EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1976.3.01

УДК 519.4 : 517 : 513.88

П. ОЯ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Устойчивость метода Галеркина для эволюционных уравнений уже исследована в некоторых работах [1-8]. Мы исследуем ее в условиях Лионса [9] при нормах, для которых доказана [10] сходимость приближенных решений. Разность возмущенного и невозмущенного галеркинских приближений оценим двусторонне через возмущения, нормы решений приближенных задач и наименьшие собственные значения матриц Грама, образованных из координатных элементов. Полученные оценки вытекают из того, что приближенные задачи задают равномерные изоморфизмы между пространствами решений и пространствами начальных данных. Из оценок следует необходимое и достаточное условие устойчивости, характеризующее координатную систему.

1. Обозначения и предположения

Пусть V и H — сепарабельные вещественные гильбертовы пространства, V непрерывно вложено в H и плотно в нем. Тогда

$$V \subset H \subset V',$$

где через V' обозначено пространство, двойственное к V. Если $f \in V'$ и $v \in V$, то значение функционала f на v, обозначенное через (f, v), совпадает со скалярным произведением в H в случае $f \in H$. Обозначим

$$\mathfrak{V} = L^2(0, T; V), \qquad \mathfrak{H} = L^2(0, T; H);$$

тогда

$$\mathfrak{V}' = L^2(0, T; V'), \qquad \mathfrak{V} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{V}'.$$

Пусть задано семейство непрерывных линейных операторов $A(t) \in \mathfrak{L}(V, V')$, $t \in [0, T]$. Наложим на него следующие условия [9]:

$\forall u, v \in V$ функция $t \to (A(t)u, v)$ измерима и

$$(A(t)u, v) \leqslant M \|u\|_V \|v\|_V \qquad \forall u, v \in V; \tag{1.1}$$

существует $\alpha > 0$ такое, что

$$(A(t)v, v) \geqslant \alpha \|v\|_V^2 \qquad \forall v \in V. \tag{1.2}$$

Рассмотрим задачу

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \qquad u(0) = \xi, \tag{1.3}$$

где $f \in \mathfrak{V}'$ и $\xi \in H$ — заданы, $u' = du/dt$ обозначает производную в смысле распределений. Известно (см. [9], с. 260, 268—269), что задача (1.3) имеет единственное решение и задает изоморфизм из пространства $\mathfrak{V} \cap D(d/dt; \mathfrak{V}') = \{v | v \in \mathfrak{V},\ v' \in \mathfrak{V}'\}$ на $\mathfrak{V}' \times H$. При этом пространство $\mathfrak{V} \cap D(d/dt; \mathfrak{V}')$ снабжается нормой

$$\|v\|_{\mathfrak{V} \cap D(d/dt;\, \mathfrak{V}')} = (\|v\|^2_{\mathfrak{V}} + \|v'\|^2_{\mathfrak{V}'})^{1/2}.$$

Выберем в пространстве V полную линейно независимую систему $\{w_k\}_1^\infty$ (она полна также в пространствах H и V'). Линейные оболочки систем $\{w_k\}_1^n$, снабженные нормами из V и H, обозначим через V_n и H_n, а если будем рассматривать их как пространства, двойственные к V_n, — через V_n'. Итак,

$$\|v\|_{V_n'} = \sup_{x \in V_n,\ \|x\|_V = 1} (v, x) \leqslant \|v\|_{V'}, \quad v \in V_n'.$$

Пусть P_n — ортопроектор в H, проектирующий на H_n. Оператор P_n ограничен единицей и как оператор из V' в V_n'. Расширение P_n по непрерывности на V' будем также обозначать через P_n, при этом $\|P_n\|_{V' \to V_n'} \leqslant 1$. Обозначим также

$$\mathfrak{V}_n = L^2(0; T; V_n), \quad \mathfrak{H}_n = L^2(0, T; H_n), \quad \mathfrak{V}_n' = L^2(0; T; V_n').$$

Рассмотрим еще задачу

$$u_n'(t) + P_n A(t) u_n(t) = P_n f(t), \quad u_n(0) = P_n \xi, \tag{1.4}$$

которая имеет при каждом n также единственное решение и задает (равномерный по n) изоморфизм из $\mathfrak{V}_n \cap D(d/dt; \mathfrak{V}_n')$ на $\mathfrak{V}_n' \times H_n$. В частности, величина

$$c = \sup \{ (\|v_n\|^2_{\mathfrak{V}_n'} + \|v_n'\|^2_{\mathfrak{V}_n'})^{1/2} | v_n' + P_n A v_n = f_n,\ v_n(0) = \xi_n,$$
$$\|f_n\|_{\mathfrak{V}_n'} + \|\xi_n\|_{H_n} = 1,\ n = 1, 2, \ldots \} \tag{1.5}$$

