EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 3

УДК 519.8

Л. КИВИСТИК

МЕТОД ОТСЕЧЕНИЯ ДЛЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ АЛЬТЕРНАТИВНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В настоящей статье рассматривается полностью целочисленная задача линейного программирования с дополнительными альтернативными ограничениями. Для решения таких задач используется метод отсечения. Излагается прием для построения правильных отсечений. На основе третьего алгоритма Гомори строится конечный алгоритм.

§ 1. Постановка задачи и вводные замечания

Пусть в дальнейшем B обозначает множество индексов базисных переменных, N — множество индексов небазисных переменных и пусть $B \cup N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Рассмотрим задачу: максимизировать функцию

$$x_0 \equiv a_{00} + \sum_{j \in N} a_{0j}(-x_j) \tag{1}$$

при ограничениях

$$x_i \equiv a_{i0} + \sum_{j \in N} a_{ij}(-x_j) \geqslant 0, \quad i \in B, \tag{2}$$

$$x_j \equiv -(-x_j) \geqslant 0, \qquad j \in N, \tag{3}$$

$$x_j \text{ — целое при } j \in N \tag{4}$$

и дополнительном условии, что имеется одна или несколько групп ограничений вида $(m \geqslant n)$:

$$\begin{gathered} x_{m+1} \equiv a_{m+1,0} + \sum_{j \in N} a_{m+1,j}(-x_j) \geqslant 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m+p} \equiv a_{m+p,0} + \sum_{j \in N} a_{m+p,j}(-x_j) \geqslant 0, \end{gathered} \tag{5}$$

где в каждой группе неравенств должно выполняться по меньшей мере одно (число неравенств в различных группах может быть неодинаковым).

Предполагаем, что все коэффициенты a_{ij} в выражениях (1), (2) и (5) — целые числа. Тогда из соотношений (1), (2), (4) и (5) вытекает, что и переменные x_i, где $i \notin N$, — целые, так что рассматриваемая задача полностью целочисленная. Пусть общее число переменных в задаче (1)—(5) равняется q.

Примечание. К рассматриваемым альтернативным условиям приводятся также k-кратные альтернативы, где требуется, чтобы среди p неравенств типа (5) выполнялось k неравенств ($k < p$). Легко доказать, что для этого необходимо и достаточно, чтобы в каждом подмножестве из $p-(k-1)$ неравенств выполнялось по крайней мере одно.

Область, определенная условиями (2)—(3) и альтернативными условиями типа (5), является, вообще говоря, невыпуклой и может быть даже несвязной.

Как известно [1, 2], введением дополнительных булевых переменных задача математического программирования с альтернативными условиями может быть приведена к обычной задаче целочисленного программирования. Но это связано со значительным увеличением размерностей задачи. В [1] предложен метод для решения полностью целочисленных задач линейного программирования с дополнительным условием, что искомое решение входит в заданное множество D. В случае произвольного множества в [1] применяются отсечения Данцига, что требует много шагов; в случае, когда D выпукло или его дополнение D' до E^n выпукло, строятся более сильные отсечения. В данном случае в качестве D можно было бы взять множество, заданное альтернативными условиями. Но линейность альтернативных условий позволяет получить более простой метод построения отсечений. При этом выпуклость D или D' не требуется.

§ 2. Построение правильного отсечения

Рассмотрим базисное решение системы * (2), (5):

$$x_j=0 \quad \text{при} \quad j\in N, \quad x_i=a_{i0} \quad \text{при} \quad i\notin N, \tag{6}$$

которое является, вообще говоря, псевдопланом рассматриваемой задачи. Предполагаем, что этот псевдоплан не удовлетворяет альтернативным условиям (5). Это значит, что

$$a_{m+1,0}<0, \ \ldots, \ a_{m+p,0}<0. \tag{7}$$

Но каждое допустимое решение задачи (1)—(5) (и задачи (1)—(3), (5)) удовлетворяет по крайней мере одному из неравенств (5), т. е. существует индекс $m+i\in\{m+1, \ldots, m+p\}$ такой, что при допустимом решении имеем

$$\sum_{j\in N}(-a_{m+i,j})\,x_j\geqslant -a_{m+i,0}.$$

В силу (7) и (3) отсюда находим

$$1\leqslant \sum_{j\in N}\frac{a_{m+i,j}}{a_{m+i,0}}x_j\leqslant \sum_{j\in N}\max_{1\leqslant i\leqslant p}\frac{a_{m+i,j}}{a_{m+i,0}}x_j.$$

