EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 24. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1975. NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1975, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1975.3.04

УДК 531.55

*И. КЕЙС*

# ОБ ОДНОМ ВИДЕ ИНВАРИАНТА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**Для натуральных и лагранжевых неавтономных динамических систем с линейными идеальными связями в качестве характеристической функции $F$ рассмотрена линейная комбинация функции Гамильтона и импульсов. При наличии циклической переменной функция $F$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению. В случае пассивных на каноническом виртуальном перемещении непотенциальных сил функция $F'$ является инвариантом данной неавтономной системы. Проводится исследование устойчивости по части переменных в смысле Лагранжа и Ляпунова $F$-экстремальных решений системы. Результаты иллюстрируются на примере системы Якоби и двух гиростатических систем. В первом примере выражения известного и полученного в работе инварианта совпадают и найденные условия его существования удовлетворяются. Получены выражения инвариантов вращения гиростатов для двух случаев поступательно-вращательного движения в ньютоновском нецентральном поле сил.**

1. Рассмотрим неавтономную натуральную динамическую систему $\Sigma$

$$[d(\partial L/\partial q'_i)/dt - \partial L/\partial q_i - Q^1_i]\delta q_i = 0, \tag{1.1}$$

подчиненную линейным идеальным неголономным связям

$$a_{ji}(t,q)\delta q_i = 0, \ \operatorname{rang}\|a_{ji}\| = r \leqslant n-1 \quad (i=\overline{1,n}, j=\overline{1,r}), \tag{1.2}$$

соответствующим условиям $a_{ji}q'_i + a_{j0} = 0$ $(q'_i = dq_i/dt,\ 0 \leqslant r)$. Здесь $q_i$ — определяющие координаты рассматриваемой реономной системы, $Q^1_i(t,q,q')$ — заданные непотенциальные обобщенные силы, линейные по $q'$. Лагранжиан исходной системы $L = L_2(t,q,q') + L_1(t,q,q') + L_0(t,q)$. Линейный по $q'$ член $L_1 \equiv l_i(t,q)q'_i$ соответствует реономным связям и потенциалу Майера [1–3] гироскопических или электромагнитных сил Лармора, внешних для $\Sigma$. Матрица $B = \|l_{ik}\|$ — положительно определенная в равенстве $L_2 = \frac{1}{2} l_{ik}q'_i q'_k$ $(i,k = \overline{1,n})$.
Это равносильно неравенству $\min \mu_i \geqslant \mu^0 > 0$, где $\mu_i$ — корни уравнения $|B - \mu E| = 0$.

Используя это условие, перейдем к переменным Гамильтона $p_i = \partial L/\partial q'_i$, $H(t,q,p) = p_i q'_i - L(t,q,q')$ (здесь и ниже по одинаковому индексу идет суммирование). В них уравнение (1.1) принимает вид

$$(dp_i/dt + \partial H/\partial q_i - Q_i)\delta q_i = 0, \quad Q_i(t,q,p) \equiv Q^1_i\left(t, q, \frac{\partial H}{\partial p}\right). \tag{1.3}$$

Предположим, что связи (1.2) допускают виртуальное перемещение

$$\delta q_i = \varepsilon \partial F/\partial p_i = \varepsilon(\partial H/\partial p_i + u_i(t)), \tag{1.4}$$

которое представляет собою $q$-компоненту бесконечно-малого канонического преобразования, произведенного функцией $F = H + u_i(t)p_i$.

Используя уравнения Лагранжа с множителями и подстановку величин (1.4) в (1.1), приходим к уравнению

$$dF/dt = D[F] = \partial F/\partial t - u_i(t)\partial F/\partial q_i + W(Q), \tag{1.5}$$

в котором $W(Q) = Q_i(t, q, p)\partial F/\partial p_i$ означает мощность на перемещении (1.4). При этом имеем равенства

$$\begin{gathered} H = \frac{1}{2} h_{ik}(t, q) p_i p_k + h_i(t, q) p_i + H_0(t, q), \qquad A = \|h_{ik}\| > 0, \\ F = \frac{1}{2} f_{ik}(t, q) p_i p_k + f_i(t, q) p_i + F_0(t, q), \qquad F = H + \langle u, p\rangle, \\ f_{ik}(t, q) \equiv h_{ik}(t, q),\ h_i(t, q) + u_i(t) \equiv f_i(t, q),\ F_0(t, q) \equiv H_0(t, q). \end{gathered} \tag{1.6}$$

