

А. ВОЛЬДЕК, А. ИВАНОВ, В. ПРУСС-ЖУКОВСКИЙ

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВОЗДУШНОМ ЗАЗОРЕ МАШИНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА ОТ ОБМОТОК В ПОПЕРЕЧНОЙ ОСИ БЕЗ УЧЕТА ЗУБЧАТОСТИ

Вводные замечания

Создание все более мощных электрических машин с высоким использованием активных материалов, разработка специальных типов машин и совершенствование их теории вызывают необходимость строгого расчета магнитного поля в воздушном зазоре с привлечением методов теории поля и математической физики. В машине постоянного тока обмотки добавочных полюсов, якоря и компенсационная при протекании по ним тока создают поля, которые ориентированы вдоль поперечной оси. В связи с этим естественно называть их обмотками в поперечной оси. Эти поля накладываются на основное поле и искажают его, оказывая тем самым существенное влияние на работу машины. В настоящей статье производится расчет магнитных полей в воздушном зазоре от обмоток в поперечной оси. При этом используется разработанный Г. А. Гринбергом [1] метод решения уравнения Лапласа для скалярного магнитного потенциала. В [2] этот метод использован для расчета поля в области воздушного зазора и полюсного окна машины постоянного тока, создаваемого намагничивающей силой (н. с.) главных полюсов, поэтому здесь опущены промежуточные выкладки, которые во многом подобны сделанным в [2]. Приводятся лишь граничные условия для исследуемых случаев и конечные результаты.

Все допущения, принятые в [2], из которых наиболее существенными являются отсутствие насыщения, зубчатости и второго зазора между сердечником добавочного полюса и ярмом, сохраняются. Поле рассматривается в области, показанной на рис. 1. Здесь b_1 — половина ширины наконечника главного полюса, b_2 — половина ширины наконечника добавочного полюса, а δ_1 и δ_2 — зазоры под ними. Н. с. обмоток, создающих поле, принимаются равномерно распределенными в бесконечно тонком токовом слое на соответствующих поверхностях. Аналогично [2], во всех выражениях используются относительные линейные размеры, а также относительный скалярный магнитный потенциал; за базисную величину линейных размеров принята половина полюсного деления $\tau/2$.

Поле добавочного полюса

Для уменьшения потоков рассеяния обмотка полюса располагается по возможности ближе к зазору. В том случае, когда наконечник добавочного полюса не шире его сердечника, распределение н. с. по высоте

$$P_j = \frac{1-b_1}{1-b_1-b_2} \frac{8}{(2j-1)^2 \pi^2} \sin \frac{(2j-1)\pi(1-b_1-b_2)}{2(1-b_1)} + \left. \begin{aligned} & + \frac{2}{1-b_1} \sum_{m=1}^{\infty} W_m C_{m,j}, \\ & W_l = (-1)^{l-1} \frac{2(1-b_1-b_2)}{l^2 \pi^2 h} (e^{-\frac{l\pi h}{1-b_1-b_2}} - 1) + \\ & + \frac{2}{l\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2(1-b_1)} \pi \left[V_n \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi(\delta_2-\delta_1)}{2(1-b_1)}} - \right. \\ & \left. - P_n \operatorname{cth} \frac{(2n-1)\pi(\delta_2-\delta_1)}{2(1-b_1)} \right] C_{l,n}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь

$$A_{n,i} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{\frac{2n-1}{2(1-b_1)} \pi}{\left[\frac{2n-1}{2(1-b_1)} \pi \right]^2 - \left(\frac{2i-1}{2} \pi \right)^2} \sin \frac{(2i-1)\pi b_1}{2}, \quad \frac{2n-1}{2(1-b_1)} \neq \frac{2i-1}{2}, \\ & \frac{1-b_1}{2} (-1)^{n+i}, \quad \frac{2n-1}{2(1-b_1)} = \frac{2i-1}{2}, \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$C_{m,j} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{(-1)^{m-1} \frac{m\pi}{1-b_1-b_2}}{\left(\frac{m\pi}{1-b_1-b_2} \right)^2 - \left[\frac{2j-1}{2(1-b_1)} \pi \right]^2} \sin \frac{(2j-1)\pi(1-b_1-b_2)}{2(1-b_1)}, \\ & \frac{m}{1-b_1-b_2} \neq \frac{2j-1}{2(1-b_1)}, \\ & \frac{1-b_1-b_2}{2}, \quad \frac{m}{1-b_1-b_2} = \frac{2j-1}{2(1-b_1)}. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

В тех случаях, когда высота обмотки добавочного полюса h велика, а также когда наконечник полюса шире его сердечника, и обмотка находится над наконечником, влиянием распределения н.с. по высоте полюса можно пренебречь и положить $h = \infty$. При этом выражения (2)–(5) сохраняют силу, но в правой части последнего уравнения системы (3) отсутствует первый член.

Распределение магнитной индукции на поверхности якоря определяется выражением

$$B = -\mu_0 \frac{\partial U}{\partial y} |_{y=\delta_1}. \quad (6)$$

Если принять за единицу величину индукции под серединой полюса при достаточно широком наконечнике $B_m = \frac{\mu_0}{\delta_2}$, то с точностью до знака по (2) и (6) имеем

$$\frac{B}{B_m} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{B_m} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2}, \quad (7)$$

где

$$\frac{B_k}{B_m} = U_k \frac{\frac{(2k-1)\pi\delta_2}{2}}{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi\delta_1}{2}} \quad (8)$$

— амплитуды гармоник индукции.

Полагая в (3) поочередно $i, j, l = 1, 2, 3 \dots$, получим бесконечную систему уравнений. Практически здесь и далее, при исследовании полей якорной и компенсационной обмоток, число уравнений ограничивается теми же пределами, что и при решении задачи о поле главного полюса [2].

Расчеты, проведенные для выяснения влияния величины h на форму поля на поверхности якоря, показали, что это влияние слабо зависит от параметров b_1, b_2, δ_1 и δ_2 . В среднем можно принять, что при $h = 0,25, 0,5$ и $0,75$ использование решения при $h = \infty$ дает абсолютную погрешность в определении индукции соответственно 6, 3 и 2% от величины индукции под серединой полюса. Указанная максимальная погрешность имеет место в точках, близких к середине междуполюсного пространства.

Изменение величины зазора под главным полюсом δ_1 в тех пределах, которые обычно применяются на практике, существенно не влияет на распределение поля добавочного полюса. Например, сравнение вариантов при $\delta_1 = 0,02$ и $\delta_1 = 0,05$ показало, что разница в величине относительных индукций имеет место лишь в области самых малых ее значений, а максимальная величина этой разницы не превышает 1,5% от величины индукции под серединой полюса.

Кривые распределения индукции поля добавочного полюса для ряда параметров b_1, b_2 и δ_2 при $h = \infty$ показаны на рис. 2, а, б. Рис. 2, а соответствует случаю $\delta_2 = 0,06$, а рис. 2, б — случаю $b_1 = 0,70, b_2 = 0,10$. Здесь и далее начало оси x соответствует рис. 1.

Величины относительных амплитуд гармоник индукции (8) в зависимости от b_2 и δ_2 могут быть приближенно рассчитаны по выражению

$$\frac{B_k}{B_m} = (-1)^{k-1} \frac{B_{km}}{B_m} \sin \left(\frac{2k-1}{2} \pi b_1 + \xi_k \right). \quad (9)$$

При $b_1 = 0,70$ и $h = \infty$ величины $\frac{B_{km}}{B_m}$ и $\frac{\xi_k}{\pi}$ в зависимости от k и δ_2 могут быть найдены по рис. 3 и 4 соответственно. При $k \leq 4$ выражение (9) дает практически точный результат, но с увеличением k погрешность возрастает. При изменении b_2 в пределах $(0,07 \div 0,13)$ эта погрешность не превышает 10% от $\frac{B_{km}}{B_m}$.

