

В. СИННВЕЭ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ МАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС И ГРУППА ВРАЩЕНИЯ

В последние годы интерес к различным импульсным методам магнитного резонанса значительно возрос. Теоретическое описание этих методов облегчается тем, что малая длительность импульсной серии оправдывает пренебрежение релаксационными явлениями. Разнообразие возможных способов воздействия на спиновую систему переменными магнитными полями требует более общих подходов, позволяющих увидеть перспективы создания новых методов эксперимента. Так как установление общих законов предполагает одновременное рассмотрение множества начальных состояний, магнитных полей и даже типов спиновых систем, естественно предположить, что аппарат теории непрерывных групп и их представлений [1-3] окажется здесь полезным.

В данной работе рассматривается динамика классического магнитного диполя во всевозможных магнитных полях. Главное внимание уделено формулировке группового подхода и некоторым методам решения уравнений движения, явно имеющим аналогии в теории многоспиновых систем.

1. Групповой подход

Движение классического магнитного дипольного момента описывается дифференцируемой функцией $\vec{\mu}(t)$ (траекторией на сфере векторного пространства). Рассмотрим семейство таких траекторий, описываемое преобразованием вращения

$$\vec{\mu}(t) = \Omega(t, 0) \vec{\mu}(0), \quad (1)$$

$$\Omega(0, 0) = E. \quad (2)$$

В семействе траекторий $\vec{\mu}(0)$ берет все значения на сфере с радиусом μ . Определяющая семейство верзорная функция $\Omega(t, 0)$ (траектория над группой вращения) предполагается дифференцируемой по t . Траекторией однозначно задается двумерное множество верзоров $\Omega(t_2, t_1)$, определяемое по

$$\vec{\mu}(t_2) = \Omega(t_2, t_1) \vec{\mu}(t_1). \quad (3)$$

В частности, движениям за бесконечно малый интервал времени Δt соответствуют инфинитезимальные вращения $\Omega(t + \Delta t, t)$, разлагая которые (в точке t) в ряд по степеням Δt , имеем

$$\Omega(t + \Delta t, t) = E + \Delta t H(t), \quad (4)$$

где

$$H(t) = \left(\frac{\partial \Omega(t + \Delta t, t)}{\partial \Delta t} \right)_{\Delta t=0}. \quad (5)$$

Так как аффинор (4) есть верзор, то аффинор (5) (аффинор взаимодействия) получается кососимметрическим. Согласно определению (5), аффиноры взаимодействия являются элементами инфинитезимального кольца группы вращения.

Преобразование (1) складывается из бесконечной последовательности мгновенных вращений (4). В частности,

$$\Omega(t+\Delta t, 0) = \Omega(t+\Delta t, t) \Omega(t, 0). \quad (6)$$

Подставляя (4) в (6) и переходя к пределу, получаем уравнение движения

$$\frac{d\Omega(t, 0)}{dt} = H(t) \Omega(t, 0). \quad (7)$$

Дифференцируя (1) и используя (7), имеем также

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = H(t)\vec{\mu}. \quad (8)$$

Итак, траектория над инфинитезимальным кольцом $H(t)$, траектория над группой $\Omega(t, 0)$ и семейство траекторий $\vec{\mu}(t)$ над линейным пространством состояний физической системы (магнитного диполя) однозначно взаимосвязаны. Если (8) совпадает с уравнением движения системы, то (1) выражает общее решение уравнения движения.

Группа вращений может быть параметризована по компонентам $\vec{\Phi}_j$ ($j = x, y, z$) вектора вращений $\vec{\Phi} = \vec{\varphi} \cdot \vec{k}$. Выбор функции $\vec{\Phi}(t, 0)$, удовлетворяющей дополнительному условию $\vec{\Phi}(0, 0) = 0$, определяет $\Omega(t, 0)$ согласно

$$\Omega(t, 0) = \Omega(\vec{\Phi}(t, 0)) = \Omega(\vec{k}(t, 0), \varphi(t, 0)), \quad (9)$$

где \vec{k} — единичный вектор направления оси вращения, а φ — угол поворота.

