EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 24. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1975. NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1975, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1975.3.03

УДК 62—501.12—503.3

Ю. НУРГЕС, Ю. ЯАКСОО

О КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМАХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим управляемую и наблюдаемую динамическую систему

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t)+Gu(t), \\ y(t) &= Hx(t), \\ t &= 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

где x — вектор состояния размерности n, u — вектор входов размерности m, y — вектор выходов размерности p, F, G, H — матрицы с постоянными элементами соответствующих размеров. Как известно [1], отображение вход—выход определяется единственной ганкелевой матрицей, бесконечной в двух направлениях

$$\mathfrak{H} = \begin{bmatrix} M(1) & M(2) & M(3) & \ldots \\ M(2) & M(3) & M(4) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix},$$

где $M(i) = HF^{i-1}G$, $i = 1, 2, \ldots$, матрицы марковских параметров системы. Однако для данной ганкелевой матрицы $\mathfrak{H}$ можно построить класс управляемых и наблюдаемых систем (1), называемых минимальными реализациями отображения вход—выход, причем два представителя этого класса (F, G, H) и $(\overline{F}, \overline{G}, \overline{H})$ связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \overline{F} &= TFT^{-1}, \\ \overline{G} &= TG, \\ \overline{H} &= HT^{-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

где T — любая невырожденная матрица порядка $n\times n$. Поскольку при любой физической системе измеряются лишь входной и выходной векторы, то для большинства задач анализа и синтеза линейных систем справедливым описанием системы может служить любой представитель из класса (2). Представляет интерес задача отыскания тройки $(\overline{F}, \overline{G}, \overline{H})$, которая обладает определенными специальными свойствами и называется канонической формой системы (1).

Для идентификации систем важное значение имеет количество оцениваемых параметров. Система (1) описывается посредством $n(n+m+p)$ параметров матриц F, G, H. Однако, во-первых, не все эти параметры независимы с точки зрения отображения вход—выход, т. е. существует матрица T, приводящая некоторые параметры к ранее выбранным значениям (0 и 1). Количество независимых параметров N зависит от априорной информации о системе. Если известны лишь n, m,

p, можно утверждать [2], что $N \leqslant n(m+p)$. Во-вторых, минимизация числа независимых параметров малоэффективна, если расположение этих параметров в матрицах F, G, H неизвестно. Целью данной работы является изучение класса канонических форм с фиксированным расположением n^2 зависимых параметров.

Как известно [1], матрица наблюдаемости системы (1)

$$\mathfrak{D} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

имеет ранг, равный n, если система наблюдаема, и матрица управляемости системы (1)

$$\mathfrak{C} = [G \,\vdots\, FG \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, F^{n-1}G]$$

имеет ранг, равный n, если система управляема. Из уравнений (2) определим матрицы наблюдаемости и управляемости эквивалентной системы

$$\bar{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}T^{-1}$$

и

$$\bar{\mathfrak{C}} = T\mathfrak{C}.$$

Для наблюдаемых систем с одним выходом матрица наблюдаемости является неособенной матрицей порядка $n \times n$. Следовательно, существует эквивалентная система с матрицей наблюдаемости, равной I_n. Легко проверить, что такая $\bar{\mathfrak{D}}$ возникает при канонической форме

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 \,\vdots\, I_{n-1} \\ \hline a^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} x(t) + \bar{G}u(t), \\ y(t) &= [10\ldots0]x(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Аналогично находится каноническая форма

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0^{\mathrm{T}} & \vdots \\ \cdots & b \\ I_{n-1} & \vdots \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \tag{4}$$

$$y(t) = \bar{H}x(t)$$

для управляемых систем с одним входом, имеющих матрицу управляемости, равную I_n. Канонические формы (3) и (4) имеют по $n(1+m)$ и $n(1+p)$ оцениваемых параметров.

Для систем со многими входами и выходами канонических форм с n^2 фиксированными параметрами не существует и расположение зависимых параметров выясняется, как правило, только в процессе идентификации.

Назовем изложенные ниже формы представления систем каноническими формами особого класса динамических систем или просто особыми формами, так как не любая система (1) приводима к такой форме.