Предполагается, что $\min \lambda_i \geqslant \lambda_0 > 0$, где $\lambda_i$ — корни уравнения $|A - \lambda E| = 0$. Для равенства $W(Q) \equiv w(t)$ в случае линейной вектор-функции $Q(p)$ необходимо и достаточно выполнение условия $Q = \Gamma \partial F/\partial p$, где $\Gamma = \Gamma(t, q)$ — произвольная кососимметрическая матрица, $w \equiv 0$, $p = (p_i)^*$. Допустим, что непотенциальные силы $Q_i$ не совершают работы на перемещении (1.4), а функция $F$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\partial F/\partial t - u_i(t)\partial F/\partial q_i = v(t), \tag{1.7}$$

общее решение которого имеет с учетом (1.6) вид

$$F' = F - \int_0^t v\, d\tau,\ F(t, \xi, p) = \frac{1}{2} f_{ik}(\xi) p_i p_k + f_k(\xi) p_k + F_0(\xi) + \int_0^t v(\tau)\, d\tau, \tag{1.8}$$

$$\xi = (\xi_i)^*, \quad \xi_i = q_i + \int_0^t u_i(\tau), d\tau, \quad A(\xi) = \|f_{ik}(\xi)\| > 0.$$

При условиях (1.7) и $W(Q) \equiv 0$ из уравнения (1.5) следует, что функция (1.8) при наличии виртуального перемещения (1.4) будет общим инвариантом движения системы (1.1). Сохраняя последнее условие в предположении, что существует решение $F_*$ уравнения $D[F] = \nu(t)F + \nu_0(t)$ вида (1.6) с положительно определенной матрицей $A$, получаем общий инвариант движения системы (1.1)

$$\exp(-\varrho[t])\,[F_* - \int_0^t \exp[\varrho(t) - \varrho(\tau)]\nu_0(\tau)\, d\tau]. \tag{1.9}$$

Здесь используются обозначения

$$F_* = [F(t, \xi, p) - r(t)]\exp \varrho(t) + F^0(t, q, p), \tag{1.10}$$

$$r = \int_0^t v(\tau)\, d\tau, \quad \varrho = \int_0^t \nu(\tau)\, d\tau,$$

$F^0$ означает частное решение уравнения $D[F] = \nu F + \nu_0$ вида (1.6), для определения которого нетрудно получить систему уравнений из условия обращения в нуль коэффициентов разложения по $p_i$. Поиск решения $F^0(t, q, p)$ упрощается в случае $W \equiv W(\xi, p)$, либо при выполнении условия «компенсации» $W \equiv \nu_1(t)F(t, q, p)$. Из выражений (1.9) и (1.10) заключаем, что инвариант (1.9) переходит в инвариант (1.8) при условиях $\nu \equiv 0$, $\nu_0(t) \equiv v(t)$, $\nu_1(t) \equiv 0$.

Отметим, что структура инварианта (1.9) согласно (1.10) определяется функцией $W(Q)$ и «собственными» переменными $\nu(t)$, $\nu_0(t)$ оператора $D$. Это обстоятельство ограничивает практическое значение обобщения (1.9) результата (1.8). В связи с этим будем рассматривать в дальнейшем лишь функцию $F(t,q,p)$, подчиненную условиям (1.5) и (1.7), которая является инвариантом (1.8) при $v = W(Q) \equiv 0$. Легко видеть, что все используемые рассуждения применимы без существенных изменений к динамическим системам Лагранжа типа (1.1), у которых $L, W(Q)$ не обязательно квадратичны по $q'$, существует перемещение (1.4) и матрица $B^1$ положительно определена $(B^1 = \|\partial^2 L/\partial q'_i \partial q'_k\|)$.

Обозначим через $R(t,\xi,p)$ неотрицательную функцию Стрэтта $R^0 = {}^1\!/_2 r_{ik}(t,\xi) q'_i q'_k$ в переменных Гамильтона, которая является потенциалом диссипативных сил $Q^- = -B\partial R/\partial p$. Разложим вектор $Q$ на регенеративную, гироскопическую и диссипативную компоненты $Q^+$, $Q^0$, $Q^-$, где $\langle Q^+, g\rangle \geqslant 0$, $\langle Q^0, g\rangle = 0$, $\langle Q^-, g\rangle \leqslant 0$, $g = \partial F/\partial p$, $Q^0 = \Gamma g$. Отсюда имеем равенство $W(t,\xi,p) = \langle Q^+ - B\partial R/\partial p, g\rangle$. Здесь и ниже $\langle a, b\rangle$ означает скалярное произведение векторов $a, b$. Отметим, что условие $W \leqslant 0$ не обязательно.

