x} = \Big(\sum_{i=1}^{n} (\Psi^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i \Psi)^{\alpha}\Big)^{1/2\alpha} \mathbf{y}, \quad z = \Big(\sum_{i=1}^{n} (\Psi^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i \Psi)^{\alpha}\Big)^{-1/2\alpha} r,$$

преобразуем (5) к виду

$$\int_N \Big[\int\limits_{\mathbf{y} \in R^m : [\mathbf{y}(\sum_{i=1}^{n} (\Psi^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i \Psi)^{\alpha})^{1/2\alpha} + \mathbf{V}_{\Psi}^{\mathrm{T}} \mathbf{u}]^{\mathrm{T}} \times [\mathbf{y}(\sum_{i=1}^{n} (\Psi^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i \Psi)^{\alpha})^{1/2\alpha} + \mathbf{V}_{\Psi}^{\mathrm{T}} \mathbf{u}] \leqslant s^2} \Big(\int_0^{\infty} \cos(z y_1) \exp(-c z^{2\alpha}) \times z^{m-1} dz \Big) d\mathbf{y} \Big] dH(\Psi).$$

Внутренний интеграл с точностью до множителя H_m (см. лемму 1) * есть вероятность того, что m-мерный случайный вектор с устойчивой плотностью принадлежит шару с центром в $\big(\sum_{i=1}^{n} (\Psi^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i \Psi)^{\alpha}\big)^{-1/2\alpha} \mathbf{V}_{\Psi}^{\mathrm{T}} \mathbf{u}$ и радиусом $s / \big(\sum_{i=1}^{n} (\Psi^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i \Psi)^{\alpha}\big)^{1/2\alpha}$. Используя лемму 1, нетрудно убедиться, что $\mathbf{u}^0 = \mathbf{O}_m$, а из леммы 2 следует равенство

$$\min_{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{T}_i = \mathbf{I}_m} \sum_{i=1}^{n} (\Psi^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i \Psi)^{\alpha} = n^{1-2\alpha} \Psi^{\mathrm{T}} \Psi,$$

причем оно достигается при $\mathbf{T}_i^0 = \mathbf{I}_m / n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е. на матрицах, соответствующих выборочному среднему. Теорема доказана.

Приложение

Л е м м а 1. *Плотность m-мерного устойчивого симметричного распределения $P_m(\mathbf{x})$ есть функция, зависящая только от расстояния между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{O}_m$ и монотонно убывающая по этому расстоянию.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя обратное преобразование Фурье, получаем

$$P_m(\mathbf{x}) = \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^m \int_{\mathbf{t} \in R^m} \cos(\mathbf{t}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}) \exp(-c (\mathbf{t}^{\mathrm{T}} \mathbf{t})^{\alpha}) d\mathbf{t}.$$

Сделаем замену переменных $\mathbf{t} = \mathbf{V}\mathbf{s}$, $\mathbf{s}^{\mathrm{T}} = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$, где $\mathbf{V}$ — ортогональная матрица такая, что $\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} = (\sqrt{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}}, 0, \ldots, 0)$. Тогда

$$P_m(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{s} \in R^m} \cos(s_1 \sqrt{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}}) \exp(-c (\mathbf{s}^{\mathrm{T}} \mathbf{s})^{\alpha}) d\mathbf{s}. \tag{6}$$

Зависимость плотности от $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}$ очевидна, и дальше вместо $P_m(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^m$, будем писать $P_m(h)$, где $h = \sqrt{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}}$. В интеграле (6) введем сферические координаты:

$$s_m = r \sin \theta_1 \ldots \sin \theta_{m-1},$$
$$s_{m-1} = r \sin \theta_1 \ldots \cos \theta_{m-1},$$
$$\vdots$$

* Леммы и их доказательства даны в Приложении.

$$\dot{s}_1 = r\cos\theta_1,$$

откуда

$$P_m(h) = \int_0^\infty H_m\Big[\int_0^\pi \cos(rh\cos\theta_1)\, r\sin^{m-2}\theta_1\, d\theta_1\Big] r^{m-2}\exp(-cr^{2\alpha})\,dr,$$