Многовыходным аналогом канонической формы (3) является особая форма

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 \,\vdots\, I_{n-p} \\ \hline A \end{bmatrix} x(t) + \bar{G}u(t), \\ y(t) &= [I_p \,\vdots\, 0]x(t). \end{aligned} \tag{5}$$

Система (1) приводима к форме (5), если существует неособенная матрица T_A такая, что

$$T_A F T_A^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I_{n-p} \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{A} \end{array}\right],$$

$$H T_A^{-1} = [I_p \,\vdots\, 0]$$

или

$$\begin{cases} t_i^{\mathrm{T}} F = t_{i+p}^{\mathrm{T}}, & i = 1, \ldots, n-p; \\ t_j^{\mathrm{T}} = h_j^{\mathrm{T}}, & j = 1, \ldots, p, \end{cases}$$

где t_i^{T} — i-я строка матрицы T_A, h_j^{T} — j-я строка матрицы H. Следовательно,

$$T_A = [I_n \,\vdots\, 0]\mathfrak{D}$$

и система (1) приводима к особой форме (5), если n первых строк ее матрицы наблюдаемости линейно независимы. Тогда

$$A = [t_{n-p+1} \ldots t_n]^{\mathrm{T}} \; F T_A^{-1},$$
$$\bar{G} = T_A G.$$

Многовходным аналогом канонической формы (4) является особая форма

$$x(t+1) = \left[\begin{array}{c:c} 0 & \\ \hdashline I_{n-m} & B \end{array}\right] x(t) + \left[\begin{array}{c} I_m \\ \hdashline 0 \end{array}\right] u(t), \tag{6}$$
$$y(t) = \bar{H} x(t).$$

Система (1) приводима к особой форме (6), если n первых столбцов ее матрицы управляемости линейно независимы. Тогда

$$T_B^{-1} = \mathfrak{C} \left[\begin{array}{c} I_n \\ \hdashline 0 \end{array}\right],$$

$$B = \bar{T}_B F T_B^{-1},$$

$$\bar{H} = H T_B^{-1},$$

где $\bar{T}_B$ — матрица, составленная из $n-m$ последних столбцов матрицы T_B.

Особое место в анализе линейной системы занимает переходная матрица состояния F. Желательно получить именно для матрицы $\bar{F}$ наиболее простую форму. Обобщением особой формы (5) является особая форма

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \left[\begin{array}{c:c} 0 & I_{n-q} \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{A_q} \end{array}\right] x(t) + G_q u(t), \\ y(t) &= \left[\begin{array}{c:c} I_q & 0 \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{C_q} \end{array}\right] x(t), \end{aligned} \tag{7}$$

$$1 \leqslant q < p,$$

которая достигается, если

$$\text{ранг}[h_1, \ldots, h_q, F^{\mathrm{T}} h_1, \ldots, F^{\mathrm{T}} h_q, \ldots$$
$$\ldots, (F^{|n/q|-1})^{\mathrm{T}} h_1, \ldots, (F^{|n/q|-1})^{\mathrm{T}} h_q, (F^{|n/q|})^{\mathrm{T}} h_1, \ldots, (F^{|n/q|})^{\mathrm{T}} h_i] = n, \tag{8}$$

где $|n/q|$ — целая часть от дроби n/q, $i = n - |n/q|$.

Обобщением особой формы (6) является особая форма

$$x(t+1)=\left[\begin{array}{c;{2pt/2pt}c} 0 & B_r \\ I_{n-r} & \end{array}\right]x(t)+\left[\begin{array}{c;{2pt/2pt}c} I_r & D_r \\ 0 & \end{array}\right]u(t)$$

$$y(t)=H_r x(t), \quad 1\leqslant r<m, \tag{9}$$

которая достигается, если

$$\text{ранг}[g_1, \ldots, g_r, Fg_1, \ldots, Fg_r, \ldots$$

$$\ldots, F^{|n/r|-1}g_1, \ldots, F^{|n/r|-1}g_r, F^{|n/r|}g_1, \ldots, F^{|n/r|}g_j]=n, \tag{10}$$

где g_j — j-й столбец матрицы G и $j=n-|n/r|$.

Переход от одной особой формы к другой возможен лишь при условии выполнения соответствующих требований (8) или (10). Легко показать, что переход от формы (5) к форме (6) и наоборот осуществим, если в левом верхнем углу ганкелевой матрицы $\mathfrak{H}$ расположена $n\times n$ неособенная подматрица. Представляет интерес переход от формы (5) к форме (7), так как при особой форме представления сложность системы определяется не величинами n или p, а именно величиной q. Для иллюстрации этого утверждения, а также для выяснения преимуществ особых форм рассмотрим три наиболее часто возникающие при анализе и синтезе систем задачи.