конечна. Имеют место следующие сходимости [10]:

$$(\|u_n - u\|^2_{\mathfrak{V}} + \|u_n' - P_n u'\|^2_{\mathfrak{V}_n'})^{1/2} \to 0,$$
$$\|u_n - u\|_{C([0,T];\, H)} \to 0.$$

Естественно возникает вопрос об устойчивости решения задачи (1.4) относительно малых возмущений при вычислении.

Решение $u_n(t)$ будем искать в виде

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n c_{nk}(t) w_k.$$

Задача (1.4) равносильна задаче

$$\sum_{k=1}^n (w_k, w_i) c_{nk}'(t) + \sum_{k=1}^n (A(t) w_k, w_i) c_{nk}(t) = (f(t), w_i),$$
$$\sum_{k=1}^n (w_k, w_i) c_{nk}(0) = (\xi, w_i), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Входящие сюда скалярные произведения вычисляются, как правило, с некоторыми погрешностями, т. е. вместо задачи (1.6) подлежит решению возмущенная задача

$$\sum_{k=1}^{n}((w_k, w_i)+\gamma_{ik})\tilde{c}_{nk}'(t)+\sum_{k=1}^{n}((A(t)w_k, w_i)+\alpha_{ik}(t))\tilde{c}_{nk}(t)=$$
$$=(f(t), w_i)+g_i^{(n)}(t),$$
$$\sum_{k=1}^{n}((w_k, w_i)+\gamma_{ik})\tilde{c}_{nk}(0)=(\xi, w_i)+\delta_i^{(n)},\ i=1, \ldots, n. \tag{1.7}$$

Вследствие этого получаем вместо u_n возмущенное решение

$$\tilde{u}_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\tilde{c}_{nk}(t)w_k.$$

Введем обозначения

$\Gamma_n=\{\gamma_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$ — симметричная матрица,

$\Delta_n(t)=\{\alpha_{ik}(t)\}_{i,k=1}^{n}$ — измеримая по t матрица,

$$g_n(t)=\{g_i^{(n)}(t)\}_{i=1}^{n},\qquad \delta_n=\{\delta_i^{(n)}\}_{i=1}^{n},$$

$$\Lambda_n=\{(w_i, w_k)\}_{i,k=1}^{n},\qquad M_n=\{(w_i, w_k)_{V_n'}\}_{i,k=1}^{n},\qquad N_n=\{(w_i, w_k)_V\}_{i,k=1}^{n}.$$

Матрицы и векторы будем рассматривать как операторы и элементы эвклидова пространства $\mathbf{R}^n$; соответствующий смысл придается их нормам.

2. Основные оценки

Пусть λ_n, μ_n, ν_n — наименьшие собственные значения матриц Грама Λ_n, M_n, N_n соответственно, число c определено в (1.5).

Теорема. *Пусть выполнены условия* (1.1) *и* (1.2).

1° *Если* $\|\Gamma_n\|\leqslant\dfrac{p}{\sqrt{2}\,c}\sqrt{\mu_n}\sqrt{\nu_n}\ (p<1)$, $\|\Gamma_n\|\leqslant r\lambda_n\ (r<1)$,

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\Delta_n(t)\|\leqslant\frac{q}{\sqrt{2}\,c}\nu_n\ (q<1),$$

то система (1.7) *однозначно разрешима и*

$$|||\tilde{u}_n-u_n|||\equiv(\|\tilde{u}_n-u_n\|^2_{L^2(0,T;V)}+\|\tilde{u}_n'-u_n'\|^2_{L^2(0,T;V_n')})^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{c}{1-\max\{p,q\}}\left(\frac{\|u_n'\|_{L^2(0,T;V_n')}}{\sqrt{\mu_n}\sqrt{\nu_n}}\|\Gamma_n\|+\right.$$
$$+\frac{\|u_n\|_{L^2(0,T;V_n)}}{\nu_n}\sup_{t\in[0,T]}\|\Delta_n(t)\|+\frac{1}{\sqrt{\nu_n}}\|g_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{R}^n)}+$$
$$\left.+\frac{\|u_n(0)\|_{H_n}}{(1-r)\lambda_n}\|\Gamma_n\|+\frac{1}{(1-r)\sqrt{\lambda_n}}\|\delta_n\|\right). \tag{2.1}$$

