

Л. СОССИ

МЕТОД СИНТЕЗА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОКРЫТИЙ

Синтез дискретно-слоистого диэлектрического интерференционного покрытия с заданной зависимостью энергетического коэффициента пропускания $T(k)$ от волнового числа k осуществляется путем нахождения удовлетворяющего этому условию неоднородного покрытия с последующей аппроксимацией его системой дискретных слоев. Показатель преломления неоднородного покрытия как функция удвоенной оптической толщины определяется с помощью преобразования Фурье. Оценена погрешность метода и указаны возможности введения дополнительных поправок. На конкретном примере проиллюстрирована эффективность метода.

Введение

Проблема синтеза диэлектрических интерференционных покрытий не имеет до сих пор исчерпывающего решения. Существующие методы или относятся к наиболее простым типам спектральных зависимостей, или очень громоздки с вычислительной точки зрения. Поиск решения в таких громоздких методах ведется в известной мере ощупью, путем постепенного улучшения параметров и отбрасывания вариантов, плохо удовлетворяющих заданным спектральным условиям. Хотя при наличии вычислительной техники большой объем вычислений сам по себе не является серьезным препятствием, тем не менее следует отдать предпочтение методу, не столь требовательному в отношении вычислений и вместе с тем имеющему возможно более простое теоретическое обоснование.

Мы говорим здесь об общей задаче синтеза, где определению подлежат не только показатели преломления, но и толщины слоев. Ограниченная задача синтеза, когда толщины заданы и варьируются только показатели преломления, математически проще, но возможности осуществления заданных спектральных свойств покрытия сильно сужаются. К тому же математическая простота имеет место только в том случае, если толщины слоев задаются равными или целократными наименьшей толщине, тогда как произвольное задание отношений толщин вновь усложняет задачу, не говоря уже о том, что произвольный выбор отношений толщин был бы лишен теоретического обоснования.

Излагаемый в настоящей статье метод синтеза покрытий свободен от указанных недостатков. Он является вполне общим и не требует введения каких-либо ограничительных условий. Задается только нужная спектральная кривая, тогда как требуемое для ее реализации число слоев, их толщины и показатели преломления — все это получается в результате единой процедуры синтеза. Притом оказывается возможным толщины и показатели преломления слоев синтезируемого покрытия выбирать с некоторой свободой в определенных интервалах без существ-

венного ухудшения спектральной кривой. Это важно с точки зрения возможностей использования реальных веществ для слоев покрытия. Математический аппарат предлагаемого метода теоретически крайне прост, не требует громоздких вычислений и почти не зависит от конкретного вида задаваемой спектральной кривой.

Синтез интерференционного покрытия в виде неоднородного диэлектрического слоя

Нашей первой задачей является нахождение неоднородного слоя, обладающего заданной спектральной характеристикой. Обозначим показатель преломления искомого слоя в зависимости от координаты u через $n(u)$. При условии отсутствия скачка показателя преломления на границах слоя величины r/t и $1/t$, где r — амплитудный коэффициент отражения и t — амплитудный коэффициент пропускания, выражаются через бесконечные сходящиеся ряды [1]:

$$\begin{aligned} \frac{r}{t} = \exp \left(-ik \int_{\xi_0}^{\xi_1} n(u) du \right) \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\xi_0}^{\xi_1} da(\xi_1) \int_{\xi_0}^{\xi_1} da^*(\xi_2) \dots \\ \dots \int_{\xi_0}^{\xi_{2m-1}} da^*(\xi_{2m-1}) \int_{\xi_0}^{\xi_{2m}} da(\xi_{2m+1}) \end{aligned} \quad (1)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} = \exp \left(ik \int_{\xi_0}^{\xi_1} n(u) du \right) \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\xi_0}^{\xi_1} da^*(\xi_1) \int_{\xi_0}^{\xi_1} da(\xi_2) \dots \\ \dots \int_{\xi_0}^{\xi_{2m-2}} da^*(\xi_{2m-1}) \int_{\xi_0}^{\xi_{2m-1}} da(\xi_{2m}) \end{aligned} \quad (2)$$