2. Решение $\xi^0(t)$, $p^0(t)$ уравнений Лагранжа с множителями назовем экстремальным, если существует область $R^0 : t \geqslant 0$, $\|\eta\| \leqslant R_2$, $\|y\| \leqslant R_1$, $\|z\| < \infty$, в которой выполняются соотношения

$$V(t,x,\eta) \equiv F(t,\xi^0 + x, p^0 + \eta) - F(t,\xi^0,p^0) \geqslant V_1(y,\eta), \tag{2.1}$$

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_{\xi=\xi^0+x,\ p=p^0+\eta}, \quad (p^0(t) \equiv -A^{-1}f), \tag{2.2}$$

$$dV/dt \equiv W(t,\xi^0 + x, p^0 + \eta) - W(t,\xi^0,p^0) \equiv M(t,x,\eta) \leqslant 0, \tag{2.3}$$

$$V_1(0,0) = 0, \quad V_1(y,\eta) > 0 \quad \text{при} \quad |y| + |\eta| \neq 0, \quad V_1 \in C.$$

Величины $x = (y_s, z_\alpha)^*$, $\eta = (\eta_k)^*$ — возмущения движения $\xi^0(t)$, $p^0(t)$, $y$ — компонента $x$, $f = (f_i(\xi^0 + x))^*$, $\zeta = (y_s, \eta_k)^*$, $\alpha = \overline{1, n-m}$, $s = \overline{1,m}$; $*$ — знак транспонирования. При условиях (2.1) и (2.3) функции $F$, $-W$ достигают минимума по $\xi, p$ на решении $\xi^0(t)$, $p^0(t)$ в области $t \geqslant 0$, $\sum(\xi_s - \overset{0}{\xi_s})^2 \leqslant R_1^2$, $\|p - p^0\| \leqslant R_2$, $\sum(\xi_{m+\alpha} - \overset{0}{\xi}_{m+\alpha})^2 < \infty$ $(m \leqslant n)$. Для натуральной [3] системы имеем с учетом равенств (1.6) и (2.2) строгий минимум $F$ на $p = p^0(t)$.

Рассмотрим устойчивость по Ляпунову экстремального движения, используя теорему [4] В. В. Румянцева, доказательство которой воспроизведем в целях упрощения последующих рассуждений.

Если дифференциальные уравнения возмущенного движения $2n$-мерной динамической системы имеют в $R^0$ непрерывно дифференцируемую функцию $V$ Ляпунова, исчезающую при $x = 0$, $\eta = 0$, и выполняются условия (2.1), (2.3), то движение $\xi^0, p^0$ устойчиво по переменным $\xi_s, p_i$. Действительно, по любому $\varepsilon < \min(R_1, R_2)$ на сфере $\|\zeta\| = \varepsilon$, $\zeta = (y_s, \eta_k)^*$ находим $v_{10} = \min V_1 > 0$. Ввиду непрерывности для любого $t_0$ имеем $\delta_0 = \delta(t_0)$ такое, что $V^0 \equiv V(t_0, x_0, \eta_0) < v_{10}$ при $\|\zeta_0\| \leqslant \delta_0$, $\|z_0\| < \delta_0$ $(x(t_0) = x_0,\ \eta(t_0) = \eta_0,\ z(t_0) = z_0)$. Интегрируя неравенство (2.3) вдоль любой интегральной кривой с началом $x_0$, $\eta_0$, приходим к условиям $V(t, x(t,x_0,\eta_0), \eta(t,x_0,\eta_0)) \leqslant V^0 < v_{10}$, которые согласно (2.1) несовместимы с равенством $\|\zeta(t,x_0,\eta_0)\| = \varepsilon$. Это доказывает утверждение теоремы. Устойчивость по $\xi_s$, $p_i$ неравномерна по $t_0$ и существует здесь при условии $\|z(t_0)\| \leqslant \delta(t_0)$. Если при (2.1) в области $R^0$ выполняются неравенства $V(t,x,\eta) \leqslant V_2(\zeta)$, $M(t,x,\eta) \leqslant M_1(\zeta) \in C$, где $-M_1$, $V_2 \in C$ — определенно положительные функции, то имеем [4] асимптотическую устойчивость движения $\xi^0(t)$, $p^0(t)$ по переменным $\xi_s$, $p_i$. В случае $W \equiv 0$ функции $F$ и $V$ являются инвариантами системы (1.1) и соответствующей $\xi^0$, $p^0$ возмущенной системы, причем условие (2.3) тождественно выполняется.

