а подставляя во второе уравнение (19) выражение (20) вместо u'_x, получаем

$$M(v)\,v=2(u_x-v)\,m(u')\,(1-u_xv/c^2)^{-1}. \qquad (22)$$

Разделив (21) на (22), имеем

$$(1-u'^2/c^2)^{1/2}=(1-u^2/c^2)^{1/2}(1-\beta^2)^{1/2}(1-u_xv/c^2)^{-1}. \qquad (23)$$

Отсюда и из (20) следует

$$u'_y=u_y(1-\beta^2)^{1/2}(1-u_xv/c^2)^{-1}. \qquad (24)$$

6. Зная зависимость массы от скорости и формулы преобразования компонентов скорости, легко развить всю релятивистскую динамику и найти формулы преобразования всех механических величин. Переход к четырехмерному формализму очевиден. Вывод преобразований Лоренца из формул преобразования компонентов скорости тоже возможен, хотя для построения теории они не нужны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бонди Г., Относительность и здравый смысл, М., 1967.
2. Бом Д., Специальная теория относительности, М., 1967.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 6/I 1975

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 24. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1975. NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1975, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1975.3.13

УДК 539.12 : 530.145

Р. ЛИАС

О ПОЛЯРИЗАЦИОННОМ ОПЕРАТОРЕ В ДВУМЕРНОЙ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

R. LIAS. VAAKUUMI POLARISATSIOONI OPERAATORIST KAHEMOOTMELISES KVANT-ELEKTRODÜNAAMIKAS

R. LIAS. ON THE VACUUM POLARIZATION OPERATOR IN TWO-DIMENSIONAL QUANTUM ELECTRODYNAMICS

Исходя из явно калибровочно-инвариантного определения тока вычисляется и обсуждается во втором порядке теории возмущений поляризационный оператор для массивной модели.

Точно решаемые двумерные модели, в которых спинорные частицы обязательно безмассовые, неоднократно применялись при обсуждении математических и физических идей релятивистской квантовой теории поля [1–4]. Если переход от массивной модели к безмассовой происходит плавно, то последнюю можно считать хорошей основой для первой. Покажем, что в квантовой электродинамике в случае одного пространственного измерения такой плавный переход осуществляется в операторе поляризации вакуума.

Все определяющие формулы нашей модели имеют такой же вид, как в четырехмерной квантовой электродинамике. Отметим лишь существенные для дальнейшего различия.

γ-матрицы двухрядны и удовлетворяют антикоммутационным соотношениям $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1;\ g^{00} = -g^{11} = 1)$, из которых следуют специфические для двумерной модели свойства:

$$\mathrm{Sp}\,\gamma^\mu\gamma^\nu = 2g^{\mu\nu}; \quad \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = 0. \tag{1}$$

Поляризационный оператор $P_{\mu\nu}$ определяется вариационной производной

$$P_{\mu\nu}(x, x') = -e\frac{\delta\langle j_\mu(x)\rangle}{\delta\langle A^\nu(x')\rangle}, \tag{2}$$

где e — заряд (имеющий размерность массы или обратной длины), $\langle j_\mu\rangle$ — вакуумное среднее тока (канонической размерностью обратной длины), A_μ — «электромагнитное» поле (безразмерное).

Для вычисления $P_{\mu\nu}$ представим $\langle j_\mu\rangle$ в виде [1,5]

$$\langle j_\mu(x)\rangle = -i\lim_{y\to x}\mathrm{Sp}\{\gamma_\mu G(x, y)\}\exp[-ief(x, y\,|\,A)]. \tag{3}$$

Здесь $G(x, y) = -i\langle T\psi(x)\overline{\psi}(y)\rangle$ — полный пропагатор спинорного поля,

$$f(x, y\,|\,A) = \int d^2z[a_\mu(x-z) - a_\mu(y-z)]\,\langle A^\mu(z)\rangle, \tag{4}$$

где $a_\mu(x)$ — некоторые функции, на которые накладывается лишь условие

$$\partial_\mu a^\mu(x) = \delta^2(x) \tag{5}$$

($\delta^2(x)$ — двумерная δ-функция), гарантирующее инвариантность правой стороны (3) при калибровочных преобразованиях (см. четырехмерный случай в работе [5]).