Аналогично, примыкающим функциям $\vec{\Phi}(t_2, t_1)$ соответствуют $\Omega(t_2, t_1)$.

В частности, $\vec{\Phi}(t + \Delta t, t)$ с условием $\vec{\Phi}(t, t) = 0$ описывает инфинитезимальное вращение (4). Прилагая определение (5), имеем

$$H(t) = \omega(t) A_n(t) = \sum_j \omega_j(t) A_j, \quad (10)$$

где

$$\omega_j(t) = \left(\frac{\partial \Phi_j(t + \Delta t, t)}{\partial \Delta t} \right)_{\Delta t=0}, \quad (11)$$

$$A_n(t) = \sum_j n_j(t) A_j, \quad (12)$$

а A_j ($j = x, y, z$) — базисный аффинор трехмерного (эвклидового) инфинитезимального кольца.

Существует изоморфное соответствие между векторами угловой скорости

$$\vec{\omega}(t) = \omega(t) n(t) = \sum_j \omega_j(t) a_j \quad (13)$$

и аффинорами (10). В частности, единичному вектору направления n соответствует A_n , определяемое по

$$A_n \vec{\mu} = n \times \vec{\mu}, \quad (14)$$

а ортам координатного репера a_j ($j = x, y, z$) соответствует A_j , сложению векторов $\vec{\omega}$ — сложению аффиноров $H(\vec{\omega})$, векторному произведению — коммутатор аффиноров. В частности,

$$\vec{a}_x \times \vec{a}_y = \vec{a}_z \text{ соответствует } [A_x, A_y] = A_z. \quad (15)$$

Итак,

$$\mathbf{H}(t) \vec{\mu} = \vec{\omega} \times \vec{\mu}. \quad (16)$$

Приведенные выше выкладки носят, собственно говоря, кинематический характер. Они становятся динамическими, констатируя, что уравнение (8) совпадает с уравнением движения магнитного диполя во внешнем магнитном поле $\vec{B}(t)$, если вектор угловой скорости удовлетворяет соотношению Лармора

$$\vec{\omega}(t) = -\gamma \vec{B}(t). \quad (17)$$

Приведенная ниже схема (18) резюмирует описанные соотношения между векторными и аффинорными функциями времени

$$\begin{array}{ccccc} \vec{B}(t) & \leftrightarrow & \vec{\omega}(t) & \leftrightarrow & \mathbf{H}(t) \\ & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \vec{\Phi}(t, 0) & \leftrightarrow & \vec{\Omega}(t, 0) & \leftrightarrow & \vec{\mu}(t). \end{array} \quad (18)$$

Мы изложили групповой подход к динамике спиновых систем на примере односпиновой системы в классическом описании. Переход к квантовому описанию многоспиновых систем осуществляется следующим образом.

Вместо $\vec{\mu}(t)$ движение системы (или ансамбля систем) описывается элементом унитарного пространства — вектором состояния (соответственно оператором плотности). Уравнение движения (8) заменяется на уравнение Шрёдингера (квантовое уравнение Лиувилля). Вместо аффинора $\mathbf{H}(t)$ выступает оператор (супероператор) Гамильтона (точнее — соответствующий антиэрмитовый оператор). Преобразования, описывающие в пространстве состояний семейство траекторий, есть элементы унитарной группы или некоторой ее подгруппы (динамической группы задачи). Всевозможные гамильтонианы соответствуют инфинитезимальному кольцу этой группы. Каждой траектории над инфинитезимальным кольцом (каждому зависящему от времени гамильтониану) однозначно соответствует некоторая траектория над динамической группой. Она определяется уравнением, аналогичным уравнению (7).

Стало быть, задачи спиновой динамики включают следующие две проблемы: 1) конструирование динамической группы, соответствующей данному типу гамильтонианов, 2) установление соответствия между траекториями над группой и над инфинитезимальным кольцом. Первая проблема относится к теории групп Ли — составленные из спиновых операторов гамильтонианы можно рассматривать в качестве тензоров. Вторая проблема относится, собственно говоря, к теории систем дифференциальных уравнений. Однако многое здесь зависит от физической постановки задачи. Теоретическое изыскание новых методов ЯМР требует ответа на следующие вопросы: а) какие типы траекторий можно осуществлять с помощью всевозможных магнитных полей, б) какое поле вызывает данное (желаемое) движение (управление движением спинов), в) как измерять по возможности раздельно различные типы взаимодействий спинов и различать между группами спинов молекулы. Ответы на эти вопросы предполагают одновременное рассмотрение множества гамильтонианов, начальных состояний и движений в линейных пространствах различных размерностей. Аппарат теории непрерывных групп и их представлений весьма приспособлен для решения задач такого типа.

