EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 24. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1975. NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1975, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1975.3.06

УДК 535.345.1

П. КАРД, П. РАБКИН

К ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ПЛЕНОК

Вычислена матрица интерференции неоднородной оптической пленки, обратная величина показателя преломления которой является квадратичной функцией координаты.

Введение

Распространение света в неоднородной оптической пленке описывается одномерным волновым уравнением

$$d^2U/dz^2+k^2n^2(z)\,U=0, \tag{1}$$

где k — волновое число, а $n(z)$ — показатель преломления (действительный или, в случае наклонного падения света, эффективный). В пренебрежении дисперсией n не зависит от k. Уравнение вида (1) решается в замкнутом виде только в некоторых частных случаях, обзор которых можно найти в [1]. Однако этот обзор неполон — в нем отсутствует важный случай

$$n(z)=(Az^2/h^2+2Bz/h+C)^{-1}. \tag{2}$$

Хотя решение дифференциального уравнения

$$d^2U/dz^2+k^2(Az^2/h^2+2Bz/h+C)^{-2}U=0 \tag{3}$$

хорошо известно (см., напр., [2]), представляет интерес применить его в общей теории оптических пленок. В настоящей статье мы воспользуемся для этого предложенным в [3] представлением матрицы интерференции.

Решение волнового уравнения

В уравнении (3) h означает толщину пленки, а A, B, C — безразмерные вещественные постоянные. Обозначив через z_1, z_2 границы пленки, имеем

$$h=z_2-z_1. \tag{4}$$

Решение уравнения удобно искать в виде

$$U=n^{-1/2}\exp(\pm i\Psi), \tag{5}$$

где Ψ — новая функция. Подстановку выполним сначала в уравнении общего вида (1), не конкретизируя зависимости показателя преломления от координаты. Складывая и вычитая результаты, соответствующие двум знакам в экспоненте, получим

$$\Psi''-(n'/n)\Psi'=0 \tag{6}$$

и

$$\Psi'^2=(3/4)(n'/n)^2-n''/2n+k^2n^2, \tag{7}$$

где штрих означает производную по z. Теперь примем $n(z)$ в виде (2). Подставляя это выражение в (7), находим

$$\Psi'=nh^{-1}(\alpha^2+K)^{-1}, \tag{8}$$

где

$$\alpha=hk \tag{9}$$

и

$$K=AC-B^2. \tag{10}$$

Подставляя выражение (8) для Ψ' в уравнение (6), убеждаемся, что оно тоже удовлетворяется. Остается интегрировать уравнение (8). Результат можно написать в виде

$$\Psi=(1+\alpha^2/K)^{1/2}\Theta, \tag{11}$$

где Θ определяется формулами:

$$\begin{gathered}\tan\Theta=K^{-1/2}(Az/h+B),\\ \cos\Theta=(nK/A)^{1/2},\end{gathered} \tag{12}$$

согласно которым Θ вещественно при $K\geqslant 0$, чисто мнимо при $K<0$, $A<0$, комплексно с вещественной частью $\pi/2$ при $K\leqslant 0$, $A>0$, $Az/h+B>0$ и комплексно с вещественной частью $-\pi/2$ при $K\leqslant 0$, $A>0$, $Az/h+B<0$. Здесь следует учитывать неравенство

$$n^{-1}=A^{-1}[(Az/h+B)^2+K]>0. \tag{13}$$

Итак, линейно независимые решения уравнения (3) суть:

$$\begin{gathered}U_1=n^{-1/2}\exp[i\Theta(1+\alpha^2/K)^{1/2}],\\ U_2=n^{-1/2}\exp[-i\Theta(1+\alpha^2/K)^{1/2}].\end{gathered} \tag{14}$$

В дальнейшем будем обозначать индексами 1 и 2 у n и Θ значения аргумента, т. е. $n_1\equiv n(z_1)$ и т. д. Обозначим еще

$$\Phi=\Theta_2-\Theta_1, \tag{15}$$

причем, согласно формулам (2), (4), (10) и (12),

$$\begin{gathered}\sin\Phi=(Kn_1n_2)^{1/2},\\ \cos\Phi=\operatorname{ch}(v_1-v_2)-(A/2)(n_1n_2)^{1/2}.\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь

$$v=(1/2)\ln n \tag{17}$$

(см. [3], формула (4)).