Поле обмотки якоря

Предположим, что щетки расположены на геометрической нейтральной линии, а линейная нагрузка A в пределах коммутационной зоны $2b_k$ изменяется по линейному закону. Скалярный магнитный потенциал поверх-

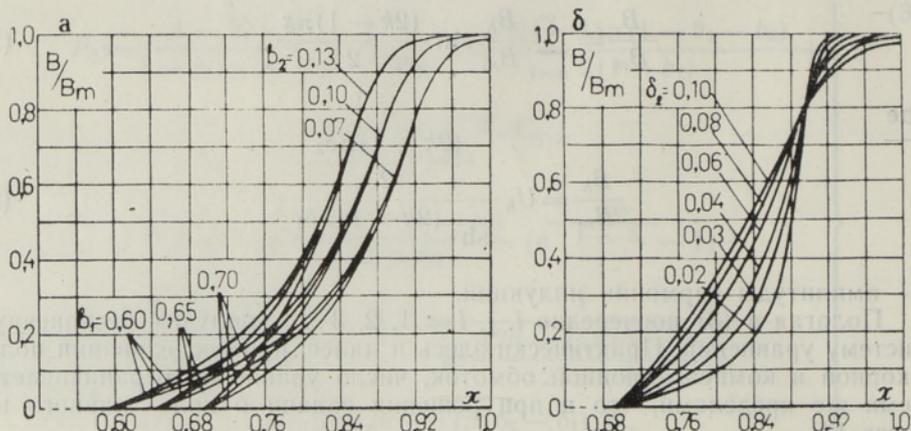


Рис. 2. Относительная магнитная индукция поля добавочного полюса на поверхности якоря.

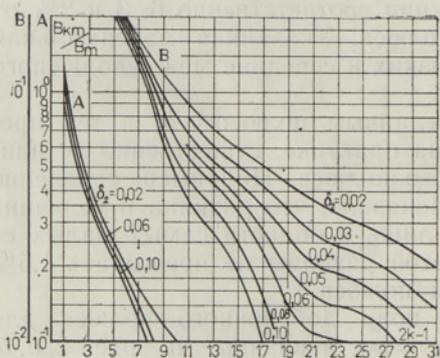


Рис. 3. Зависимость $\frac{B_{km}}{B_m}$ от порядка гармоники при разных величинах зазора.

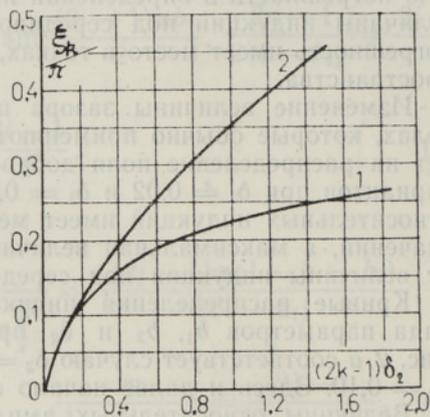


Рис. 4. Зависимость $\frac{\xi_k}{\pi}$ от порядка гармоники и величины зазора: 1 — для всех k , кроме $k = 6, 7, 8$; 2 — для $k = 6, 7, 8$.