С учетом формулы $\delta G/\delta\langle A^\nu\rangle = eG\Gamma_\nu G$ получим из (2), (3) во втором порядке теории возмущений

$$P_{\mu\nu}(x, x') = ie^2\lim_{y\to x}\mathrm{Sp}\{\gamma_\mu S^c(x-x')\gamma_\nu S^c(x'-y) - \\ - i\gamma_\mu S^c(x-y)[a_\nu(x-x') - a_\nu(y-x')]\}, \tag{6}$$

где

$$S^c(x) = \int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2+i0}\exp[-ipx] \tag{7}$$

— пропагатор свободного спинорного поля.

Совершим переход к импульсному представлению и устремим $y\to x$. Тогда с помощью формул (1), (5)—(7) приходим к выражениям

$$P^\mu_\mu(q^2) = P(q^2) = 4m^2e^2[I(q) - I(0)], \tag{8}$$

$$I(q) = i\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{1}{[p^2-m^2+i0][(p-q)^2-m^2+i0]}. \tag{9}$$

Интеграл $I(q)$ вычисляется стандартной дисперсионной техникой. В результате получим

$$P(q^2) = \frac{e^2}{\pi}\left\{\frac{2m^2}{q^2h(q^2)}\ln\left[\frac{h(q^2)+1}{h(q^2)-1}\right]+1\right\}, \tag{10}$$

где $h(q^2) = \sqrt{1-4m^2/q^2}$, $q^2 < 0$.

С помощью конформного преобразования

$$q^2 = -m^2 \frac{(1-z)^2}{z} \tag{11}$$

можно функцию (10) аналитически продолжить на всю верхнюю полуплоскость q^2,

$$P(z) = \frac{e^2}{\pi} \left\{ \frac{2z \ln z}{1-z^2} + 1 \right\}, \tag{12}$$

$|z| \leqslant 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Если $0 \leqslant z \leqslant 1$, то $q^2 \leqslant 0$, если $-1 \leqslant z \leqslant 0$, то $q^2 \geqslant 4m^2$, если $z = \exp(i\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, то $0 \leqslant q^2 \leqslant 4m^2$.

Формула (12) удобна для исследования различных предельных случаев.

Если $q^2 \to 0$, то $z \to 1$, и $\lim\limits_{z\to 1} P(z) = 0$, в согласии с формулой (8). Этот результат указывает на то, что фотонный пропагатор (в лоренцевой калибровке)

$$D_{\mu\nu}(q^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left[1 - \frac{P(q^2)}{q^2} \right]^{-1} \tag{13}$$

имеет полюс при $q^2 = 0$ и может быть представлен в виде

$$D_{\mu\nu}(q^2)_{/q^2 \simeq 0} \sim Z_3 g_{\mu\nu}/q^2. \tag{14}$$

Константа перенормировки Z_3 конечна и, согласно (12)—(14), в данном порядке $Z_3 = (1 + e^2/6\pi m^2)^{-1}$.

Переходу к безмассовой модели $m \to 0$ соответствует $z \to 0$ в формуле (12),

$$\lim_{z\to 0} P(z) = \frac{e^2}{\pi}, \tag{15}$$

и (13) переходит в формулу точной функции Грина векторной частицы в модели Швингера [1].

В заключение отметим две особенности рассмотренной модели.

В двумерной теории единственная расходимость соответствует диаграмме второго порядка фотонной собственной энергии. Применение калибровочно-инвариантного определения тока, явно зависящего от внешнего векторного поля $\langle A_\mu \rangle$, автоматически скомпенсирует эту расходимость (второй член в формулах (6) и (8)). Аналогичное смягчение расходимостей известно из четырехмерных теорий [6].

В модели Швингера поляризация вакуума приводит к полной компенсации заряда [1,3]. В рассмотренной массивной модели такой эффект не наблюдается (по крайней мере в теории возмущений) и ситуация более сходна с четырехмерным случаем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwinger J., Gauge theories of vector particles, Theoretical Physics, Trieste Lectures, 1962, 89—134, I.A.E.A., Vienna, 1963.
2. Hagen C. R., Nuovo Cim., **A51**, 1033—1052 (1967).
3. Lowenstein J. H., Swieca J. A., Ann. Phys. (USA), **68**, 172—195 (1971).
4. Casher A., Kogut J., Susskind L., Phys. Rev. Lett., **31**, 792—795 (1973).
5. Bechler A., Acta phys. pol., **B5**, 353—360 (1974).
6. Ferrel R. A., Am. J. Phys., **41**, 111—113 (1973).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 24/II 1975