где $H_k = 2\pi \prod_{i=2}^{k-2}\int_0^\pi (\sin\theta_i)^{k-1-i}\,d\theta_i, \quad k\geqslant 3.$

Интегрируя внутренний интеграл по частям, получаем

$$\int_0^\pi \cos(rh\cos\theta_1)\, r\sin^{m-3}\theta_1\sin\theta_1\,d\theta_1 =$$

$$= -\frac{\sin(rh\cos\theta_1)}{h}\cdot\sin^{m-3}\theta_1\Big|_0^\pi + (m-3)\int_0^\pi \frac{\sin rh\cos\theta_1}{h}\cdot\sin^{m-4}\theta_1\cos\theta_1\,d\theta_1.$$

Если $m>3$, то

$$P_k(h) = H_m\frac{m-3}{h}\Big[-\frac{d}{dh}\int_0^\infty\int_0^\pi \cos(rh\cos\theta_1)\sin^{m-4}\theta_1 r^{m-3}\exp(-cr^{2\alpha})\,d\theta_1\,dr =$$

и, следовательно,

$$= \frac{m-3}{h}\frac{H_m}{H_{m-2}}\Big[-\frac{d}{dh}P_{m-2}(h)\Big]$$

$$\frac{d}{dh}P_{m-2}(h) < 0, \quad h>0, \quad m>3.$$

Если $m=3$, то

$$P_3(h) = -\frac{1}{h}H_3\frac{d}{dh}\Big[\int_0^\infty\int_0^\pi \cos(rh\cos\theta_1)\, r\exp(-cr^{2\alpha})\,d\theta_1\,dr =$$

$$= -\frac{1}{h}H_3\frac{d}{dh}P_1(h)$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dh}P_1(h) < 0, \quad h>0,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{a}\in R^m$ $(m\geqslant 1)$, *а* $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_n, \mathbf{B}$ — *квадратные матрицы порядка* $m\times m$. *Тогда*

$$\min_{\sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i=\mathbf{B}} \sum_{i=1}^n (\mathbf{a}^T\mathbf{B}_i^T\mathbf{B}_i\mathbf{a})^\alpha = n^{1-\alpha}(\mathbf{a}^T\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{a}), \quad 1>\alpha>0,$$

т. е. минимум достигается при $\mathbf{B}_i=\mathbf{B}/n$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Доказательство проведем от противного. Пусть при наборе минимизирующих матриц $\mathbf{B}_1\neq\mathbf{B}_2$. Тогда, применяя неравенство Коши-Шварца, получаем

$$(\mathbf{a}^T\mathbf{B}_1^T\mathbf{B}_1\mathbf{a})^\alpha + (\mathbf{a}^T\mathbf{B}_2^T\mathbf{B}_2\mathbf{a})^\alpha =$$

$$= (\mathbf{a}^T\mathbf{B}_1^T\mathbf{B}_1\mathbf{a})^\alpha + (\mathbf{a}^T(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)^T(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)\mathbf{a})^\alpha \geqslant$$

$$\geqslant (\sqrt{a^T B_1^T B_1 a})^{2\alpha} + (\sqrt{a^T (B_1+B_2)^T (B_1+B_2) a} - \sqrt{a^T B_1^T B_1 a})^{2\alpha} \geqslant$$

$$\geqslant 2^{1-\alpha} (\sqrt{a^T (B_1+B_2)^T (B_1+B_2) a})^{2\alpha},$$

где последнее неравенство справедливо в силу выпуклости функции $x^{2\alpha} + (b-x)^{2\alpha}$ при $x > 0$, $b > 0$, а следовательно, при $B_{10} = B_{20} = \frac{B_1+B_2}{2}$ достигается равенство, что и доказывает лемму.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ольман В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 23, 127 (1974).
2. Barnard O. A., J. Roy. Stat. Soc., Ser. B, 25, 124 (1963).
3. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, М., 1967.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
11/XII 1975