В случае единичного спина взаимодействующей с магнитным полем динамической группой служит группа трехмерных вращений (классическое описание) или ее унитарное представление (квантовое описание). Ниже рассматриваются вопросы интегрирования уравнения (7). На основе решений специальных проблем конструируются решения более общих проблем.

2. Вращение вокруг постоянного направления

Пусть направление (но не амплитуда) магнитного поля \vec{n} постоянно. В этом случае всевозможные аффиноры (10) образуют одномерное подпространство, соответствующее направлению \vec{n} . Этому подпространству (инфинитезимального кольца) соответствует одномерная подгруппа поворотов $\Omega(\vec{n}, \varphi)$, $-0 \leq \varphi \leq 2\pi$, вокруг \vec{n} . Возможные траектории $\Omega(t, 0)$ получаются на основе функции $\varphi(t, 0)$. Верзоры подгруппы коммутируют, векторы $\vec{\Phi}(t, 0) = \varphi(t, 0)\vec{n}$ коллинеарны. Произведению верзоров соответствует сложение углов φ . Следовательно, в данном случае

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\Phi}(t, 0)}{dt}. \quad (19)$$

Стало быть

$$\vec{\mu}(t) = \Omega(\vec{n}, \varphi(t, 0))\vec{\mu}(0), \quad (20)$$

где

$$\varphi(t, 0) = \int_0^t \omega(t') dt'. \quad (21)$$

Пусть продолжительность опыта равна T . Разлагая угловую частоту в ряд Фурье по кратным основного тона $\nu_0 = \pi/T$

$$\omega(t) = \omega_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m \cos(m\nu_0 t + a_m), \quad (22)$$

имеем

$$\varphi(t, 0) = \omega_0 t + \sum_{m=1}^{\infty} (\omega_m/m\nu_0) [\sin(m\nu_0 t + a_m) - \sin a_m]. \quad (23)$$

В то время как постоянная составляющая в (22) вызывает равномерное вращение, переменные составляющие вызывают качания вокруг угла равномерного вращения. Амплитуда качания

$$\Delta\varphi_m = \frac{\omega_m}{m\nu_0} \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Начиная с некоторого m (если не раньше) $\Delta\varphi_m < 2\pi$. Высшие фурье-компоненты дают узкий «пакет качания», центр которого вращается ввиду присутствия ω_0 .

3. Сложение взаимодействий

Конструирование более сложных решений уравнения (7) значительно облегчается следующей простой теоремой о сложении двух взаимодействий.

Если

$$H(t) = H_1(t) + H_2(t), \quad (25)$$

то решение уравнения (7) может быть представлено в виде произведения двух вращений

$$\Omega(t, 0) = \Omega_1(t, 0) \Omega'_2(t, 0), \quad (26)$$

удовлетворяющих уравнениям движения

$$\frac{d\Omega_1(t, 0)}{dt} = H_1(t) \Omega_1(t, 0), \quad (27)$$

$$\frac{d\Omega'_2(t, 0)}{dt} = H'_2(t) \Omega'_2(t, 0), \quad (28)$$

где

$$H'_2(t) = \Omega_1(t)^{-1} H_2(t) \Omega_1(t), \quad (29)$$

и начальным условиям

$$\Omega_1(0, 0) = \Omega'_2(0, 0) = E. \quad (30)$$

Подразумевается, что сумма в (25) составлена из кососимметрических аффиноров, а множители в (26) обладают дифференцируемостью. Доказательство вытекает из непосредственной подстановки (26) в (7).