Особым случаем, когда формулы (11) и (14) непосредственно не применимы, является $K=0$. Тогда

$$n=A(Az/h+B)^{-2}, \tag{18}$$

$$\Phi=0 \tag{19}$$

и, согласно (8),

$$\Psi=-\alpha(Az/h+B)^{-1}=-\alpha(n/A)^{1/2}, \tag{20}$$

откуда

$$\begin{gathered}U_1=n^{-1/2}\exp[-i\alpha(n/A)^{1/2}],\\ U_2=n^{-1/2}\exp[i\alpha(n/A)^{1/2}].\end{gathered} \tag{21}$$

Эти же формулы можно получить, впрочем, путем предельного перехода и из общих формул (14).

Другим особым случаем является тот, когда обратная величина показателя преломления зависит от координаты линейно, т. е. когда $A=0$ и

$$n=(2Bz/h+C)^{-1}. \tag{22}$$

Обычно этот случай рассматривается независимо (см. [1]), но удобно подвести его под квадратичную формулу как ее предельный случай. Формулы (11)—(14) опять непосредственно не применимы, однако, формулы (16) остаются в силе. В этом случае

$$K=-B^2 \tag{23}$$

и

$$B=(n_1n_2)^{-1/2}\,\mathrm{sh}\,(v_1-v_2). \tag{24}$$

Следовательно,

$$K=-(n_1n_2)^{-1}\,\mathrm{sh}^2(v_1-v_2) \tag{25}$$

и

$$\Phi=i(v_1-v_2). \tag{26}$$

Вместо (14) решениями волнового уравнения в этом случае будут

$$\begin{aligned} U_1&=\exp\{v[-1+(1-\alpha^2/B^2)^{1/2}]\},\\ U_2&=\exp\{v[-1-(1-\alpha^2/B^2)^{1/2}]\}, \end{aligned} \tag{27}$$

в чем можно убедиться или решая волновое уравнение с самого начала заново, или из формул (14) путем предельного перехода $A\to 0$.

Матрица интерференции

Матрицу интерференции L нашей неоднородной пленки представим в виде

$$L=l_0E+\vec{l}\,\vec{\sigma} \tag{28}$$

(см. [3], формула (34)), где E — единичная двухрядная матрица, $\vec{\sigma}$ — вектор-матрица Паули, а l_0 и компоненты l_1, l_2, l_3 вектора $\vec{l}$ вычисляются по формулам (26), (31) и (32) статьи [3]. Подставив в эти формулы выражения U_1 и U_2 из формул (14), получим следующий результат:

$$\begin{aligned} l_0&=-M\,\mathrm{ch}\,(v_2-v_1)+N,\\ l_1&=-M\,\mathrm{sh}\,(v_2-v_1),\\ l_2&=-M\,(A/2\alpha)\,(n_1n_2)^{1/2}-N\,(\alpha/2)\,(n_1n_2-1),\\ l_3&=iM\,(A/2\alpha)\,(n_1n_2)^{1/2}+iN\,(\alpha/2)\,(n_1n_2+1), \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned} M&=\frac{\sin[\Phi(1+\alpha^2/K)^{1/2}]}{(1+\alpha^2/K)^{1/2}\tan\Phi}-\cos[\Phi(1+\alpha^2/K)^{1/2}],\\ N&=\frac{\sin[\Phi(1+\alpha^2/K)^{1/2}]}{(1+\alpha^2/K)^{1/2}\sin\Phi}. \end{aligned} \tag{30}$$

Отсюда матрица интерференции запишется в виде

$$\begin{aligned} L=M[-G\,(v_2-v_1)-(A/2\alpha)\,(n_1n_2)^{1/2}(\sigma_2-i\sigma_3)\,]+\\ +N[E+i\alpha\,(n_1n_2)^{1/2}\overline{G}\,(-v_2-v_1)\,], \end{aligned} \tag{31}$$

где матрицы G и $\overline{G}$ определены формулами (2) и (9) статьи [3].