1. Сокращение размерности выходного вектора

Пусть система (1) является наблюдаемой. Если она приводима к особой форме (7), то ее подсистема с q первыми выходами также наблюдаема, так как матрица наблюдаемости пары

$$\overline{F}=\left[\begin{array}{c;{2pt/2pt}c} 0 & I_{n-q} \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{A_q} \end{array}\right],$$

$$\overline{H}=[I_q \,\vdots\, 0]$$

имеет вид

$$\mathfrak{O}=\left[\begin{array}{c} I_n \\ \hdashline * \end{array}\right], \tag{11}$$

где * обозначает несущественную, но подходящую матрицу порядка $n(q-1)\times n$. Следовательно, последние $p-q$ выходов системы (1) не дают дополнительной информации о поведении системы.

2. Собственные значения матрицы $\overline{F}$

Для простоты изложения предположим $n=kq$. Тогда

$$\overline{F}-\lambda I_n=\begin{bmatrix} 0 & I_q & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & I_q\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & I_q \\ A_1 & A_2 & A_3\ldots & A_k \end{bmatrix}-\lambda I_n=\left[\begin{array}{c;{2pt/2pt}c} \Lambda & \begin{array}{c} 0 \\ \hdashline I_q \end{array} \\ \hdashline A_{1,k-1} & A_k-\lambda I_q \end{array}\right],$$

где Λ блочная матрица порядка $(n-q)\times(n-q)$

$$\Lambda=\begin{bmatrix} -\lambda I_q & I_q & 0\ldots & 0 \\ 0 & -\lambda I_q & I_q\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & I_q \\ 0 & 0 & 0\ldots & -\lambda I_q \end{bmatrix}$$

и [3]

$$\det(\bar{F}-\lambda I_n)=\det\Lambda\cdot\det\left(A_k-\lambda I_q-A_{1,k-1}\Lambda^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \hdashline I_q\end{bmatrix}\right)=$$
$$=(-1)^{n-q}\lambda^{n-q}\det Q(\lambda),$$

где

$$Q(\lambda)=A_k-\lambda I_q+\frac{1}{\lambda}A_{k-1}+\frac{1}{\lambda^2}A_{k-2}+\ldots+\frac{1}{\lambda^{k-1}}A_1.$$

Для нахождения собственных значений матрицы $\bar{F}$ находится определитель матрицы $Q(\lambda)$ порядка $q\times q$ и решается уравнение

$$\det Q(\lambda)=0.$$

3. Вывод модели авторегрессии

Пусть динамическая система имеет каноническое представление (5). Изложим процедуру вывода модели авторегрессии из модели состояния. Для систем с одним входом и выходом такая процедура разработана в [4]. Для исключения вектора состояния воспользуемся приемами, приведенными в [5].

Определим следующие матрицы:

$$\begin{aligned}
S&=[I_n\,\vdots\,0] &&\text{порядка}\quad n\times pn^*,\\
S_1&=[I_{pn^*}\,\vdots\,0] &&\text{порядка}\quad pn^*\times p(n^*+1),\\
S_2&=[0\,\vdots\,I_{pn^*}] &&\text{порядка}\quad pn^*\times p(n^*+1),\\
S_3&=[0\,\vdots\,I_n] &&\text{порядка}\quad p\times n,
\end{aligned}$$

где $n^*=n-p+1.$

Рассмотрим итерацию уравнений состояния и выхода

$$\begin{aligned}
y(t)&=Hx(t),\\
y(t+1)&=HFx(t)+HGu(t),\\
&\;\vdots\\
y(t+n-p)&=HF^{n-p}x(t)+\sum_{j=0}^{n-p-1}HF^{n-p-j-1}Gu(t+j),
\end{aligned}$$

которую можно представить в матричной форме

$$y^*(t)=\begin{bmatrix}H\\ HF\\ \vdots\\ HF^{n-p}\end{bmatrix}x(t)+S_1Ru^*(t), \tag{12}$$

где

$$[y^*(t)]^{\mathrm{T}}=[y^{\mathrm{T}}(t),\ y^{\mathrm{T}}(t+1),\ \ldots,\ y^{\mathrm{T}}(t+n-p)],$$
$$[u^*(t)]^{\mathrm{T}}=[u^{\mathrm{T}}(t),\ u^{\mathrm{T}}(t+1),\ \ldots,\ u^{\mathrm{T}}(t+n-p)],$$

$$R=\begin{bmatrix}0 & 0 & \ldots & 0\\ HG & 0 & \ldots & 0\\ HFG & HG & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \\ HF^{n-p}G & & & HG\end{bmatrix}.$$