Среди векторов угловой скорости (13) и (17) сумме (25) соответствует сумма

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_1(t) + \vec{\omega}_2(t). \quad (31)$$

Если аффинору $H'_2(t)$ соответствует вектор $\vec{\omega}'_2(t)$, то согласно (29)

$$\vec{\omega}_2(t) = \Omega_1(t, 0) \vec{\omega}'_2(t). \quad (32)$$

Путем переноса функции $\vec{\omega}'_2(t)$ совместно с подвижным репером $\vec{a}'_j(t)$, определяемым по

$$\vec{a}'_j(t) = \Omega_1(t, 0) \vec{a}_j, \quad (33)$$

получается функция $\vec{\omega}_2(t)$.

Решение (26) можно также представить в виде произведения

$$\Omega(t, 0) = \Omega_2(t, 0) \Omega_1(t, 0), \quad (34)$$

где

$$\Omega_2(t, 0) = \Omega_1(t, 0) \Omega'_2(t, 0) \Omega_1(t, 0)^{-1}. \quad (35)$$

Верзор $\Omega_2(t, 0)$ описывает некоторое движение диполей относительно подвижного репера $\vec{a}'_j(t)$. Матрица Ω_2 относительно подвижного репера $\vec{a}'_j(t)$ совпадает с матрицей Ω'_2 относительно неподвижного репера \vec{a}_j . Относительное движение $\Omega_2(t, 0)$ переносится движением $\Omega_1(t, 0)$, создавая тем самым результирующее движение $\Omega(t, 0)$.

Взятые в отдельности взаимодействия $H_1(t)$ и $H'_2(t)$ определяют движения $\Omega_1(t, 0)$ и $\Omega'_2(t, 0)$ соответственно. Второе движение может быть наложено (в смысле относительного движения) на первое путем перехода от $H'_2(t)$ к $H_2(t)$, т. е. путем согласования обоих взаимодействий.

4. Сложение двух взаимодействий с постоянными направлениями

Пусть (обозначения см. п. 3)

$$\vec{\omega}_1(t) = \omega_1(t) \vec{n}_1, \quad (36)$$

$$\vec{\omega}'_2(t) = \omega_2(t) \vec{n}'_2. \quad (37)$$

Тогда согласно п. 2

$$\Omega_1(t, 0) = \Omega(\vec{n}_1, \varphi_1(t, 0)), \quad (38)$$

где

$$\varphi_1(t, 0) = \int_0^t \omega_1(t') dt'. \quad (39)$$

Аналогично

$$\Omega'_2(t, 0) = \Omega(\vec{n}'_2, \varphi_2(t, 0)), \quad (40)$$

где

$$\varphi_2(t, 0) = \int_0^t \omega_2(t') dt'. \quad (41)$$

Согласованное с первым полем (36) второе поле

$$\vec{\omega}_2(t) = \omega_2(t) \Omega_1(t, 0) \vec{n}'_2 \quad (42)$$

вращается вокруг единичного вектора \vec{n}_1 согласно выражению (39).

Угол Θ между $\vec{\omega}_1(t)$ и $\vec{\omega}_2(t)$ — постоянный, а угол между $\vec{\omega}_1(t)$ и суммарным полем $\vec{\omega}(t)$ — переменный.

Суммарное движение состоит из вращения вокруг \vec{n}_1 и из вращения вокруг подвижного $\vec{n}_2(t)$, заданного по

$$\vec{n}_2(t) = \Omega_1(t, 0) \vec{n}'_2. \quad (43)$$

При этом

$$\Omega_2(t, 0) = \Omega(\vec{n}_2(t), \varphi_2(t, 0)). \quad (44)$$

Итак, со взаимодействием (36) можно согласовать любой $\vec{\omega}_2(t)$, вращающийся согласно (39) и сохраняющий постоянный угол Θ . Свободно могут быть выбраны функция $\omega_2(t)$ и значение угла Θ .