2° *Найдутся не зависящие от n положительные постоянные* $c_1, \ldots, c_5$ *такие, что:*

1) *если* $\Delta_n(t)=0,\ g_n(t)=0,\ \delta_n=0$, *то существуют* $\Gamma_n\neq 0$ *(со сколь угодно малой нормой) и* $u_n\neq 0$ *такие, что*

$$|||\tilde{u}_n-u_n|||\geqslant\frac{c_1|||u_n|||}{\sqrt{\mu_n}\sqrt{\nu_n}}\|\Gamma_n\|; \tag{2.2}$$

2) *если* $\Gamma_n=0,\ g_n(t)=0,\ \delta_n=0$, *то существуют* $\Delta_n(t)\neq 0$ *(со сколь угодно малой нормой) и* $u_n\neq 0$ *такие, что*

$$|||\tilde{u}_n-u_n|||\geqslant\frac{c_2|||u_n|||}{\nu_n}\sup_{t\in[0,T]}\|\Delta_n(t)\|; \tag{2.3}$$

3) *если* $\Delta_n(t)=0,\ g_n(t)=0,\ \delta_n=0$, *то существуют* $\Gamma_n\neq 0$ *(со сколь угодно малой нормой) и* $u_n\neq 0$ *такие, что*

$$|||\tilde{u}_n-u_n|||\geqslant\frac{c_3\|u_n(0)\|_{H_n}}{\lambda_n}\|\Gamma_n\|; \tag{2.4}$$

4) *если* $\Gamma_n=0,\ \Delta_n(t)=0,\ \delta_n=0$, *то существует* $g_n(t)\neq 0$ *такой, что*

$$|||\tilde{u}_n-u_n|||\geqslant\frac{c_4}{\sqrt{\lambda_n}}\|g_n\|_{L^2(0,T;\,\mathbf{R}^n)}; \tag{2.5}$$

5) *если* $\Gamma_n=0,\ \Delta_n(t)=0,\ g_n(t)=0$, *то существует* $\delta_n\neq 0$ *такой, что*

$$|||\tilde{u}_n-u_n|||\geqslant\frac{c_5}{\sqrt{\lambda_n}}\|\delta_n\|. \tag{2.6}$$

3° *В оценках* (2.2) *и* (2.3) *можно* $|||u_n|||$ *заменить величиной* $(\|f\|^2_{\mathfrak{B}'}+\|\xi\|^2_H)^{1/2}$, *а в* (2.4) $\|u_n(0)\|_{H_n}$ *величиной* $\|\xi\|_H$, *где* f *и* ξ *— некоторые элементы в* (1.3) *(зависящие от* n*).*

Доказательство. Введем обозначения

$$\psi_n x=((x,w_1),\ \ldots,\ (x,w_n))\qquad(x\in V_n),\qquad T_n=\Lambda_n^{-1}\psi_n.$$

Тогда $T_n x=(c_1,\ldots,c_n)\in\mathbf{R}^n$ для $x=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k w_k$, т. е. T_n является оператором отделения координат.

Возмущенная задача (1.7) принимает вид

$$\tilde{u}_n'+\psi_n^{-1}\Gamma_n T_n\tilde{u}_n'+P_nA\tilde{u}_n+\psi_n^{-1}\Delta_n T_n\tilde{u}_n=P_nf+\psi_n^{-1}g_n, \tag{2.7}$$

$$\tilde{u}_n(0)+\psi_n^{-1}\Gamma_n T_n\tilde{u}_n(0)=P_n\xi+\psi_n^{-1}\delta_n.$$

Для $h_n=\tilde{u}_n-u_n$ имеем

$$(I_n+\psi_n^{-1}\Gamma_n T_n)h_n'+(P_nA+\psi_n^{-1}\Delta_n T_n)h_n=$$

$$=\psi_n^{-1}g_n-\psi_n^{-1}\Gamma_n T_n u_n'-\psi_n^{-1}\Delta_n T_n u_n, \tag{2.8}$$

$$(I_n+\psi_n^{-1}\Gamma_n T_n)h_n(0)=\psi_n^{-1}\delta_n-\psi_n^{-1}\Gamma_n T_n u_n(0). \tag{2.9}$$