(здесь первый член равен единице). В формулах (1) и (2)

$$a = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{dn}{d\xi_1} \frac{1}{2n} \exp \left(2ik \int_{\xi_0}^{\xi_1} n(u) du \right) d\xi_1, \quad (3)$$

k — волновое число, ξ_0 , ξ_1 — нижняя и верхняя границы слоя, а звездочка означает комплексное сопряжение. Добавим к этим выражениям еще другое выражение для t [2]:

$$\begin{aligned} t = \exp \left(-ik \int_{\xi_0}^{\xi_1} n(u) du \right) \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\xi_0}^{\xi_1} da^*(\xi_1) \int_{\xi_0}^{\xi_1} da(\xi_2) \times \\ \times \int_{\xi_0}^{\xi_2} da^*(\xi_3) \dots \int_{\xi_0}^{\xi_{2m-2}} da^*(\xi_{2m-1}) \int_{\xi_0}^{\xi_{2m-1}} da(\xi_{2m}), \end{aligned} \quad (4)$$

где первый член, как и в (2), равен единице.

Так как стоящие перед знаком суммы в формулах (1), (2) и (4) экспоненциальные множители влияют только на фазу r и t , то в дальнейшем будем их опускать. Чтобы упростить формулу (3), примем за новый аргумент удвоенный оптический путь света, отсчитываемый от произвольной точки ξ' :

$$x = 2 \int_{\xi'}^{\xi} n(u) du. \quad (5)$$

Тогда

$$a = \int_{x_0}^x \frac{dn}{dx_1} \frac{1}{2n} \exp(ikx_1) dx_1, \quad (6)$$

где

$$x_0 = 2 \int_{\xi'}^{\xi_0} n(u) du.$$

Учитывая быструю сходимость рядов (см. [1]) в формулах (1), (2) и (4), заменим их приближенными выражениями. При малых значениях $|a|$ достаточно взять в (1) первый член

$$r \approx a.$$

Но так как условие $|a| \ll 1$ выполняется не всегда, перейдем к следующему приближению. Формулы (2) и (4) тогда дадут:

$$\frac{1}{t} \approx \frac{1}{t_2} = 1 + \int_{x_0}^x da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2) \quad (7)$$

и

$$t \approx t_2 = 1 + \int_x^{x_0} da^*(x_1) \int_{x_0}^{x_1} da(x_2). \quad (8)$$

Найдем отсюда квадраты абсолютных величин $\frac{1}{|t_2|^2} = \frac{1}{T_2}$ и $|t_2|^2 = T_2$:

$$\frac{1}{T_2} = 1 + A + \frac{A^2}{4} + a^2, \quad (9)$$

$$T_2 = 1 - A + \frac{A^2}{4} + a^2, \quad (10)$$

где

$$A = |a|^2 \quad (11)$$

и

$$a = \int_{x_0}^x \frac{n'}{2n} \cos kx_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{n'}{2n} \sin kx_2 dx_2 dx_1 - \int_{x_0}^x \frac{n'}{2n} \sin kx_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{n'}{2n} \cos kx_2 dx_2 dx_1. \quad (12)$$

Из формул (9) и (10) следует:

$$A = \frac{1}{2}(T_2^{-1} - T_2) \quad (13)$$

или

$$T_2 = \sqrt{1 + A^2} - A. \quad (14)$$

В основу дальнейшего развития метода мы и положим это приближенное выражение. Задача принимает теперь следующий вид: найти такую зависимость $n(x)$ показателя преломления слоя от удвоенного оптического пути x , при которой выполняется возможно точнее равенство

$$\left| \int_{x_0}^x \frac{n'}{2n} \exp(ikx_1) dx_1 \right|^2 = \frac{1}{2}(T^{-1} - T), \quad (15)$$

где $T(k)$ — заданный коэффициент пропускания слоя.