Пусть $\vec{n}_1 = \vec{a}_z$. Тогда

$$\vec{\omega}(t) = \omega_z(t) \vec{a}_z + \omega_{\perp}(t) \vec{a}_{\perp}(t), \quad (45)$$

где

$$\vec{a}_{\perp}(t) = \Omega_1(t, 0) \vec{a}_{\perp}(0), \quad (46)$$

$$\omega_z(t) = \omega_1(t) + \omega_2(t) \cos \Theta, \quad (47)$$

$$\omega_{\perp}(t) = \omega_2(t) \sin \Theta. \quad (48)$$

Обратно,

$$\cot \Theta = [\omega_z(t) - \omega_1(t)] / \omega_{\perp}(t) = [\omega_z(0) - \omega_1(0)] / \omega_{\perp}(0), \quad (49)$$

$$\omega_2(t) = \omega_{\perp}(t) \sqrt{1 + \cot^2 \Theta}. \quad (50)$$

Спрашивается, можно ли действие любого поля (45) представить в виде произведения двух вращений с постоянными направлениями? Ответ будет отрицательным ввиду ограничительного условия (49). При выполнении этого условия компонента $\vec{\omega}_2(t)$ вычисляется по (49) и (50).

Условие (49) всегда выполняется, если

$$\omega_z(t) = \omega_1(t), \quad (51)$$

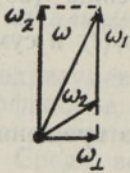
т. е. если $\Theta = \pi/2$ и $\omega_2(t) = \omega_{\perp}(t)$. Мы имеем случай точного резонанса в направленном по \vec{a}_z переменном магнитном поле. При этом частотно-модулированное поперечное поле $\vec{\omega}_{\perp}(t)$ согласуется с продольным полем. $\Omega_1(t, 0)$ описывает прецессию, а $\Omega_2(t, 0)$ — нутационное движение магнитных диполей.

Условия согласования полей $\vec{\omega}_{\perp}(t)$ и $\vec{\omega}_z(t)$ (т. е. условия резонанса) не накладывают ограничений на вид амплитудной модуляции $\vec{\omega}_{\perp}(t)$.

Однако полезно вспомнить изложение в п. 2. Если $\vec{\omega}_{\perp}(t)$ включает

только высшие гармоники, то $\vec{\mu}(t)$ ограничена узкой полосой в виде «параллели» на μ -сфере. Если же высшие гармоники содержатся как в $\omega_{\perp}(t)$, так и в $\omega_z(t)$, то имеем двухмерный пакет, движение центра которого определяется постоянными составляющими.

Пусть, для простоты, ω_1 и ω_2 постоянные. Тогда ω_z и ω_{\perp} тоже постоянные (см. рис. 1). Пусть ω_z задано и $\omega_{\perp} \ll \omega_z$. Тогда путем подбора частоты ω_1 и амплитуды ω_{\perp} поперечного поля все же



можно получить ω_z с любым углом θ и любой частотой ω_2 . Условия резонанса (51) отвечают лишь специальному случаю $\theta = \pi/2$.

Рис. 1. Замена суммы $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ на сумму $\vec{\omega}_z + \vec{\omega}_{\perp}$.

Рассмотрим наложенное движение $\Omega_2(t, 0)$ с точки зрения подвижного репера (33). В любом семействе траекторий $\vec{\mu}(t)$ одна траектория (с $\vec{\mu}(0) // \omega_2$) соответствует отсутствию движения, а траектории с $\vec{\mu}(0) \perp \omega_2$ — окружности с максимальным радиусом. В условиях резонанса (51) максимальная окружность соответствует также начальному состоянию $\vec{\mu}(0) = \mu a_z$. Она отлична от других в том смысле, что приобретает быстрое прецессионное движение лишь в присутствии поперечного поля, близкого к резонансному.

5. Сложение трех взаимодействий с постоянными направлениями

Теорема о сложении двух взаимодействий распространяется и на сумму любого конечного числа взаимодействий. Поскольку любая $\Omega(t, 0)$ может быть представлена в виде произведения трех вращений с постоянными направлениями, ограничимся этим случаем. Итак, представляя вектор угловой скорости (13) в виде

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_1(t) + \vec{\omega}_2(t) + \vec{\omega}_3(t) \quad (52)$$