Рассмотрим условия устойчивости по Лагранжу [5]. Допустим, что $V(t,x,\eta) \to +\infty$ при $\|\zeta\| \to \infty$ равномерно на области $t \geqslant 0$, $\|z\| < \infty$, где выполняется условие (2.3). Тогда движение $p^0(t)$, $\xi^0(t)$ устойчиво по переменным $\xi_s$, $p_i$ в смысле Лагранжа при любых $x_0$, $z_0$. Допустим противное. Тогда для любого $N > 0$ имеем $t_n$ такое, что $\|\zeta(t_n)\| \geqslant N$. Выберем $N$ из условия $V(t,\zeta_n,z) > V^0$, $\zeta_n = \zeta(t_n)$. Это неравенство противоречит оценке $V(t,\zeta(t),\ z(t)) \leqslant V^0$, которую получаем, интегрируя (2.3). Поэтому для любого $x_0$, $z_0$ имеем условие устойчивости по Лагранжу $\|\zeta(t,x_0,z_0)\| \leqslant N$. Отметим, что при $W \equiv 0$ условие (2.3) отпадает.

Воспользуемся условием экстремальности (2.2) при обследовании устойчивости по Ляпунову и Лагранжу решения $\xi^0(t)$, $p^0(t)$ с помощью функции (1.8), для которой условие (2.1) принимает вид

$$V_*(t,x,\eta) = \frac{1}{2} f_{ik}(t,x)\eta_i\eta_k + U(t,x) \geqslant V_1(y,\eta), \tag{2.4}$$

$$f_{ik}(t,x) \equiv f_{ik}(\xi^0 + x), \qquad U(t,x) = F(\xi^0 + x) - F(\xi^0) + \frac{\overset{0}{p_i}}{2}[f_i(\xi^0 + x) - f_i(\xi^0)].$$

Если на области $R^0$ справедливо неравенство $U(t,x) > U_1(y)$, где $U_1(0) = 0$, $U_1(y) > 0$ $(y \neq 0)$, $U_1(y) \in C$, то $V_*$ является там мажорантой для функции $\frac{1}{2}\lambda_0\|\eta\|^2 + U(y) \equiv V_1(y,\eta)$. Следовательно, при выполнении этого условия и соотношений (2.2), (2.3) имеем на основании теоремы [4] устойчивость Ляпунова по переменным $\xi_s$, $p_i$ экстремального движения. Если же $U(t,x) \to \infty$ при $\|y\| \to \infty$ равномерно на $t \geqslant 0$, $\|z\| < \infty$, то получим устойчивость Лагранжа по этим переменным. Заметим, что ввиду равенств $\xi_i - \overset{0}{\xi_i} = q_i - \overset{0}{q_i}$ устойчивость по $\xi_s$ означает устойчивость по $q_s$ движения $q^0(t)$, $p^0(t)$ системы (1.1).

Рассмотрим здесь случай $W \equiv 0$ при условии $F(0,\xi^0(0),\ p^0(0)) = F(0,\xi^0(0) + x(0),\ p^0(0) + \eta(0))$, когда начальные возмущения лежат на одной интегральной поверхности с начальными значениями невозмущенного движения. Предположим, что всюду $U(t,x) \geqslant 0$. Тогда $\eta \equiv 0$ и $U(t,x) = 0$ для условно возмущенных движений. Введем переменные $e_s = y_s\|y\|^{-1}$, $\omega = \|y\|$ и функцию $\Phi(t,e,z,\omega) \equiv U(t,y(e,\omega),z)$, которую будем считать достаточно гладкой. Обозначим через $\omega^*(t,e,z)$ любое непрерывное решение уравнения $\Phi(t,e,z,\omega) = 0$. По формуле Лагранжа имеем $\omega^*(z) - \omega^*(z_1) = \langle (z_1 - z), \partial\Phi/\partial z_*\rangle (\partial\Phi/\partial\omega_*^*)^{-1}$, где $z_* = z_1 + \Theta(z - z_1)$, $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$, $\omega_*^* = \omega^*(t,e,z_*(z_1,z,\Theta))$. Если $\|z - z_1\|\,\|\partial\Phi/\partial z_*\|\,|\partial\Phi/\partial\omega|^{-1} \to 0$ при $z_1 \to 0$ равномерно на $t \geqslant 0$, $\|e\| = 1$, $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$, $0 \leqslant \omega < \infty$, $\|z\| < \infty$, то $\omega^*[t] < \varepsilon$ для $\|z(0)\| < \delta(\varepsilon)$ и, следовательно, имеем условную устойчивость экстремального решения по $\xi_s$, $p_i$.