ности якоря в зависимости от координаты x определяется выражением

$$U(x) = \int_0^x A dx.$$

За базисное значение потенциала примем величину $A\tau/2$. В этом случае для поля действительны граничные условия:

$$\begin{aligned} U|_{y=-\delta_1} &= x, & 0 \leq x \leq 1 - b_k, \\ U|_{y=-\delta_1} &= \frac{2x - x^2 - (1 - b_k)^2}{2b_k}, & 1 - b_k \leq x \leq 1, \\ U|_{x=0} &= 0, & -\delta_1 \leq y \leq 0, \\ U|_{y=0} &= 0, & 0 \leq x \leq b_1, \\ U|_{x=b_1} &= 0, & 0 \leq y \leq \infty, \\ U|_{y=\infty} &= 0, & b_1 \leq x \leq 1 - b_2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 U_{/x=1-b_2} &= 0, & \delta_2 - \delta_1 \leq y \leq \infty, \\
 U_{/y=\delta_2-\delta_1} &= 0, & 1 - b_2 \leq x \leq 1, \\
 \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=1} &= 0, & -\delta_1 \leq y \leq \delta_2 - \delta_1.
 \end{aligned}$$

Выражение для потенциала при $-\delta_1 \leq y \leq 0$ имеет вид

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi(y+\delta_1)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi\delta_1}{2}} \quad (11)$$

$$+ 16(-1)^{k-1} \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi b_K}{2}}{(2k-1)^3 \pi^3 b_K} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi y}{2}}{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi\delta_1}{2}} \left. \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2} \right\}$$

причем коэффициенты U_k находятся из решения системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 U_i &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} V_n A_{n,i}, \\
 V_j &= P_j \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2j-1)\pi(\delta_2-\delta_1)}{2(1-b_1)}} - \frac{4}{(2j-1)\pi} \operatorname{th} \frac{(2j-1)\pi(\delta_2-\delta_1)}{2(1-b_1)} \times \\
 &\times \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2k-1}{2} \pi U_k \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi\delta_1}{2} - \frac{8(-1)^{k-1} \sin \frac{(2k-1)\pi b_K}{2}}{(2k-1)^2 \pi^2 b_K \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi\delta_1}{2}} \right] A_{j,k}, \\
 P_j &= \frac{2}{1-b_1} \sum_{m=1}^{\infty} W_m C_{m,j}, \\
 W_l &= \frac{2}{l\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2(1-b_1)} \pi \left[V_n \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi(\delta_2-\delta_1)}{2(1-b_1)}} - \right. \\
 &\left. - P_n \operatorname{cth} \frac{(2n-1)\pi(\delta_2-\delta_1)}{2(1-b_1)} \right] C_{l,n}.
 \end{aligned} \right\} (12)$$

Здесь $A_{n,i}$ и $C_{m,j}$ рассчитываются также по (4) и (5).

Примем за единицу магнитной индукции $B_m = \frac{\mu_0}{\delta_1}$. Тогда согласно (6) и (11) относительные величины индукции поля якоря получаются по (7), в котором амплитуды гармоник индукции определяются из выражения

$$\frac{B_k}{B_m} = -U_k \frac{\frac{(2k-1)\pi\delta_1}{2}}{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi\delta_1}{2}} + \frac{8(-1)^{k-1} \delta_1 \sin \frac{(2k-1)\pi b_K}{2}}{(2k-1)^2 \pi^2 b_K} \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi\delta_1}{2}. \quad (13)$$

На рис. 5, а, б изображены кривые относительной индукции для ряда параметров b_1 , b_2 , δ_1 и δ_2 , рассчитанные по приведенным выражениям. При расчетах во всех случаях полагалось $b_{\text{к}} = b_2 + \delta_2$. Рис. 5, а соответствует случаю $b_2 = 0,10$, $\delta_2 = 0,06$, а рис. 5, б — случаю $b_1 = 0,70$, $\delta_1 = 0,02$.