В особом случае $K=0$ формулы (29) и (31) остаются неизменными, только M и N выражаются иначе. Согласно (16) и (19)

$$M = \frac{\sin[\alpha(n_1n_2)^{1/2}]}{\alpha(n_1n_2)^{1/2}} - \cos[\alpha(n_1n_2)^{1/2}],$$
$$N = \frac{\sin[\alpha(n_1n_2)^{1/2}]}{\alpha(n_1n_2)^{1/2}}. \tag{32}$$

В другом особом случае ($A = 0$) формулы (29) и (31) тоже сохраняют свой вид, а M и N, согласно (26), выражаются формулами:

$$M = \frac{\mathrm{sh}[(v_1 - v_2)(1 - \alpha^2/B^2)^{1/2}]}{(1 - \alpha^2/B^2)^{1/2}\,\mathrm{th}(v_1 - v_2)} - \mathrm{ch}[(v_1 - v_2)(1 - \alpha^2/B^2)^{1/2}],$$
$$N = \frac{\mathrm{sh}[(v_1 - v_2)(1 - \alpha^2/B^2)^{1/2}]}{(1 - \alpha^2/B^2)^{1/2}\,\mathrm{sh}(v_1 - v_2)}. \tag{33}$$

Матрица интерференции L относится к пленке, ограниченной с обеих сторон средами с единичным показателем преломления. В более общем случае показатели преломления ограничивающих сред могут иметь любые произвольные значения $n_1{}^0$, $n_2{}^0$, причем, в случае $n_1{}^0 = n_1$, $n_2{}^0 = n_2$ показатель преломления изменяется на границах пленки непрерывно. Обозначая матрицу интерференции в общем случае через $\overset{0}{L}_{12}$, а в случае отсутствия скачка показателя преломления через L_{12}, имеем:

$$\overset{0}{L}_{12} = G(\overset{0}{v}_1)\,L\,G(-\overset{0}{v}_2),$$
$$L_{12} = G(v_1)\,L\,G(-v_2). \tag{34}$$

Подставляя сюда выражение (31) для L, находим

$$\overset{0}{L}_{12} = M[-G(v_2 - \overset{0}{v}_2 - v_1 + \overset{0}{v}_1) - (A/2\alpha)(n_1n_2/\overset{0}{n}_1\overset{0}{n}_2)^{1/2}(\sigma_2 - i\sigma_3)] +$$
$$+ N[G(\overset{0}{v}_1 - \overset{0}{v}_2) + i\alpha(n_1n_2)^{1/2}\overline{G}(-v_2 + \overset{0}{v}_2 - v_1 + \overset{0}{v}_1)] \tag{35}$$

и

$$L_{12} = M[-E - (A/2\alpha)(\sigma_2 - i\sigma_3)] + N[G(v_1 - v_2) + i\alpha(n_1n_2)^{1/2}\sigma_3]. \tag{36}$$

Коэффициенты отражения и пропускания

Вместо амплитудных коэффициентов отражения r и пропускания t введем величины

$$a = r/t, \quad b = t^{-1} \tag{37}$$

(см. формулу (7) статьи [3]) и найдем выражения этих величин во всех рассмотренных выше случаях — когда пленка ограничена средами с единичным показателем преломления, в общем случае произвольных значений показателей преломления ограничивающих сред и когда скачок показателя преломления на границах отсутствует. В первом случае будем писать a и b без индексов, а в других случаях — с теми же индексами, как у L (см. (34) — (36)). Так как в любом случае

$$L = \begin{pmatrix} b & \tilde{a}^* \\ a & \tilde{b}^* \end{pmatrix} \tag{38}$$

(см. формулу (6) в [3]), то, согласно выражениям (31), (35) и (36), находим:

1. В первом случае

$$a=M[\operatorname{sh}(v_1-v_2)-i(A/2\alpha)(n_1n_2)^{1/2}]-iN\alpha(n_1n_2)^{1/2}\operatorname{sh}(v_1+v_2),$$
$$b=M[-\operatorname{ch}(v_1-v_2)+i(A/2\alpha)(n_1n_2)^{1/2}]+N[1+i\alpha(n_1n_2)^{1/2}\operatorname{ch}(v_1+v_2)] \quad (39)$$

или, иначе,

$$a=M\left[\frac{n_1-n_2}{2(n_1n_2)^{1/2}}-\frac{iA(n_1n_2)^{1/2}}{2\alpha}\right]-\frac{iN\alpha(n_1n_2-1)}{2},$$
$$b=M\left[-\frac{n_1+n_2}{2(n_1n_2)^{1/2}}+\frac{iA(n_1n_2)^{1/2}}{2\alpha}\right]+N\left[1+\frac{i\alpha(n_1n_2+1)}{2}\right]. \quad (40)$$