При условиях (2.1), (2.3) или (2.3) и $V \to \infty$ вместе с $\|\zeta\| \to \infty$ равномерно на $t \geqslant 0$, $\|z\| < \infty$ имеем $\xi_s$, $p_i$-устойчивость $\xi^0$, $p^0$ по Ляпунову или Лагранжу для системы (1.1) Лагранжа. В голономном случае $\xi$, $p$ удовлетворяют каноническим уравнениям $d\xi_i/dt = \partial F/\partial p_i$, $dp_i/dt = -\partial F/\partial\xi_i$. Их экстремальное решение имеет вид

$$\xi^0(t) \equiv a = \text{const}, \qquad p^0(t) \equiv -A^{-1}(a)f(a) \equiv b = \text{const}.$$

3. Примеры. Вопрос существования инварианта вида (1.8) для систем (1.1) разрешают условия (1.7) и $W(Q)\equiv 0$. В связи с этим представляют практический интерес системы $\Sigma$, которые разбиваются на две подсистемы $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ такие, что движение $\Sigma_2$ «слабо» влияет на движение $\Sigma_1$. Используя это обстоятельство, можно с достаточной точностью считать известным некоторый вектор $q^1[t]\equiv f[t]$ подсистемы $\Sigma_1$. Если окажется, что $\delta q^1=\varepsilon df/dt$ — виртуальное перемещение подсистемы $\Sigma_1$ при связях (1.2), то рассмотрим лагранжиан системы (1.1), приведенный к виду $L$ для системы $\Sigma_2$ подстановкой $L_f(\Sigma)= = L_f(t,f,q,f',q')\equiv L(t,q,q')$. При виртуальном перемещении (1.4) у приведенной системы получим все результаты рассмотренного общего случая. Если $F(L)$ будет инвариантом приведенной системы, то можно понизить размерность системы $\Sigma_2$ «вдоль» движения $f[t]\Sigma_1$. Рассматривая движение голономной системы под действием ньютоновского притяжения со стороны центров, вращающихся с постоянной скоростью по концентрическим компланарным окружностям, Якоби нашел [6] интеграл, выражение которого является линейной комбинацией обобщенного интеграла энергии и проекции момента количества движения системы на орт плоскости движения центров, создающих нестационарное поле притяжения. Инвариант Якоби в силу допущения о движении притягивающих центров соответствует описанному выше разбиению общей системы $\Sigma$ на $\Sigma_1$ (центры) и $\Sigma_2$ (система). Можно убедиться, что условия существования инварианта Якоби и его структура определяются соотношениями (1.7), $W(Q)\equiv 0$ и (1.8). Поэтому результат [6] является примером их реализации. В качестве второго примера рассмотрим гиростат $S_1$, который движется в поле притяжения сфероида с неподвижным центром масс $O_2$. При этом сфероид является абсолютно твердым телом, которое вращается вокруг своей оси симметрии $\gamma$, закрепленной в неподвижном пространстве с триэдром $O_2\xi\eta\zeta$. Гиростат $S_1$ образует $2(m+l)$-мерная голономная система, состоящая из недеформируемой оболочки $S_1{}^0$, которая содержит склерономную механическую систему $S_g$ с постоянным распределением масс в $\overset{0}{S_1}$. Силам внутреннего взаимодействия соответствует потенциал Майера $N_1=m_\alpha(\varphi_2,\varphi_3,q)\,\omega_\alpha+ + m'_s(\varphi_2,\varphi_3,q)\,\dot q_s+N(\varphi,q,r)$. Тогда система $S_1$ имеет лагранжиан

$$L_\Sigma=\frac{1}{2}\,G_\alpha\omega_\alpha^2+\langle k,\omega\rangle+T_g+\frac{M_1}{2}\,|\dot r|^2+N_1+U_1. \tag{3.1}$$