и соответственно

$$H(t) = H_1(t) + H_2(t) + H_3(t), \quad (53)$$

выражаем решение уравнения (7) в виде

$$\Omega(t, 0) = \Omega_1(t, 0) \Omega_2(t, 0) \Omega_3(t, 0). \quad (54)$$

Имеем определяющие уравнения (27) и (28), а также дополнительное соотношение

$$\frac{d\Omega_3(t, 0)}{dt} = H_3(t) \Omega_3(t, 0). \quad (55)$$

Имеют место начальные условия типа (30), определение (29) и

$$H_3(t) = \Omega_1(t, 0) \Omega_2(t, 0) H_3(t) \Omega_2(t, 0)^{-1} \Omega_1(t, 0)^{-1}. \quad (56)$$

Соответственно верны определение (32) и

$$\vec{\omega}_3(t) = \Omega_1(t, 0) \Omega_2(t, 0) \vec{\omega}_3(t). \quad (57)$$

Разложение (54) может быть заменено разложением

$$\Omega(t, 0) = \Omega_3(t, 0) \Omega_2(t, 0) \Omega_1(t, 0), \quad (58)$$

где $\Omega_2(t, 0)$ определяется уравнением (35), а

$$\Omega_3(t, 0) = \Omega_1(t, 0) \Omega_2(t, 0) \Omega_3(t, 0) \Omega_2(t, 0)^{-1} \Omega_1(t, 0)^{-1}. \quad (59)$$

Смысл преобразования $\Omega_2(t, 0)$ тот же, что в п. 3. Смысл $\Omega_3(t, 0)$ разъясняется путем добавления второго подвижного репера

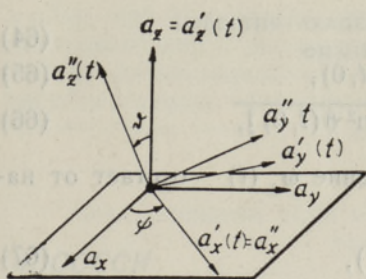


Рис. 2. Подвижные реперы и эйлеровые углы.

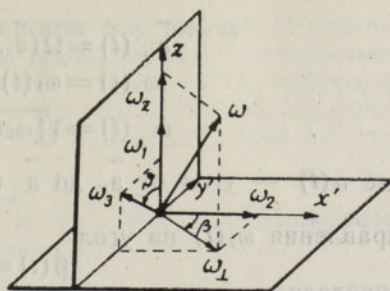


Рис. 3. Расположение векторов угловой скорости относительно подвижного репера $\vec{a}'_j(t)$.

$$\vec{a}''_j(t) = \Omega_2(t, 0) \vec{a}'_j(t) \tag{60}$$

к первому подвижному реперу (33). Итак, $\Omega_1(t, 0)$ вращает диполи вместе с репером $\vec{a}'_j(t)$, $\Omega_2(t, 0)$ вращает диполи относительно $\vec{a}'_j(t)$ вместе с $\vec{a}''_j(t)$, а $\Omega_3(t, 0)$ дополнительно — относительно $\vec{a}''_j(t)$.

Разложение (54) состоит из вращений с постоянными направлениями, если толковать (58) как эйлеровое преобразование (рис. 2). Принимая это и применяя обозначения рис. 2, имеем результаты, которые сведены в таблице.

Определение разложений (54) и (58)

Угловая скорость	Вращение
$\vec{\omega}_1(t) = \omega_1(t) \vec{a}_z$	$\Omega_1(t, 0) = \Omega(\vec{a}_z, \psi(t, 0))$
$\vec{\omega}'_2(t) = \omega_2(t) \vec{a}_x$	$\Omega'_2(t, 0) = \Omega(\vec{a}_x, \vartheta(t, 0))$
$\vec{\omega}''_3(t) = \omega_3(t) \vec{a}_z$	$\Omega''_3(t, 0) = \Omega(\vec{a}_z, \varphi(t, 0))$
$\vec{\omega}_2(t) = \omega_2(t) \vec{a}'_x(t)$	$\Omega_2(t, 0) = \Omega(\vec{a}'_x(t), \vartheta(t, 0))$
$\vec{\omega}_3(t) = \omega_3(t) \vec{a}''_z(t)$	$\Omega_3(t, 0) = \Omega(\vec{a}''_z(t), \varphi(t, 0))$