Для решения этой задачи используем преобразование Фурье. Прежде всего, учитывая, что вне покрытия $n'/2n$ равно нулю, отодвинем пределы интегрирования в (15) в бесконечность:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n'}{2n} \exp(ikx) dx \right|^2 = \frac{1}{2}(T^{-1} - T). \quad (15')$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n'}{2n} \exp(ikx) dx = Q(k) e^{i\varphi(k)}, \quad (16)$$

где для краткости обозначено

$$Q(k) \equiv \sqrt{\frac{1}{2}(T^{-1} - T)}, \quad (17)$$

а $\varphi(k)$ — вообще говоря произвольная фаза, которая, однако, должна гарантировать вещественность n . Обращая интеграл Фурье (16), получаем

$$\frac{n'}{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(k) e^{i\varphi(k)} e^{-ikx} dk. \quad (18)$$

Так как коэффициент пропускания покрытия — всегда четная функция частоты, то и задаваемая характеристика $T(k)$ должна быть четной. Если для простоты положим $|\varphi| = \text{const}$, то, как вытекает из (17), для вещественности $n'/2n$ необходимо, чтобы φ было нечетно, т. е. чтобы $\varphi(-k) = -\varphi(k)$; при этом формула (17) принимает вид

$$\frac{n'}{2n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Q(k) \cos(kx - \varphi) dk. \quad (19)$$

Выбор φ произволен; тем самым мы имеем возможность получать в одной и той же задаче синтеза различные решения, соответствующие

различным значениям φ . В дальнейшем примем для определенности $\varphi = 0$ и перепишем формулу (19) в виде

$$\frac{n'}{2n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Q(k) \cos kx \, dx. \quad (20)$$

Этой формулой заканчивается первый этап процедуры синтеза: мы нашли для неоднородного покрытия такую зависимость показателя преломления от удвоенного оптического пути x , при которой приближенно реализуется заданный коэффициент пропускания $T(k)$ как функция частоты. Следует, однако, заметить, что величина $n'/2n$ получается согласно (20) отличной от нуля во всем бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$, тогда как синтезируемое покрытие должно иметь конечную и притом не слишком большую толщину. Поэтому следует выбрать для покрытия лишь ту область (обозначим ее через (x_0, x_s)), где формула (20) дает для $n'/2n$ наиболее отличные от нуля значения, тогда как вне этой области следует положить $n'/2n = 0$. Согласно сказанному, заменим формулу (20) следующим выражением:

$$\begin{aligned} \frac{n'}{2n} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Q(k) \cos kx \, dk, & x_0 \leq x \leq x_s, \\ \frac{n'}{2n} &= 0, & x < x_0, \quad x > x_s. \end{aligned} \quad (21)$$

Эта замена, естественно, вносит в результат дополнительную неточность. Мы имеем, однако, возможность внести поправку. Для этого, вычислив (по точной формуле) коэффициент пропускания для синтезированного по формуле (21) покрытия и обозначив соответствующую (согласно (17)) величину Q через Q_a , разность $Q - Q_a$ мы должны прибавить к прежнему значению Q , использованному в формуле (21). Тогда вместо (21) будем иметь следующую формулу:

$$\begin{aligned} \frac{n'}{2n} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (2Q - Q_a) \cos kx \, dk, & x_0 \leq x \leq x_s, \\ \frac{n'}{2n} &= 0, & x < x_0, \quad x > x_s, \end{aligned} \quad (22)$$

которая и даст улучшенный вариант синтезируемого покрытия.