Поле компенсационной обмотки

Также, как и в задаче о поле якоря, за базисное значение потенциала принимается величина $A\tau/2$. В данном случае действительны следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} U/y=-\delta_1 &= 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ U/x=0 &= 0, & -\delta_1 \leq y \leq 0, \\ U/y=0 &= x, & 0 \leq x \leq b_1, \\ U/x=b_1 &= b_1, & 0 \leq y \leq \infty, \\ U/y=\infty &= b_1, & b_1 \leq x \leq 1 - b_2, \\ U/x=1-b_2 &= b_1, & \delta_2 - \delta_1 \leq y \leq \infty, \\ U/y=\delta_2-\delta_1 &= b_1, & 1 - b_2 \leq x \leq 1, \\ \frac{\partial U}{\partial x} /_{x=1} &= 0, & -\delta_1 \leq y \leq \delta_2 - \delta_1. \end{aligned} \right\} (14)$$

Магнитный потенциал при $-\delta_1 \leq y \leq 0$ описывается выражением (2), в котором коэффициенты U_k определяются системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} U_i &= -\frac{8}{(2i-1)^2 \pi^2} \sin \frac{(2i-1)\pi b_1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} V_n A_{n,i}, \\ V_j &= P_j \frac{1}{\text{ch} \frac{(2j-1)\pi(\delta_2-\delta_1)}{2(1-b_1)}} - \\ & - \frac{4}{(2j-1)\pi} \text{th} \frac{(2j-1)\pi(\delta_2-\delta_1)}{2(1-b_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2} \pi U_k \text{cth} \frac{(2k-1)\pi\delta_1}{2} A_{j,k}, \\ P_j &= \frac{2}{1-b_1} \sum_{m=1}^{\infty} W_m C_{m,j}, \\ W_l &= \frac{2}{l\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2(1-b_1)} \pi \left[V_n \frac{1}{\text{sh} \frac{(2n-1)\pi(\delta_2-\delta_1)}{2(1-b_1)}} - \right. \\ & \left. - P_n \text{cth} \frac{(2n-1)\pi(\delta_2-\delta_1)}{2(1-b_1)} \right] C_{l,n}, \end{aligned} \right\} (15)$$

где $A_{n,i}$ и $C_{m,j}$ находятся по (4) и (5).

За единицу индукции вновь принимается $B_m = \frac{\mu_0}{\delta_1}$. При этом относительная величина магнитной индукции поля компенсационной обмотки будет определяться также по (7), где

$$\frac{B_k}{B_m} = U_k \frac{\frac{(2k-1)\pi\delta_1}{2}}{\text{sh} \frac{(2k-1)\pi\delta_1}{2}}. \quad (16)$$

Исходя из полученных выражений были рассчитаны кривые распределения индукции на поверхности якоря для ряда параметров b_1 , b_2 , δ_1 и δ_2 . Эти кривые по своему характеру схожи с соответствующими

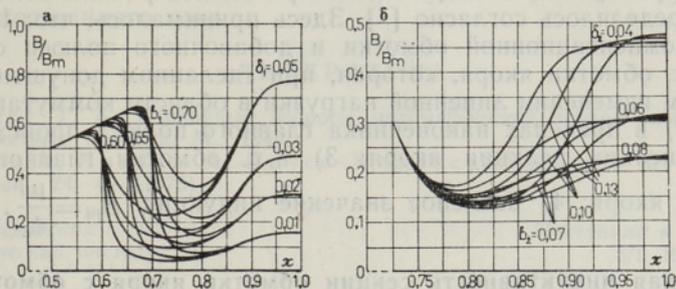


Рис. 5. Относительная магнитная индукция поля якоря на поверхности якоря.

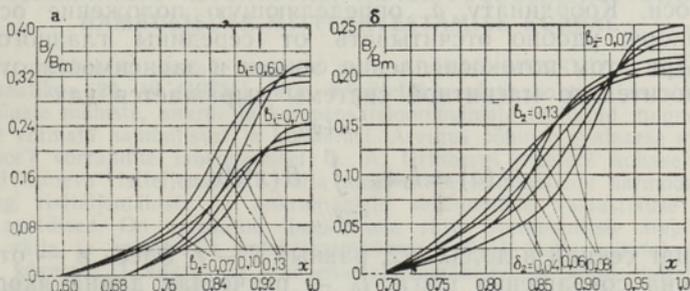


Рис. 6. Относительная магнитная индукция на поверхности якоря при совместном действии якорной и компенсационной обмоток.