Угловые частоты определяются выражениями

$$\omega_1(t) = \frac{d\psi(t, 0)}{dt}, \tag{61}$$

$$\omega_2(t) = \frac{d\vartheta(t, 0)}{dt}, \tag{62}$$

$$\omega_3(t) = \frac{d\varphi(t, 0)}{dt}. \tag{63}$$

Движения, описываемые векторами $\Omega_1(t, 0)$, $\Omega_2(t, 0)$, $\Omega_3(t, 0)$, обычно называются прецессией, нутацией и собственным вращением соответственно. Расположение векторов $\vec{\omega}_1(t)$, $\vec{\omega}_2(t)$, $\vec{\omega}_3(t)$ в некоторый момент времени относительно подвижного репера $\vec{a}'_j(t)$ показано на рис. 3. Там же приведено разложение $\vec{\omega}(t)$ на продольную и поперечную составляющие аналогично разложению (45). В данном случае

$$\vec{a}_\perp(t) = \Omega(\vec{a}_z, \alpha(t)) \vec{a}_x, \quad (64)$$

$$\omega_z(t) = \omega_1(t) + \omega_3(t) \cos \vartheta(t, 0), \quad (65)$$

$$\omega_\perp(t) = \sqrt{[\omega_2(t)^2 + \omega_3(t)^2 \sin^2 \vartheta(t, 0)]}, \quad (66)$$

где $\alpha(t)$ — угол от \vec{a}_x до $\vec{a}_\perp(t)$. Направление $\vec{\omega}_\perp(t)$ отстает от направления $\vec{\omega}_2(t)$ на угол

$$\beta(t) = \varphi(t, 0) - \alpha(t), \quad (67)$$

определяемый, например, по

$$\tan \beta(t) = \omega_3(t) \sin \vartheta(t, 0) / \omega_2(t). \quad (68)$$

В динамике традиционно рассматривается задача: найти общее решение $\Omega(t, 0)$ уравнения движения (8), зная действующее поле $\vec{\omega}(t)$, заданное, например, в виде (45). Если $\Omega(t, 0)$ искать в виде (54), то эта задача сводится к решению системы уравнений

$$\frac{d\vartheta(t, 0)}{dt} - \omega_\perp(t) \cos \beta(t) = 0, \quad (69)$$

$$\frac{d\varphi(t, 0)}{dt} + \omega_\perp(t) \sin \beta(t) \cot \vartheta(t, 0) = \omega_z(t)$$

и к интегрированию уравнения

$$\frac{d\varphi(t, 0)}{dt} = \omega_\perp(t) \sin \beta(t) / \sin \vartheta(t, 0). \quad (70)$$

Если задача заключается в нахождении магнитного поля, обеспечивающего преобразование движения (58), то ответом служат формулы (64) — (68).

Данному семейству траекторий, описываемому преобразованием $\Omega(t, 0)$, соответствует одна определенная $H(t)$. Единичная же траектория $\vec{\mu}(t)$ может быть реализована множеством $H(t)$. Действительно, данная $\vec{\mu}(t)$ может быть общим элементом различных семейств траекторий. На основе уравнений (8) и (16) нетрудно понять, что прибавление к данному $\vec{\omega}(t)$ новой составляющей, всегда коллинеарной с $\vec{\mu}(t)$, не изменит этой траектории. Данное обстоятельство может быть использовано при управлении движением нескольких (невзаимодействующих) спинов, обладающих различными ларморовыми частотами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубнов Я. С., Основы векторного исчисления, II, М., 1952.
2. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, М., 1958.
3. Воегнер Н., Representations of Groups, North-Holland, 1963.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
28/XII 1973

V. SINIVEE

ELEMENTAARNE MAGNEETILINE RESONANTS JA ROTATSIOONIRÜHM

Kasutades rühmateooriat spinndünaamika ülesannete lahendamiseks, käsitletakse klassikalise magnetilise momendi liikumist magnetväljas.

V. SINIVEE

ELEMENTARY MAGNETIC RESONANCE AND ROTATION GROUP

Group approach to spin dynamics is exemplified for the case of a classical magnetic dipole moving in external magnetic field.