Обозначив

$$d_j=\max_{1\leqslant i\leqslant p}\frac{a_{m+i,j}}{a_{m+i,0}}, \tag{8}$$

получим

$$\sum_{j\in N}d_jx_j\geqslant 1$$

или

$$-1+\sum_{j\in N}(-d_j)(-x_j)\geqslant 0. \tag{9}$$

---

* Если альтернативных систем больше одной, то под (5) понимается множество всех таких систем.

Неравенство (9) является правильным отсечением, так как по конструкции оно выполняется при каждом допустимом решении задачи ** (1)—(5), но не выполняется при псевдоплане, где $x_j = 0$, $j \in N$. На основе неравенства (9) можно получить новое правильное отсечение с целыми коэффициентами

$$[-1/\lambda]+\sum_{j\in N}[-d_j/\lambda](-x_j)\geqslant 0,$$

где λ — некоторое положительное число ([1], с. 192).

§ 3. Конечный алгоритм для решения поставленной задачи

Рассмотрим задачу, поставленную в § 1. Для $j = 0$ и $j \in N$ обозначим

$$A_j=(a_{0j},\ a_{1j},\ \ldots,\ a_{nj})^{\mathrm{T}}$$

и

$$\bar{A}_j=(a_{0j},\ \ldots,\ a_{nj},\ a_{n+1,j},\ \ldots,\ a_{m+1,j},\ \ldots,\ a_{m+p,j},\ \ldots,\ a_{qj})^{\mathrm{T}}, \tag{10}$$

где $a_{ij} = 0$ при $i \in N$ $(i \neq j)$ и $a_{jj} = -1$ $(j \in N)$, а знак «Т» обозначает транспонирование. Здесь $a_{n+1,j}, \ldots, a_{m+1,j}, \ldots, a_{m+p,j}, \ldots, a_{qj}$ — коэффициенты альтернативных условий типа (5) (если имеется только одна группа условий (5), то $n + 1 = m + 1$ и $q = m + p$).

Будем называть целочисленную таблицу

$$A=\underbrace{(\bar{A}_0,\ \ldots,\ \bar{A}_j,\ \ldots)}_{1+|N|\ \text{столбцов}^{***}},\quad j\in N,$$

l-нормальной ([1]), если $A_j \succ 0$ при всех $j \in N$, и допустимой, если $a_{i0} \geqslant 0$ при $i \in B$ и среди чисел каждой группы $a_{m+1,0}, \ldots, a_{m+p,0}$ имеется по крайней мере одно неотрицательное. Если таблица A одновременно l-нормальна и допустима, то базисное решение (6) — оптимально.

Для дальнейшего изложения предположим, что исходная симплексная таблица A l-нормальна, целевая функция (1) ограничена снизу на множестве допустимых решений и известна некоторая нижняя граница целевой функции a (последнюю можно определить, например, нахождением минимального значения функции (1) при условиях (2)—(3)). Тогда на основании третьего алгоритма Гомори [1, 2] с учетом модификации, предложенной в [1], получается следующий алгоритм решения задачи (1)—(5).

1. Проверяем выполнимость условия $a_{00} \geqslant a$. При положительном ответе переходим к п. 2, при отрицательном — задача неразрешима.

2. Проверяем наличие среди a_{i0}, $i \in B$, отрицательных. Если их нет, переходим к п. 3. Если имеются, выбираем первое из них, пусть это будет a_{k0}, и проверяем, есть ли среди коэффициентов a_{kj} отрицательные. Если нет— задача неразрешима. Если существуют, присваиваем $b_j := a_{kj}$ $(j = 0$ и $j \in N)$ и переходим к п. 4.

3. Проверяем наличие групп альтернативных условий (5), для которых все свободные члены отрицательные. Если их нет, базисное решение (6) оптимально. Если есть, выбираем первую такую группу и строим отсечение (9). Если все $-d_j \geqslant 0$, то альтернативные условия противоречивы и задача не имеет допустимых решений. Если имеется $-d_j < 0$, присваиваем $b_0 := -1$, $b_j := -d_j$ $(j \in N)$ и переходим к п. 4.