В [11] (с. 242) показано, что

$$\|\psi_n^{-1}\|_{R^n\to H_n}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}},\quad \|T_n\|_{H_n\to R^n}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Заменив H_n пространствами V_n и V_n', получим

$$\|T_n\|_{V_n\to R^n}=\frac{1}{\sqrt{\nu_n}},\quad \|T_n\|_{V_n'\to R^n}=\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}.$$

Докажем еще равенства

$$\|\psi_n^{-1}\|_{R^n\to V_n'}=\frac{1}{\sqrt{\nu_n}},\quad \|\psi_n^{-1}\|_{R^n\to V_n}=\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}.$$

Очевидно, $\psi_n^{-1}=T_n^{-1}\Lambda_n^{-1}$. Таким образом,

$$\|\psi_n^{-1}\|_{R^n\to V_n'}=\sup_{\|x\|_{R^n}=1,\ \|v\|_{V_n}=1}(T_n^{-1}\Lambda_n^{-1}x, v)=$$

$$=\sup_{\|x\|_{R^n}=1,\ \|v\|_{V_n}=1}\Big(\sum_{k=1}^{n}[\Lambda_n^{-1}x]_k w_k,\ \sum_{i=1}^{n}[T_n v]_i w_i\Big)=$$

$$=\sup_{\|x\|_{R^n}=1,\ \|v\|_{V_n}=1}(\Lambda_n^{-1}x, \Lambda_n T_n v)_{R^n}=$$

$$=\sup_{\|v\|_{V_n}=1}\|T_n v\|_{R^n}=\|T_n\|_{V_n\to R^n}=\frac{1}{\sqrt{\nu_n}}.$$

Аналогично доказывается, что и

$$\|\psi_n^{-1}\|_{R^n\to V_n}=\|T_n\|_{V_n'\to R^n}=\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}.$$

При наложенных на Γ_n ограничениях

$$\|\psi_n^{-1}\Gamma_n T_n\|_{V_n'\to V_n'}<1\quad \text{и}\quad \|\psi_n^{-1}\Gamma_n T_n\|_{H_n\to H_n}<1,$$

значит, операторы $I_n+\psi_n^{-1}\Gamma_n T_n$ обратимы в пространствах $\mathfrak{V}_n'$ и H_n. Но тогда задача (2.7), также как и система (1.7), имеет единственное решение.

По определению величины c (1.5)

$$|||h_n|||\leqslant c(\|h_n'+P_nAh_n\|_{\mathfrak{V}_n'}+\|h_n(0)\|_{H_n}).$$

Отсюда в силу (2.8), (2.9) и наложенных на Γ_n и $\Delta_n(t)$ ограничений получаем оценку (2.1).

Для доказательства (2.2) возьмем $y_n\in V_n'$ такой, что $\|y_n\|_{V_n'}=1$, $\|T_ny_n\|_{R^n}=\|T_n\|_{V_n'\to R^n}$. Выберем также $x_n\in R^n$, $\|x_n\|_{R^n}=1$, $\|\psi_n^{-1}x_n\|_{V_n'}=\|\psi_n^{-1}\|_{R^n\to V_n'}$. Нетрудно убедиться в существовании симметричной матрицы Γ_n такой, что

$$\Gamma_nT_ny_n=x_n,\quad \|\Gamma_n\|=\|x_n\|_{R^n}/\|T_ny_n\|_{R^n};$$

ее можно умножить также на сколь угодно малое положительное число. Положим $u_n(t) = c_n(t) y_n$, где $c_n(t)$ — скалярная функция такая, что

$$\|u_n'\|_{\mathfrak{V}_n'} = \|c_n'\|_{L^2(0,T)} = \|c_n\|_{L^2(0,T)} \|y_n\|_{V_n} = \|u_n\|_{\mathfrak{V}_n}.$$

Поскольку задача (1.4) задает равномерный по n изоморфизм, то $|||h_n|||$ оценима и в другом направлении, следовательно, при достаточно малой по норме Γ_n мы получим оценку (2.2).

Оценки (2.3) и (2.4) доказываются аналогично, причем Δ_n (независимая от t) строится так же, как и Γ_n.

Для доказательства (2.5) и (2.6) выберем g_n (независимый от t) и δ_n, которые реализуют нормы $\|\psi_n^{-1}\|_{\mathbf{R}^n \to V_n'}$ и $\|\psi_n^{-1}\|_{\mathbf{R}^n \to H_n}$ соответственно.