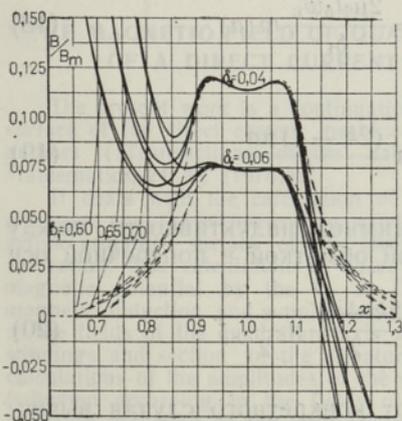


Рис. 7. Относительная магнитная индукция результирующего поля на поверхности якоря при действии: всех обмоток в поперечной оси (пунктирная линия), всех обмоток (сплошная линия).

кривыми для поля якоря. Чтобы наглядно показать различие между ними, на рис. 6, а, б нанесены кривые индукции поля при совместном действии якорной и компенсационной обмоток с учетом их встречного включения.

При построении графиков рис. 6, во-первых, предполагалось равенство линейных нагрузок якорной и компенсационной обмоток и, во-вторых, за единицу индукции принималась величина $B_m = \frac{\mu_0}{\delta_2}$. Как показали расчеты, изменение δ_1 практически не влияет на величину этой остаточной индукции. Рис. 6, а соответствует случаю $\delta_2 = 0,06$, а рис. 6, б — случаю $b_1 = 0,70$.

При совместном питании всех обмоток в силу допущения о линейности магнитопровода может быть применен метод наложения. На рис. 7 построены кривые результирующего поля в междуполюсном пространстве при $b_2 = 0,10$ и $\delta_1 = 0,02$. При их построении поле главного полюса определялось согласно [2]. Здесь принималось, что: 1) суммарная н. с. компенсационной обмотки и добавочного полюса составляет 1,25 от н. с. обмотки якоря, которая, при сделанном допущении о прямолинейном изменении линейной нагрузки в области коммутации, равна $1 - b_k/2$; 2) в пределах наконечника главного полюса происходит полная компенсация реакции якоря; 3) н. с. обмотки главного полюса равна н. с. якоря; 4) базисное значение индукции $B_m = \frac{\mu_0}{\delta_2}$.

Взаимная индуктивность секции обмотки якоря с обмотками в поперечной оси

Найденные выражения для индукций позволяют легко рассчитать взаимные индуктивности секции обмотки якоря со всеми обмотками в поперечной оси. Координату a , определяющую положение оси секции обмотки якоря, удобно отсчитывать от середины главного полюса (рис. 1). При этом потокоцепление секции в зависимости от ее положения относительно магнитной системы выражается как

$$\Psi(a) = l_\delta \omega_K \int_{a-y_{1/2}}^{a+y_{1/2}} B(x) dx, \quad (17)$$

где y_1 — шаг секции в долях $\tau/2$, равный $2 - \varepsilon$. Здесь ε — относительная величина сокращения шага, l_δ — расчетная длина якоря, ω_K — число витков секции.

По (7) и (17) с точностью до знака имеем

$$\Psi(a) = \frac{\mu_0 l_\delta \omega_K}{\delta_1} \int_{a-1+\frac{\varepsilon}{2}}^{a+1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{B}{B_m} dx = \frac{2\mu_0 l_\delta \omega_K}{\delta_1} m(a), \quad (18)$$

где

$$m(a) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} m_k \sin \frac{(2k-1)\pi a}{2}. \quad (19)$$

— относительная удельная величина взаимной индуктивности между секцией обмотки якоря и рассматриваемой обмоткой в поперечной оси машины и

$$m_k = \frac{2}{(2k-1)\pi} \frac{B_k}{B_m} \cos \frac{2k-1}{2} \pi \frac{\varepsilon}{2}. \quad (20)$$

Величины $\frac{B_k}{B_m}$ здесь в зависимости от конкретного случая вычисляются по (8), (13) или (16).