** Неравенство (9) является правильным отсечением также для нецелочисленной задачи (1)—(3), (5), так как при его выводе условие (4) не используется.

*** Здесь $|N|$ обозначает мощность множества N, т. е. число его элементов.

4. Определяем направляющий столбец $\bar{A}_l$ из условия

$$A_l = \operatorname{lex}\min_{b_l<0} A_j \tag{11}$$

и положительное число λ из условия

$$\lambda = \max\{-b_l, \lambda_1\}, \tag{12}$$

где λ_1 вычисляется по формуле ****

$$\lambda_1 = \min\{\mu\colon A_j + [b_j/\mu] A_l > 0 \text{ при всех } j \in N\}. \tag{13}$$

Строим новое ограничение

$$x_{q+1} = a_{q+1,0} + \sum_{j\in N} a_{q+1,j}(-x_j), \tag{14}$$

$$x_{q+1} \geqslant 0, \quad x_{q+1} \text{ — целое,}$$

где

$$a_{q+1,j} = [b_j/\lambda] \quad (j=0 \text{ и } j \in N). \tag{15}$$

Коэффициенты правой части соотношения (14) пишем снизу к таблице A, принимаем эту строку за направляющую и делаем симплексный шаг, т. е. переходим к новой таблице A^* по формулам

$$\bar{A}^*_{q+1} = \bar{A}_l, \quad \bar{A}^*_j = \bar{A}_j + a_{q+1,j}\bar{A}_l \quad (j \neq q+1). \tag{16}$$

При этом множества базисных и небазисных переменных и число переменных изменяются следующим образом:

$$B^* = B \cup \{l\}, \quad N^* = N \cup \{q+1\} \setminus \{l\}, \quad q^* = q+1.$$

После симплексного шага переходим к п. 5.

5. Матрицу A^*, множества B^*, N^* и числовую переменную q^* обозначаем теперь через A, B, N и q соответственно и принимаем за текущие. Задача опять имеет вид (1)—(5). Переходим к п. 1.

Примечание. При практическом применении алгоритма строка коэффициентов построенного отсечения после симплексного шага вычеркивается. Это гарантирует сохранение размеров симплексных таблиц.

В силу $a_{q+1,0} < 0$ и $A_l > 0$ из (16) следует, что всегда

$$A^*_0 = A_0 + a_{q+1,0} A_l \prec A_0.$$

Используя последнее неравенство, конечность изложенного алгоритма можно доказать почти так же, как конечность третьего алгоритма Гомори. Следуя рассуждениям [2], приходим к выводу, что после конечного числа шагов вектор A_0 уже не изменяется и все $a_{i0} \geqslant 0$ при $i \in B$. Легко доказать, что тогда и все альтернативные условия выполнены. В противном случае следовало бы построить отсечение (9) и после выполнения пп. 3 и 4 рассматриваемого алгоритма мы получили бы $A_0^* \prec A_0$.

§ 4. Численный пример

В качестве примера рассмотрим задачу: максимизировать линейную форму

$$x_0 \equiv 5x_1 + 6x_2 \tag{17}$$

**** Определение λ_1 по условию (13) подробно описано в [1, 2], поэтому здесь на этом не останавливаемся. По формулам (12) и (13) получается наименьшее число λ, при котором направляющий элемент $a_{q+1,l}$ или $[b_l/\lambda]$ равняется -1 и новая симплексная таблица А* является l-нормальной.

при условиях

$$x_3 \equiv 10 - 2x_1 - x_2 \geqslant 0, \tag{18}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \tag{19}$$

$$x_1,\ x_2 \text{ — целые} \tag{20}$$

и дополнительном условии, что среди следующих неравенств выполняются не менее двух:

$$\begin{aligned} x_4 &\equiv 9 - x_1 - 3x_2 \geqslant 0,\\ x_5 &\equiv 21 - 14x_1 + 4x_2 \geqslant 0,\\ x_6 &\equiv 10 + 3x_1 - 5x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Заданное альтернативное условие равносильно требованию, чтобы в каждой паре неравенств (21) выполнялось по крайней мере одно (см. примечание в § 1).