Аппроксимация неоднородного покрытия дискретно-слоистым покрытием

Переходим ко второму этапу синтеза с целью найти вместо неоднородного покрытия дискретно-слоистое. Для этого заменим непрерывную кривую $n(x)$ ступенчатой кривой, по возможности точно имитирующей ход прерывной кривой. Чтобы оценить вносимую такой заменой погрешность, преобразуем формулу (6) для a . Интегрируя по частям, находим:

$$a = \ln \sqrt{n(x)} e^{+ikx} - \ln \sqrt{n(x_0)} e^{ikh_0} - ik \int_{x_0}^x \ln \sqrt{n(x_1)} e^{ikh_1} \, dx_1. \quad (23)$$

Здесь $n(x)$ означает показатель преломления синтезированного неоднородного покрытия. Если заменим $n(x)$ показателем преломления

$n_a(x)$ аппроксимирующего дискретно-слоистого покрытия, то при условии, что на границах и вне покрытия $n_a = n$, ошибка Δa выразится в виде

$$\Delta a = ik \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \sqrt{\frac{n(x)}{n_a(x)}} e^{ikx} dx. \quad (24)$$

По теореме Парсеваля отсюда имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Delta a|^2}{k^2} dk = 2\pi \int_{x_0}^{x_s} \left(\ln \sqrt{\frac{n(x)}{n_a(x)}} \right)^2 dx. \quad (25)$$

Если обозначим наибольшее по абсолютной величине отклонение отношения $\frac{n(x)}{n_a(x)}$ от единицы через β , то учитывая малость β , из формулы (25) находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Delta a|^2}{k^2(x_s - x_0)} dk < \frac{\pi\beta^2}{2}. \quad (26)$$

По этой формуле можно судить о средней величине ошибки $|\Delta a|$. А так как, согласно формулам (11), (13) и (17), $|a|^2 \approx Q^2$, то эта ошибка характеризуется и погрешность, вносимую аппроксимацией в коэффициент пропускания. Более детальная оценка погрешности возможна только в рамках конкретной задачи синтеза.

Пример

В качестве примера проведем синтез светофильтра, коэффициент отражения которого задается в виде

$$R(k) = \begin{cases} R_a = \text{const}, & k_1 \leq k \leq k_2, \\ 0, & k < k_1, k > k_2. \end{cases} \quad (27)$$

В этом случае

$$Q(k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{R_a(1 - R_a/2)}{1 - R_a}}, & k_1 \leq k \leq k_2, \\ 0 & k < k_1, k > k_2. \end{cases} \quad (28)$$

Подставляя в (21), имеем

$$\frac{n'}{2n} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{R_a(1 - R_a/2)}{1 - R_a}} \left(\frac{\sin k_2 x}{x} - \frac{\sin k_1 x}{x} \right), \quad (29)$$

$$\frac{n'}{2n} = 0, \quad x < x_0, \quad x > x_s.$$

Интегрируя, находим

$$n(x) = n_0 \exp \left\{ \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{R_a(1 - R_a/2)}{1 - R_a}} \cdot [(\text{Si}(k_2 x) - \text{Si}(k_1 x)) - (\text{Si}(k_2 x_0) - \text{Si}(k_1 x_0))] \right\}. \quad (30)$$

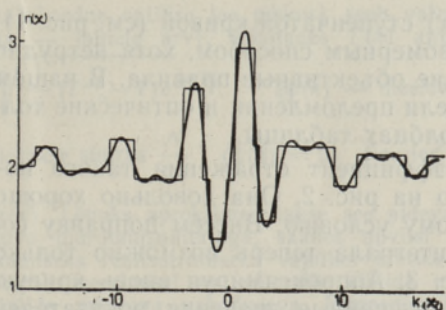


Рис. 1.

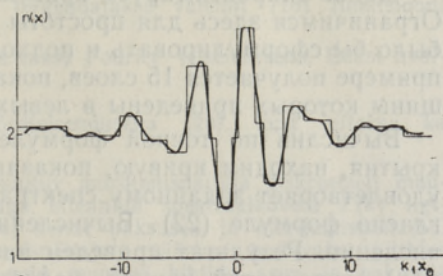


Рис. 3.

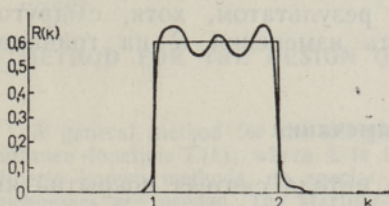


Рис. 2.