Здесь $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)^*$, $\varphi_1=\psi$, $\varphi_2=\varphi$, $\varphi_3=\Theta$ — углы Эйлера, дающие ориентацию центрального в $S_1$ триэдра $O_1e_1e_2e_3$ относительно $O_1\xi\eta\zeta$, $r=(y_1,y_2,y_3)^*$ — радиус-вектор центра масс $S_1$ из $O_2$ в проекциях на $O_2\xi\eta\zeta$. Проекции $r|r|^{-1}$ на $O_1e_1e_2e_3$ обозначим $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$; $q_s$ — независимые координаты $S_g$ относительно $\overset{0}{S_1}$; $q=(q_s)^*$, $T_g= =1/2g_{rs}\dot q_r\dot q_s$; $s,r=\overline{1,l_1}$, $l=l_1+3$, $\dim r=m=3$; $k_{\alpha s}(q)\,\dot q_s$ — проекции момента количества движения системы $k(S_g)$ относительно $\overset{0}{S_1}$; $\alpha=\overline{1,3}$; $\omega_\alpha$ — проекции $\omega$ угловой скорости вращения $\overset{0}{S_1}$ в $O_1\xi\eta\zeta$ на $O_1e_1e_2e_3$, $0<G_\alpha$ — моменты инерции $S_1$ относительно $O_1e_1e_2e_3$. $M_1$ — масса $S_1$, $U_1=U_1(r,\varphi)$ — силовая функция притяжения сфероидом массы $M_2$ системы $S_1$. Принято, что $M_1\ll M_2$, $lR^{-1}\ll 1$, где $l$ — размер $S_1$, $R$ — полярный радиус сфероида. Учитывая слабое влияние вращательного движения $S_1$ на поступательное, разобьем $S_1$ на подсистему $\Sigma_1$ с вектором состояния $r$ и на подсистему $\Sigma_2$, у которой $x=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\ \ldots,\ q_{l_1})^*$. Используя условие (1.7) при $u_1=-\overset{1}{n_1}$, $u_p\equiv 0$ для подсистемы $\Sigma_2$ и $r_0(t)\equiv f(t)$, приходим к следующему выводу. Вращательное движение

$S_1$ имеет инвариант (1.8) вдоль движения $r_0(t)$ центра масс $S_1$

$$1/2G_\alpha \omega_\alpha^2 + \langle\omega, k\rangle + T_g + 1/2M_1|\dot{r}|^2 - n_1\langle M+m, \zeta\rangle - U^1 - \int_0^t h(\tau)\, d\tau, \tag{3.2}$$

если выполняются соотношения

$$\left(n_1 \frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\partial}{\partial t}\right) \circ \left[\dot{y}_{\alpha 0}(t) \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}(N + U_1)\right)_0\right] = -\dot{h}(t),$$

$$n_1 \frac{\partial}{\partial\varphi_1} \circ U_0^1 + y_{\alpha 0}(t) \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} U^1\right)_0 = -h(t) \quad (U^1 = N + U_1). \tag{3.3}$$

Здесь и ниже $\dot{x} = dx/dt$, $\Phi_0 = \Phi_0(t, x) \equiv \Phi(t, x, r_0(t))$, $M = (G_1\omega_1 + k_1,\ G_2\omega_2 + k_2,\ G_3\omega_3 + k_3)^*$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^*$ — орт оси $O_2\zeta$ в проекциях на $O_1e_1e_2e_3$; используется первая из формул $\partial L_2/\partial\dot{\varphi}_1 = \langle M, \zeta\rangle$, $\partial L_2/\partial\dot{\varphi}_2 = \langle M, e_3^0\rangle$, $\partial L_2/\partial\dot{\varphi}_3 = \langle M, n^0\rangle$; $n^0$ — орт оси нутации, $m = (m_1, m_2, m_3)^*$.

Система из оболочки, несущей роторы, оси которых закреплены вдоль главных центральных осей системы $S_1$, образует [7] гиростат $S_2$ Жуковского—Вольтерра, если оболочка действует на роторы лишь силами давления на их оси. Гиростат $S_2$ получим из $S_1$ при $N_1 \equiv 0$, $T_g = 1/2g_\alpha^{-1}k_\alpha^2$, $g_\alpha = \text{const} > 0$, $g = \text{diag}(g_1, g_2, g_3)$, $m \equiv 0$, $k = g\dot{q}$, $A_\alpha = G_\alpha - g_\alpha > 0$. Отсюда следует

$$L(S_2) = \frac{1}{2}(A_\alpha \omega_\alpha^2 + g_\alpha^{-1} p_\alpha^2 + M_1|\dot{r}|^2) + U_1(r, \varphi), \tag{3.4}$$

$$p = p(\varphi_2, \varphi_3, \dot{\varphi}, \dot{q}) = g\omega + k \quad (k = g\dot{q}). \tag{3.5}$$

Из приближенного выражения гравитационного потенциала сфероида [2] имеем асимптотику функции $U_1 \simeq U^*$

$$U^* = \frac{\mu M_1}{|r|}\left[1 - \frac{(C-A)(1-3s^2)}{2M_2|r|^2}\right] - \frac{3\mu}{2|r|^3}\left\{s_1 - \frac{2}{3}G_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{C-A}{M_2|r|^2}\left[\frac{1}{8}(G_0 - 5s_1) + s_2 - G_0 - 5ss_3 + \frac{35}{8}s^2\left(s_1 + \frac{5G_0}{7}\right)\right]\right\},$$

$$\mu = fM_2, \quad G = \text{diag}(G_1, G_2, G_3), \quad 2G_0 = \sum_{\alpha=1}^{3} G_\alpha.$$