2. Во втором (общем) случае имеем:

$$a_{12}^{0}=M[\operatorname{sh}(v_1-\overset{0}{v_1}-v_2+\overset{0}{v_2})-i(A/2\alpha)(n_1n_2/\overset{0}{n_1}\overset{0}{n_2})^{1/2}]+$$
$$+N[\operatorname{sh}(\overset{0}{v_1}-\overset{0}{v_2})-i\alpha(n_1n_2)^{1/2}\operatorname{sh}(v_2-\overset{0}{v_2}+v_1-\overset{0}{v_1})],$$
$$b_{12}^{0}=M[-\operatorname{ch}(v_1-\overset{0}{v_1}-v_2+\overset{0}{v_2})+i(A/2\alpha)(n_1n_2/\overset{0}{n_1}\overset{0}{n_2})^{1/2}]+$$
$$+N[\operatorname{ch}(\overset{0}{v_1}-\overset{0}{v_2})+i\alpha(n_1n_2)^{1/2}\operatorname{ch}(v_2-\overset{0}{v_2}+v_1-\overset{0}{v_1})]. \quad (41)$$

3. Наконец, в случае $\overset{0}{n_1}=n_1$, $\overset{0}{n_2}=n_2$ получаем:

$$a_{12}=-iMA/2\alpha+N\operatorname{sh}(v_1-v_2),$$
$$b_{12}=M[-1+iA/2\alpha]+N[\operatorname{ch}(v_1-v_2)+i\alpha(n_1n_2)^{1/2}] \quad (42)$$

или, иначе,

$$a_{12}=-iMA/2\alpha+\frac{N(n_1-n_2)}{2(n_1n_2)^{1/2}},$$
$$b_{12}=M[-1+iA/2\alpha]+N\left[\frac{n_1+n_2}{2(n_1n_2)^{1/2}}+i\alpha(n_1n_2)^{1/2}\right]. \quad (43)$$

Как уже отмечено выше по поводу матрицы интерференции, все формулы (39)—(43) верны также в особых случаях $K=0$ и $A=0$, только величины M и N выражаются в этих случаях вместо формул (30) формулами (32) или (33) соответственно. Например, формулы (42) в случае $A=0$ примут вид:

$$a_{12}=\frac{\operatorname{sh}[(v_1-v_2)(1-\alpha^2/B^2)^{1/2}]}{(1-\alpha^2/B^2)^{1/2}},$$
$$b_{12}=\operatorname{ch}[(v_1-v_2)(1-\alpha^2/B^2)^{1/2}]+\frac{i\alpha\operatorname{sh}[(v_1-v_2)(1-\alpha^2/B^2)^{1/2}]}{B(1-\alpha^2/B^2)^{1/2}}. \quad (44)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М., Волны в слоистых средах, изд. 2, М., 1973, § 22, Обзор существующих решений, с. 129—131.
2. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изд. 2, М., 1961, с. 519.
3. Кард П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 23, 113 (1974).

Тартуский государственный университет
Научно-исследовательский институт Таллинского электротехнического завода им. М. И. Калинина

Поступила в редакцию
4/XII 1974

P. KARD, P. RABKIN

MITTEHOMOGEENSETE OPTILISTE KILEDE TEOORIAST

Eeldusel, et mittehomogeense optilise kile murdumisnäitaja pöördväärtus n^{-1} on koordinaadi ruutfunktsioon, arvutatakse kile interferentsmaatriks (valem (31)) ja leitakse sellest kile amplituudsete peegeldumis- ja läbilaskvusteguritega r, t seotud suurused a, b (valemid (37)) kolmel juhul: 1) kui kilet piiravate keskkondade murdumisnäitaja on 1 (valemid (39)); 2) kui piiravate keskkondade murdumisnäitajad on meelevaldsete väärtustega (valemid (41)); 3) kui murdumisnäitaja on kile piirpindadel pidev (valemid (42)). Valemid kehtivad ka erijuhtudel, kui $n^{-1/2}$ või n^{-1} sõltub koordinaadist lineaarselt.

P. KARD, P. RABKIN

ON THE THEORY OF INHOMOGENEOUS OPTICAL FILMS

Provided that the inverse, n^{-1}, of the refractive index n of an inhomogeneous optical film is a square function of the co-ordinate, the formula (31) of the interference matrix of the film is derived. Then the quantities $a = r/t$ and $b = t^{-1}$, where r is the amplitude reflectance and t amplitude transmittance of the film, are expressed in three cases: 1) by formulae (39), when the ambient media have refractive index 1; 2) by formulae (41), when the ambient media have any arbitrary values of refractive indices; and 3) by formulae (42), when the refractive index on the boundaries varies continuously. All formulae are also valid in special cases when $n^{-1/2}$ or n^{-1} depends linearly on co-ordinate.