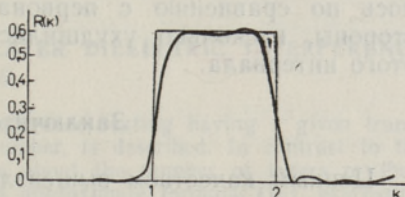


Рис. 4.

Номер слоя и ограни- вающих сред	Показатель преломления		Оптическая толщина, $\lambda/4$	
	до поправки	после поправки	до поправки	после поправки
0	2,0	2,05	—	—
1	2,15	1,97	0,91	1,76
2	1,97	2,15	2,05	0,95
3	2,22	1,95	0,95	1,10
4	1,92	1,86	2,05	0,91
5	2,60	2,55	0,81	0,81
6	1,92	1,95	0,29	0,33
7	1,40	1,40	0,72	0,67
8	1,92	1,95	0,29	0,33
9	2,95	2,85	0,72	0,67
10	2,15	2,05	0,29	0,33
11	1,58	1,58	0,86	0,67
12	2,15	2,24	2,00	0,86
13	1,87	2,09	2,91	1,19
14	2,11	1,88	2,05	0,91
15	1,92	2,05	0,91	0,98
16	2,08	1,95	—	—

Границы слоя x_0 , x_s следует выбирать, очевидно, так, чтобы величина $\text{Si}(k_2x) - \text{Si}(k_1x)$ была при $x < x_0$ и $x > x_s$ достаточно близка к нулю. В нижеследующем примем $n_0 = 2$; $R_a = 0,6$; $k_2 = 2k_1$. Тогда

$$n(x) = 2 \exp \{ 0,652 [(\text{Si}(2k_1x) - \text{Si}(k_1x)) - (\text{Si}(2k_1x_0) - \text{Si}(k_1x_0))] \}, \quad (31)$$

причем здесь можем с достаточным основанием положить $k_1x_0 = -6\pi$ и $k_0x_s = 6\pi$. График функции $n(x)$ по этой формуле показан на рис. 1.

Полная оптическая толщина $h = \frac{x_s - x_0}{2} = \frac{9}{2} \lambda_0$, где $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$ и

$k_0 = \frac{3k_1}{2}$ — волновое число в середине рассматриваемого участка спектра.

Далее аппроксимируем кривую $n(x)$ ступенчатой кривой (см. рис. 1). Ограничимся здесь для простоты глазомерным способом, хотя нетрудно было бы сформулировать и подходящие объективные правила. В нашем примере получается 15 слоев, показатели преломления и оптические толщины которых приведены в левых столбцах таблицы.

Вычислив по точной формуле коэффициент отражения такого покрытия, находим кривую, показанную на рис. 2. Она довольно хорошо удовлетворяет заданному спектральному условию. Внесем поправку согласно формуле (22). Вычисление интеграла теперь возможно только численно. Результат приведен на рис. 3. Аппроксимируя вновь кривую $n(x)$ ступенчатой кривой, находим улучшенные значения показателей преломления и оптических толщин (см. правые столбцы таблицы). Коэффициент отражения улучшенного покрытия показан на рис. 4. Мы видим, что постоянство R в интервале $k_1 \leq k \leq 2k_1$ значительно улучшилось по сравнению с первоначальным результатом, хотя, с другой стороны, несколько ухудшилась резкость изменения R на границах этого интервала.