Здесь $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^*$ — орт оси симметрии сфероида в проекциях на $O_1e_1e_2e_3$, $C > A = B$ — моменты инерции относительно $\gamma$ и экваториальной оси, $f$ — постоянная Гаусса; $s = \langle\gamma, \sigma\rangle$, $s_1 = \langle\sigma, G\sigma\rangle$, $s_2 = \langle\gamma, G\gamma\rangle$, $s_3 = \langle\gamma, G\sigma\rangle$. Учитывая малость $(C-A)/M_2R^2$, возьмем для $U_1$ приближение

$$U = \frac{\mu M_1}{|r|}\left[1 + \frac{C-A}{2M_2|r|^2}(1-3s^2)\right] - \frac{3\mu}{2|r|^3}\left[s_1 - \frac{2G_0}{3}\right] \tag{3.6}$$

и рассмотрим ограниченную задачу поступательно-вращательного движения $S_2$. В этом случае центр масс $S_2$ движется по окружности $|r_0| = \text{const}$ со скоростью $n_1$ Кеплера $\mu^{1/2}|r_0|^{-3/2}$ в плоскости $O_2\xi\eta$; $\gamma \in O_2\xi\zeta$; $\langle\gamma, \zeta\rangle = \cos i = \text{const}$. Это движение $r_0(t)$ является приближенным решением уравнений $M_1\ddot{y}_\alpha = \partial U_1/\partial y_\alpha$, которое будем рассматривать как точное

$$y_{10}[t]=|r_0|\cos\Theta,\quad y_{20}[t]=|r_0|\sin\Theta,\quad y_{30}=0,\quad \Theta=n_1(t-t_0)+u_0, \quad (3.7)$$
$$\sin^2 i=\nu=\mathrm{const},\quad t_0=\mathrm{const},\quad u_0=\mathrm{const}$$

ввиду слабого влияния вращения $S_2$ на движение его центра масс. При $U_1(r,\varphi)$, заданной формулой (3.6), и $h=h_0[t]=3/2n_1^3(C-A)M_1M_2^{-1}\nu\sin 2\Theta$ для гиростата (3.4) получаем инвариант вращения в нецентральном поле сил

$$1/2[A_\alpha\omega_\alpha^2-2n_1\langle M,\zeta\rangle+3n_1^2\langle\sigma,G\sigma\rangle]. \quad (3.8)$$

В случае $S_1$ на движении (3.7) при $h=h_0[t]$ инвариант вращения $S_1$ можно получить из выражения (3.2) заменой $U_1$ на (3.6) и $N$ на $N^*=N^*(\varphi_2,\varphi_3,q)$.

При $\Sigma=S_2$, $U_1=U$ выражение момента сил $[\partial U/\partial\sigma,\sigma]+[\partial U/\partial\gamma,\gamma]$ обращается в $3n_1^2[\sigma,\nabla P]$, где $P={}^1/_2\langle\sigma,G\sigma\rangle$, $\nabla P=\partial P/\partial\sigma$, а уравнения вращения $S_2$ вокруг $O_1$ совпадают с известными уравнениями для случая центрального поля сил [7].

Соотношения (3.9) имеют инвариант (3.8) и допускают относительное равновесие (3.10)

$$\dot{M}=[M,\omega]+3n_1^2[\sigma,\nabla P],\quad \dot{\sigma}=[\sigma,\omega-n_1\zeta],\quad \dot{\zeta}=[\zeta,\omega], \quad (3.9)$$

$$\omega^0=(0,0,n_1)^*,\quad \sigma^0=(1,0,0)^*,\quad \zeta^0=(0,0,1)^*,\quad p^0=(0,0,p_0)^*,\quad p_0=\mathrm{const}. \quad (3.10)$$

Исследование устойчивости решения (3.10) рассмотрено [7–9] в общей постановке. Сохраняя для возмущений

$$\omega'_1=\omega_1,\quad \omega'_2=\omega_2,\quad \omega'_3=\omega_3-n;\quad \sigma'_1=\sigma_1-1,\quad \sigma'_2=\sigma_2,\quad \sigma'_3=\sigma_3;$$
$$\zeta'_1=\zeta_1,\quad \zeta'_2=\zeta_2,\quad \zeta'_3=\zeta_3-1;\quad p'_1=p_1,\quad p'_2=p_2,\quad p'_3=p_3-p_0$$