Если в (2.2), (2.3) или (2.4) u_n построено, то положим $f_n(t) = u_n'(t) + P_n A(t) u_n(t)$ и выберем $f \in \mathfrak{V}'$ (он всегда существует) такой, что $f_n = P_n f$, $\|f_n\|_{\mathfrak{V}_n'} = \|f\|_{\mathfrak{V}'}$. Положим также $\xi = u_n(0)$. Теорема доказана.

3. Устойчивость

Пусть выполнены условия (1.1) и (1.2).

Определение. Назовем метод Галеркина (1.4) для задачи (1.3) устойчивым в норме $|||\cdot|||$, если существуют положительные γ, r_1, r_2 (не зависящие от n и начальных данных f и ξ) такие, что при $\|\Gamma_n\| \leqslant r_1$ и $\sup\limits_{t \in [0,T]} \|\Delta_n(t)\| \leqslant r_2$ возмущенная задача (1.7) однозначно разрешима и справедлива оценка

$$|||\tilde{u}_n - u_n||| \leqslant \gamma \Big(\big(\|\Gamma_n\| + \sup_{t \in [0,T]} \|\Delta_n(t)\|\big) \big(\|f\|^2_{\mathfrak{V}'} + \|\xi\|^2_H\big)^{1/2} + \|g_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{R}^n)} + \|\delta_n\| \Big), \tag{3.1}$$

где u_n и $\tilde{u}_n$ — решения приближенной (1.4) и возмущенной (2.7) задач.

Следствие 1. Необходимым и достаточным условием для устойчивости метода Галеркина в норме $|||\cdot|||$ является ограниченность последовательности μ_n снизу положительным числом.

Доказательство. Из условия $\inf \mu_n > 0$ следует сильная минимальность системы $\{w_k\}$ в V'. Из этого, в свою очередь, вытекает сильная минимальность системы $\{w_k\}$ в H и V, т. е. $\lim \lambda_n > 0$ и $\lim \nu_n > 0$. Поскольку $|||u_n|||$ оценивается равномерно по n через $(\|f\|^2_{\mathfrak{V}'} + \|\xi\|^2_H)^{1/2}$, а $\|u_n(0)\|_{H_n}$ — через $\|\xi\|_H$, из утверждения 1° теоремы вытекает достаточность. Необходимость следует из (2.2) и утверждения 3°.

Следствие 2. При условии $\inf \mu_n > 0$ имеет место устойчивость в норме пространства $C([0,T];H)$, т. е. справедлива оценка типа (3.1), где норма $|||\cdot|||$ заменяется нормой $\|\cdot\|_{C([0,T];H)}$.

Пользуясь, например, теоремой вложения из [9] (с. 33), можно показать, что справедливо неравенство

$$\|v\|_{C([0,T];H_n)} \leqslant K \big(\|v\|^2_{L^2(0,T;V_n)} + \|v'\|^2_{L^2(0,T;V_n')} \big)^{1/2}$$

$$(v \in L^2(0,T;V_n),\ v' \in L^2(0,T;V_n')), \tag{3.2}$$

где K не зависит от n и v. Утверждение следствия 2 вытекает из следствия 1 и неравенства (3.2).

Следствие 3. Для координат $c_n(t) = (c_{n1}(t), \ldots, c_{nn}(t))$ и $\tilde{c}_n(t) = (\tilde{c}_{n1}(t), \ldots, \tilde{c}_{nn}(t))$ справедливы оценки

$$\|\tilde{c}_n - c_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{R}^n)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\nu_n}} \|\tilde{u}_n - u_n\|_{L^2(0,T;V_n)},$$

$$\|\tilde{c}_n{}' - c_n{}'\|_{L^2(0,T;\mathbf{R}^n)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} \|\tilde{u}_n{}' - u_n{}'\|_{L^2(0,T;V_n')},$$

$$\|\tilde{c}_n - c_n\|_{C([0,T];\mathbf{R}^n)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \|\tilde{u}_n - u_n\|_{C([0,T];H_n)}$$

(нужно лишь заметить, что $\tilde{c}_n - c_n = T_n(\tilde{u}_n - u_n)$), значит, при условии $\inf \mu_n > 0$ имеет место устойчивость координат в приведенных нормах.

Отметим, что K в неравенстве (3.2) не увеличивается с возрастанием T, поэтому, если предположить, что условия (1.1) и (1.2) выполнены для $t \in [0, \infty)$ и $f \in L^2(0, \infty; V')$, то полученные результаты можно распространить на бесконечный промежуток.