Умножим выражение (12) слева на матрицу S. Поскольку матрица наблюдаемости при канонической форме (5) имеет вид (11), получим

$$Sy^*(t)=x(t)+SS_1Ru^*(t). \tag{13}$$

Следующий шаг итерации дает

$$Sy^*(t+1)=Fx(t)+SS_2Ru^*(t). \tag{14}$$

Подставляя $x(t)$ из выражения (13) в (14), получаем

$$Sy^*(t+1)=FSy^*(t)+[SS_2-FSS_1]Ru^*(t). \tag{15}$$

Заметим, что при данной структуре матрицы F существенны только последние p ряда уравнения (15), поскольку первые $n-p$ ряда дают тождество. Используя соотношение

$$S_3F=A$$

и обозначая

$$P=[S_3SS_2-ASS_1]R,$$

находим модель авторегрессии в следующем виде

$$S_3Sy^*(t+1)=ASy^*(t)+Pu^*(t). \tag{16}$$

Уравнение авторегрессии системы с одним входом и одним выходом

$$y(t+n)=-a_ny(t)-\ldots-a_1y(t+n-1)+p_nu(t)+\ldots+p_1u(t+n-1)$$

получим как частный случай из уравнения (16).

Для перехода от особой формы (5) к особой форме (7) должно выполняться требование (8). Учитывая факт, что матрица наблюдаемости системы (5) имеет вид (11), вместо требования (8) достаточно выполнить ограничение

$$\text{ранг } K=s,$$

где

$$s=\begin{cases}|n/p|(p-q), & \text{если } n-|n/p|\,p<q;\\ n-(|n/p|+1)q, & \text{если } n-|n/p|\,p\geqslant q.\end{cases}$$

Матрица K порядка $s\times s$ получается из матрицы наблюдаемости (11) следующим образом:

а) матрица наблюдаемости делится на блоки порядка $p\times n$;

б) вычеркиваются n первых строк матрицы наблюдаемости;

в) вычеркиваются последние $p-q$ строк в каждом блоке;

г) составляется матрица порядка $s\times n$ из первых s оставшихся строк матрицы наблюдаемости;

д) полученная матрица делится слева на $|n/p|$ блоки порядка $s\times p$ и на один блок порядка $s\times(n-|n/p|p)$;

е) вычеркиваются q первых столбцов в каждом блоке.

Аналогичные результаты можно получить и для особых форм (6) и (9) при рассмотрении матрицы управляемости.

Приведенные особые формы представляют интерес по следующим причинам:

1) они имеют $n(m+p)$ оцениваемых параметров;

2) расположение и значение n^2 зависимых параметров фиксировано априорно;

3) особые формы (5) и (6) достигаемы практически всегда, если ганкелева матрица $\mathfrak{H}$ определена по статистическим данным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М., Очерки по математической теории систем, М., 1971.
2. Tether A. J., Larson R. E., Generic forms for canonical multiinput/output linear constant systems, Fourth Hawaii Intern. Conf. on System Sciences, 1971.
3. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., 1967.

4. Ивановский Р. И., Изв. АН СССР, Техн. киб., № 1, 180—189 (1973).
5. Passeri D. P., Herget C. J., 13th Joint Autom. Contr. Conf. of the American Automatic Control Council, Stanford, paper 28-2, 1972.

Институт кибернетики Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию 8/VII 1974

Ü. NURGES, Ü. JAAKSOO

MÕNEDE LINEAARSETE SÜSTEEMIDE KANOONILISTEST KUJUDEST

Vaadeldakse dünaamiliste süsteemide kanoonilisi kujusid, mille n^2 sõltuva parameetri väärtus ja asend on aprioorselt antud. Leitakse vajalikud tingimused selliste kanooniliste kujude saamiseks, samuti üleminekuks ühelt kujult teisele.

Ü. NURGES, Ü. JAAKSOO

ON THE CANONICAL REPRESENTATION OF SOME LINEAR SYSTEMS

The canonical representations with $n(m+p)$ free parameters and n^2 fixed parameters, where n is the dimension of state vector, m is the dimension of input vector, p is the dimension of output vector of linear systems, are studied. Conditions for the transformation of a system to the corresponding canonical form are obtained. The reduction of the dimension of output vector, the calculation of eigenvalues of state transition matrix, the derivation of autoregressive model from the state variable description are considered as examples of the application of canonical forms.