Заключительные замечания

Ценным качеством вышеизложенного метода синтеза покрытий является его гибкость, позволяющая варьировать решение в рамках одной и той же задачи синтеза. Выше была уже отмечена свобода выбора фазы $\varphi(k)$. Далее, аппроксимирование непрерывной кривой ступенчатой кривой тоже допускает известную свободу. Горизонтальные участки ступенчатой кривой можно в некоторых пределах сдвигать вверх или вниз, что дает возможность, хотя бы отчасти, подбирать для слоев покрытия конкретные вещества с тем или иным показателем преломления. Для компенсации подобных сдвигов всегда можно увеличить число слоев или изменить их толщины, добиваясь возможно близкой аппроксимации. Наконец, отметим, что задание функции $Q(k)$ тоже оставляет некоторую свободу в тех случаях, если синтезируемое покрытие должно обладать заданным коэффициентом пропускания лишь в определенном интервале значений волнового числа, а вне этого интервала поведение его несущественно.

Все эти вопросы будут рассмотрены более подробно в последующих статьях.

Автор благодарен П. Г. Карду за руководство и помощь при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сосси Л., Кард П., Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 17, 41 (1968).
2. Сосси Л., Кард П., Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 21, 155 (1972).

Тартуский государственный
университет

Поступила в редакцию
24/I 1974

L. SOSSI

MITMEKIHILISTE DIELEKTRILISTE INTERFERENTSFILTRITE SÜNTEESI MEETOD

Artiklis esitatakse üldine meetod interferentskatete sünteesimiseks etteantud spektraalkõvera järgi, kusjuures ei seata mingeid eeldusi kihtide arvu ega nende paksuste kohta. Lähtutakse valemist (16), mis mittehomoogeense kihi murdumisnäitaja $n(x)$ (x —

kahekordne optilise tee pikkus) seob valemi (17) kaudu kihi läbilaskvusteguriga $T(k)$ (k — lainete arv). Käsitades $T(k)$ antuna, tõlgendatakse valemit (16) funktsiooni

$\sqrt{\frac{1}{2}(T^{-1} - T)}e^{i\varphi(k)}$ ($\varphi(k)$ — mееlevaldne faas) Fourier' teisendusena. Edasi aval-

datakse suurus $\frac{n'}{2n}$ ($\varphi(k) = 0$) Fourier' pöördteisendusena (20), kust leitakse ka

$n(x)$. Lõpuks aproksimeeritakse see pidevalt muutuv murdumisnäitaja diskreetselt muutuva murdumisnäitajaga, saades nii viisi korraga etteantud spektraalkõvera $T(k)$ ligikaudseks realiseerimiseks vajaliku kihtide arvu, nende paksused ja murdumisnäitajad. Aproksimeerimisel on võimalik kihtide murdumisnäitajate väärtusi teatavates piirides valida mõninga vabadusega, kompenseerides neid muutusi kihtide arvu ja paksuste varieerimisega. See vabadus on oluline konkreetsete ainete valiku puhul. Meetodi efektiivsust illustreeritakse näite varal.

L. SOSSI

A METHOD FOR THE DESIGN OF MULTILAYER DIELECTRIC INTERFERENCE COATINGS

A general method for the design of an interference coating having a given transmittance function $T(k)$, where k is the wave number, is described. In contrast to the hitherto known methods, no special assumptions about the number of layers or their thicknesses are needed. The starting-point is the approximate formula (16), expressing through formula (17) the transmittance $T(k)$ of an inhomogeneous film in terms of the refractive index $n(x)$, where x is the double optical path inside the film. Considering $T(k)$ as a given function and regarding formula (16) as the Fourier transformation of

the function $\sqrt{\frac{1}{2}(T^{-1} - T)}e^{i\varphi(k)}$, where $\varphi(k)$ is an arbitrary phase function, one can

express the quantity $\frac{n'}{2n}$ by inverse Fourier transformation. This is done by formula

(20), where $\varphi(k)$ is taken to be zero. Finally the continuously varied refractive index $n(x)$ is approximately replaced by a discrete stepped curve. Thereby the synthesis of the coating is completed. As a result, one has all the parameters of the coating, the number of layers, their thicknesses and refractive indices, determined by one straightforward procedure. The refractive indices of the layers at the last stage of design can to some extent be set at will, to fit them better to available materials. These changes may be compensated by suitable modifications in the number and thickness of layers. The method is illustrated by an example.