Существуют примеры, доказывающие, что из сильной минимальности системы $\{w_k\}$ в V' не следует условие $\inf \mu_n > 0$.

Оценки (2.1)—(2.6) показывают, что особое внимание следует уделять вычислению скалярных произведений (w_k, w_i). Если они вычисляются точно, то метод Галеркина будет устойчивым в норме $|||\cdot|||$ при условии $\lim \lambda_n > 0$. Такое положение имеет место, например, если $\{w_k\}$ — ортонормированная в H система.

Замечание. Предположим, что $A(t)$ — самосопряженный, положительно определенный в H оператор, область определения которого не зависит от t, и что существует сильная производная $A'(t)$. Если положить $V = H_{A(0)}$, будут выполнены условия (1.1) и (1.2). Допустим далее, что $A'(t)$ неположительна, $f \in L^2(0, T; H)$. Тогда при условии $\lim \lambda_n > 0$ (это более слабое требование, чем $\inf \mu_n > 0$) удается несколько усилить и расширить результаты работ [1–4, 6–8], где доказывается устойчивость в норме $C([0, T]; H)$. Например, устойчивость метода Галеркина устанавливается в более сильных нормах: величина

$$\Big(\int_0^T (\|h_n{}'(t)\|_H^2 + \|P_n A(t) h_n(t)\|_H^2)\,dt\Big)^{1/2} + \max_{t\in[0,T]} \|A^{1/2}(t) h_n(t)\|_H$$

оценивается сверху через все возмущения и снизу через отдельные возмущения подобно (2.1)—(2.6), значит, здесь условие $\lim \lambda_n > 0$ является и необходимым. При почти ортонормированности системы $\{w_k\}$ в H результаты работы [5] справедливы также для переменного оператора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С. Г., Численная реализация вариационных методов, М., 1966.
2. Велиев М. А., Докл. АН СССР, **157**, № 1, 16 (1964); поправка: Докл. АН СССР, **161**, № 2, 262 (1965).
3. Велиев М. А., Сиб. матем. ж., **9**, № 4, 783 (1968).
4. Велиев М. А., Дифференциальные уравнения, **5**, № 3, 479 (1969).
5. Ицик Б. Г., Соболевский П. Е., Тр. НИИ матем. ВГУ, **2**, 39 (1970).
6. Тополянский Д. Б., Запрудский Я. М., Дифференциальные уравнения и их приложения, Днепропетровск, 113 (1971).

7. Тополянский Д. Б., Запрудский Я. М., Вычислительная и прикладная математика, 18, 40 (1972).
8. Тополянский Д. Б., Запрудский Я. М., Укр. матем. ж., **26**, № 5, 621 (1974).
9. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э., Неоднородные граничные задачи и их приложения, М., 1971.
10. Вайникко Г. М., Оя П. Э., Дифференциальные уравнения, **11**, № 7, 1269 (1975).
11. Красносельский М. А. и др., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
24/XII 1975

P. OJA

GALJORKINI MEETODI STABIILSUSEST EVOLUTSIOONIVÕRRANDITE KORRAL

Uuritakse Galjorkini meetodi stabiilsust ülesande $u' + A(t)u = f(t)$, $u(0) = \xi$ lahendamisel eeldustel, mille korral J.-L. Lions on tõestanud lahendi olemasolu ja ühesuse. Selleks hinnatakse täpse ja praktilisel lahendamisel saadava ligikaudse Galjorkini lähendi vahet kahepoolselt vigade kaudu, mis tekivad Galjorkini võrrandis esinevate skalaarkorrutiste ligikaudsel arvutamisel. Galjorkini lähendi häiritust hinnatakse normides, mille korral on tõestatud meetodi koonduvus. Hinnangutest saadakse meetodi stabiilsuse tarvilik ja piisav tingimus.

P. OJA

ON STABILITY OF THE GALERKIN METHOD FOR EVOLUTION EQUATIONS

The object of the present paper is to investigate stability of the Galerkin method for the initial value problem for the evolution equation $u' + A(t)u = f(t)$, $u(0) = \xi$. The results are obtained in the case in which the existence and uniqueness of the solution is proved by J.-L. Lions. The influence of the perturbations appearing in a practical realization of the Galerkin equations, on the approximate solutions is characterized by two-way estimates in the same norms in which the convergence is proved. Necessary and sufficient conditions are given to the stability of the Galerkin method.