Заключение

Настоящая работа является продолжением [2] и совместно с [2] позволяет рассчитывать амплитуды гармоник индукции на поверхности якоря при питании всех обмоток машины постоянного тока, а также

магнитные проводимости и взаимондуктивности всех контуров машины с секцией обмотки якоря в зависимости от угла поворота ротора. Таким образом, обе эти работы в совокупности дают возможность более точного расчета электромагнитных и электромеханических процессов в машинах постоянного тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А., Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, М., 1948.
2. Вольдек А., Иванов А., Прусс-Жуковский В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 24, 49 (1975).

Ленинградский
политехнический институт

Поступила в редакцию
3/1 1975

A. VOLDEK, A. IVANOV, V. PRUSS-ZUKOVSKI

RISTTELJEMÄHISTE MAGNETVÄLI ALALISVOOLUMASINA ÖHUPILUS HAMBULISUSE MITTEARVESTAMISE KORRAL

Käesolev artikkel on samade autorite eelmise artikli («ENSV TA Toimetised. Füüsika. Matemaatika», 24, 49 (1975)) järg. Käsitletakse alalisvoolumasina ristteljemähiste, s. o. lisapooluste mähiste, ankru- ja kompensatsioonimähiste tekitatud magnetvälja arvutust, arvesse võtmata hambulisust ja küllastust. Arvutus põhineb skalaarse magnetpotentsiaali Laplace'i võrrandite lahendamisel G. A. Grinbergi meetodi kohaselt. Esitatakse ankru pinnal esineva ristteljemähiste välja magnetilise induktsiooni harmooniliste amplituudide ning ristteljemähiste ja ankrumähiste sektsioonide vastastikuse induktsiooni arvutamise avaldised. On arvutatud lisapooluste välja harmooniliste amplituudid ning lisapooluste välja ja ankruvälja induktsioonikõverad. Peale selle esitatakse summaarse induktsiooni kõverad 1) ankru- ja kompensatsioonimähiste, 2) kõigi ristteljemähiste ja 3) kõigi mähiste (kaasa arvatud peapooluse mähis) ühise toite korral. Saadud tulemused võimaldavad täpsemalt analüüsida alalisvoolumasinate esinevaid elektromagnetilisi ja elektromehaanilisi protsesse.

A. VOLDEK, A. IVANOV, V. PRUSS-ZHUKOVSKY

THE MAGNETIC FIELD OF QUADRATURE AXIS WINDINGS IN THE AIR GAP OF A DIRECT CURRENT MACHINE NEGLECTING THE SLOTS

The present work is a continuation of the paper "The magnetic field on the armature surface of the direct current machine at idle running neglecting the slots" by the same authors ((Transactions of the Estonian SSR, Academy of Sciences. Physics and Mathematics, 24, 49 (1975)).

It deals with the calculation of the magnetic field of the commutating poles, the armature and the compensating windings (the windings of the quadrature axis) on the active armature surface of the direct current machine neglecting the slots and the saturation. The calculation is based on the Laplace equation solution for the scalar magnetic potential by the G. A. Grinberg method. Expressions for calculating the magnetic induction and amplitudes of the induction harmonics on the armature surface of the fields of the quadrature axis windings and the mutual inductivities between these windings and section of the armature winding are presented. The authors also present calculations of the amplitudes of the commutating pole field harmonics and curves of the induction according to the fields of the commutating pole, of the armature and the resulting induction of the field by simultaneous feeding the following windings:

- 1) the armature and the compensating winding,
- 2) all windings of the quadrature axis,
- 3) all windings including the field winding.

The obtained results enable a more accurate analysis of the electromagnetic and electromechanical processes in the direct current machines.