Решение примера приведено в табл. 1—7 (ведущий элемент отмечен звездочкой). Первоначальная симплексная табл. 1 не является l-нормальной, но она приводится к нужному виду после одного симп-

Таблица 1

	1	$-x_1$	$-x_2$
x_0	0	−5	−6
x_1	0	−1	0
x_2	0	0	−1
x_3	10	2	1*
x_4	9	1	3
x_5	21	14	−4
x_6	10	−3	5

Таблица 2

	1	$-x_1$	$-x_3$
x_0	60	7	6
x_1	0	−1	0
x_2	10	2	1
x_3	0	0	−1
x_4	−21	−5	−3
x_5	61	22	4
x_6	−40	−13	−5
x_7	−4	−1	−1*
	−1	$-\frac{13}{40}$	$-\frac{1}{7}$

$\lambda = 13/40$

Таблица 3

	1	$-x_1$	$-x_7$
x_0	36	1	6
x_1	0	−1	0
x_2	6	1	1
x_3	4	1	−1
x_4	−9	−2	−3
x_5	45	18	4
x_6	−20	−8	−5
x_8	−3	−1*	−1
	−1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{3}$

$\lambda = 2/5$

Таблица 4

	1	$-x_8$	$-x_7$
x_0	33	1	5
x_1	3	−1	1
x_2	3	1	0
x_3	1	1	−2
x_4	−3	−2	−1
x_5	−9	18	−14
x_6	4	−8	3
x_9	−2	−1*	−3
	−1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{14}{9}$

$\lambda = 2/3$

Таблица 5

	1	$-x_9$	$-x_7$
x_0	31	1	2
x_1	5	−1	4
x_2	1	1	−3
x_3	−1	1	−5
x_4	1	−2	5
x_5	−45	18	−68
x_6	20	−8	27
x_{10}	−1	0	−1*

$\lambda = 5$

Таблица 6

	1	$-x_9$	$-x_{10}$
x_0	29	1	2
x_1	1	−1	4
x_2	4	1	−3
x_3	4	1	−5
x_4	−4	−2	5
x_5	23	18	−68
x_6	−7	−8	27
x_{11}	−1	−1*	1
	−1	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{5}{4}$

$\lambda = 8/7$

Таблица 7

	1	$-x_{11}$	$-x_{10}$
x_0	28	1	3
x_1	2	−1	3
x_2	3	1	−2
x_3	3	1	−4
x_4	−2	−2	3
x_5	5	18	−50
x_6	1	−8	19

лексного шага. Исходной для применения алгоритма служит табл. 2. Первая строка под табл. 2—6 — строка коэффициентов ограничения (14), вторая — строка коэффициентов отсечения (9), по которой строится отсечение (14) в табл. 2—4 и 6. Под таблицами также показано соответствующее значение λ. Из табл. 7 получается оптимальное решение примера: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$, $x_4 = -2$, $x_5 = 5$, $x_6 = 1$; максимальное значение целевой функции: $x_0 = 28$.

Как геометрически легко проверить, ни область, определенная альтернативными условиями (21), ни ее дополнение не являются выпуклыми. То же самое можно сказать об области, определенной условиями (18)—(19) вместе с альтернативными условиями (21), и об ее дополнении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю., Дискретное программирование, М., 1969, с. 44—51, 166—197.
2. Ху Т., Целочисленное программирование и потоки в сетях, М., 1974, с. 300—309, 323—326.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 1/IX 1975

L. KIVISTIK

LÕIKEMEETOD ALTERNATIIVSETE LISAKITSENDUSTEGA LINEAARSETE TÄISARVULISTE PLANEERIMISÜLESANNETE JAOKS

Esitatakse lihtne võte lõikekitsenduse konstrueerimiseks juhul, kui vaadeldava ülesande alternatiivsed tingimused pole rahuldatud. Gomory III algoritmi alusel konstrueeritakse püstitatud ülesande lahendamiseks lõplik algoritm. Selle rakendamist demonstreeritakse arvulise näitega.

L. KIVISTIK

A CUTTING-PLANE METHOD FOR THE LINEAR INTEGER PROGRAMMING PROBLEM WITH ADDITIONAL ALTERNATIVE CONSTRAINTS

The author presents a simple method for generating legitimate cuts in programming problems with additional alternative linear constraints. A finite algorithm, similar to Gomory's all-integer algorithm, is obtained by an «integrization» of these cuts. A numerical example is considered.