прежние обозначения, используя интегралы (3.5), (3.8) и косинусов, имеем по методу Четаева инвариант возмущенного движения

$$V_1(\omega,\zeta,p,\sigma\,|\,\lambda^0)=V(\omega,\zeta,p\,|\,\lambda^0)+n_1^2(B_2\sigma_2^2+B_3\sigma_3^2)=V_1^0, \quad (3.11)$$

где

$$V=\langle\omega,A\omega\rangle-2n_1\langle\zeta,A\omega\rangle+n_1^2h\langle\zeta,\zeta\rangle-2n_1\langle\zeta,p\rangle+\lambda_i^0p_i^2,$$
$$A=\mathrm{diag}(A_1,A_2,A_3),\quad B_j=3(G_j-G_1),\quad j=\overline{1,2}, \quad (3.12)$$
$$V_1^0=\mathrm{const},\quad h=A_3+p_0n_1^{-1},\quad 0<\lambda_i^0=\mathrm{const},\quad i=\overline{1,3}.$$

Условия Сильвестра для квадрики (3.11) дают неравенства

$$A_i>0,\quad \min\lambda_i^0>(h-\max A_i)^{-1}, \quad (3.13)$$
$$h>\max A_i,\quad G_j-G_1>0,$$

из которых первые шесть выполняются по смыслу $A_i$ и выбору $\lambda_i^0$, а последние являются достаточными условиями устойчивости по переменным $\omega,\zeta,p,\sigma$, если движение (3.7) не возмущается. При выполнении условий (3.13) для квадрики (3.11) с матрицей $Q=Q(\lambda_i^0)$ можно, используя для ее собственных чисел $\mu_k(\lambda_i^0)$ неравенства

$(\operatorname{tr} Q^{-1})^{-1} < \mu_k < \operatorname{tr} Q \, (\operatorname{tr} Q = \Sigma q_{jj})$, получить оценку области возмущений

$$b^{-1}V^0_1 < |\omega| < a^{-1}V^0_1; \quad b^{-1}n_1^{-2}V^0_1 < |\zeta| < a^{-1}n_1^{-2}V^0_1;$$

$$b^{-1}n_1^{-2}V^0_1 < \sigma_2^2 + \sigma_3^2 < a^{-1}n_1^{-2}V^0_1.$$

Здесь

$$a(\lambda_*, \lambda^*) = \min\left\{B_j, A_*[\lambda_*(h - A^*) - 1]\left[\lambda^*(h + A^*) + \frac{h}{A_*} - 2\right]^{-1}\right\},$$

$$b(\lambda^*) = \max\{B_j, A^*[1 + \lambda^* A^* + hA_*^{-1}]\},$$

$$A_* = \min_i A_i, \quad A^* = \max_i A_i, \quad \lambda^* = \max_i \overset{0}{\lambda}_i,$$

$$\lambda_* = \min_i \overset{0}{\lambda}_i > (h - A^*)^{-1},$$

а остальные обозначения определяются равенствами (3.12).

Учитывая [7–9], отметим, что вопрос устойчивости (3.10) затронут для иллюстрации полезности инварианта (3.8) в этом отношении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mayer A., Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss. Math.-Phys., **40** (1896).
2. Демин В. Г., Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения, М., 1968.
3. Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, М., 1966.
4. Румянцев В. В., Вестник МГУ, № 4 (1957).
5. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **22**, 416 (1973).
6. Якоби К., Лекции по динамике, М.—Л., 1936.
7. Румянцев В. В., Об устойчивости стационарных движений спутников, М., 1967.
8. Белецкий В. В., В сб.: Искусственные спутники Земли, вып. 3, 1959.
9. Колесников Н. Н., ПММ, **30**, вып. 3 (1966).

*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
17/II 1975

*I. KEIS*

**DÜNAAMILISTE SÜSTEEMIDE ÜHE INVARIANDI KUJUST**

Töös määratakse tingimused, mille täitmise korral dünaamilised süsteemid omandavad invariandi, mis on esitatav energia ja impulsi invariandi lineaarse kombinatsioonina. Tuuakse näiteid nende tingimuste täitumise kohta mittetsentraalses gravitatsiooniväljas liikuva gürostaatilise süsteemi jaoks.

*I. KEIS*

**ON A NEW TYPE OF AN INVARIANT OF DYNAMIC SYSTEMS**

The form of a new invariant is a linear combination of energy and impulses. Various existence conditions of the invariant of this type for holonomous and nonholonomous systems are put forward in this article. They are simplified for some class of mechanical and gyrostatical systems. The case of a limited problem of the gyrostate's translatory motion on a Newton gravitational field fulfils these conditions and proves the existence of the invariant.