EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.3.03

УДК 62–50

И. КЕЙС

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ, ОБЛАДАЮЩИМИ ИНВАРИАНТАМИ

Рассматривается задача стабилизации движений автономных систем по части переменных. Подынтегральная функция критерия выпукла по управляющему вектору, содержащемуся в выпуклой компактной области. При независимости производящей функции Беллмана от некоторых переменных получены соответствующие различным экстремальным режимам формы уравнения Беллмана—Якоби. Доказана теорема о достаточных условиях оптимальной управляемости по части переменных. Дано выражение функционала качества, минимального на стабилизирующих управлениях, произведенных некоторой функцией, что соответствует задаче обращения проблемы аналитического конструирования регуляторов. Рассматриваемый класс оптимальных систем содержит автономные системы Атанса [1].

1. Пусть уравнения возмущенного движения системы

$$\dot{y}=Y(y), \qquad y=(y_1, \ldots, y_n)'\in R^n \tag{1.1}$$

определены в области $D=\mathrm{T}\times R^n$; $\mathrm{T}: t\geqslant 0$, где вектор-функция $Y(y)$ непрерывна и удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование и единственность решений в D. Невозмущенное движение $y=0$ $(Y(0)\equiv 0)$ стабилизируется дополнительными силами [2, 3] вида Mu, где $M=[m_{s\sigma}(y)]$, $s=\overline{1,n}$; $\sigma=\overline{1,m}$; вектор $u=(u_1, \ldots, u_m)'\in \Omega\subset U=R^m$ — ограниченная кусочно-непрерывная функция на T. Предполагается, что решения уравнений возмущенного движения управляемой системы

$$\dot{y}=Y(y)+Mu \tag{1.2}$$

существуют и единственны в $D'=\mathrm{T}\times R^n/Y^0$, где $Y^0: y_\alpha=0$ $(\alpha=\overline{1,d}$; $d\leqslant n)$ для принятого класса допустимых управлений. Зададимся непрерывной выпуклой функцией $W(u)$, ряд свойств (W_*) которой аналогичен норме [1]: $W(0)=0$; $W(u)>0$ $(u\neq 0)$; $W(u)$ строго выпукла на интервале, не лежащем на луче из нуля, имеет в $u=0$ конечные односторонние производные по любой оси, $W(u)\in C^1$ на $R^m/0$, $W(u)\in C$ на R^m. Область Ω определяется неравенством

$$\Omega: 0\leqslant W(u)\leqslant W^0, \quad W^0=\mathrm{const}>0, \qquad \Omega'=\Omega/0, \tag{1.3}$$

которое можно [1, 2] трактовать как аппроксимацию гиперкуба управляющих воздействий ограниченной мощности. Ввиду (W_*) можно утверждать, что $W(u)\to\infty$ при $\|u\|\to\infty$, Ω — регулярный [1] выпуклый компакт. Пусть в D задана система функционально независимых непрерывных вещественных функций

$$q_1(y), \ldots, q_k(y); \; q'_{k+1}(y), \ldots, q'_{k+l}(y); \; q''_{k+l+1}(y), \ldots, q''_r(y)$$

класса C^2 в D', где q_i $(i=\overline{1,k})$ неотрицательны и неограничены в D, $|q'_j| \leqslant h'_j \leqslant \infty$ $(j=\overline{k+1,\ k+l})$, $|q''_r| \leqslant h''_r \leqslant \infty$ $(r=\overline{k+l+1,\ n})$; h'', h' — const.

Пусть система (1.2) при выборе новых переменных $z=(x, x', x'')'$: $x=q$, $x'=q'$, $x''=q''$ $(z=Ty)$ переходит в эквивалентную систему [4]

$$\dot{x}_i = (w_i(z), u); \quad \dot{x}'_j = g'_j(z) + (w'_j(z), u); \quad \dot{x}''_r = 0, \tag{1.4}$$

решения которой существуют и единственны в области $G' = \mathrm{T} \times X' \times H' \times H''$, где $X' = X/0$; $x = (x_1, \ldots, x_k)' \in X' : 0 < x_i < \infty$; $x' \in H' \subseteq R^l$; $x'' \in H'' \subseteq R^{n-k-l}$ для $\hat{u}$, допустимых в задаче управлений; вектор-функции $w_i(z)$, $w'_j(z)$, $g'_j(z) \in C^1$ в G', причем точка $z = 0 \longleftrightarrow y = 0$. Структурные свойства системы (1.4) означают, что в качестве $q_i(y)$ и $q''_r(y)$ избраны общие интегралы (инварианты в терминах [1]) системы (1.1), причем для $q''_r(y)$ исчезают (когда $M^{\mathrm{T}} \nabla q''_r \equiv 0$ в D и только тогда) скалярные произведения $(\nabla q''_r, Mu)$. В (1.4) обозначены $w_i = M^{\mathrm{T}} \nabla q_i$; $w'_j = M^{\mathrm{T}} \nabla q'_j$; $g'_j = (Y, \nabla q'_j)$; $\nabla f(\xi) = \underset{\xi}{\mathrm{grad}}\, f$. Перечисленные свойства $q_i(y)$ дополнены предположением, что равенство $\|x\| = 0$ равносильно системе $y_\alpha = 0$ $(\alpha = \overline{1,d};$ $d \geqslant k)$. Множество $X^0 : \|x\| = 0$ считается множеством цели, первый момент достижения которого $t^* \in \mathrm{T}$ не фиксируется. Подынтегральная функция $\omega_0(u \,|\, x, x'')$ критерия качества управления

$$I(x_0, x'_0, x''_0 \,|\, u) = \int_0^{t^*} [L_2(u \,|\, x, x'') + L_0(x, x'')] d\tau \tag{1.5}$$

предполагается дифференцируемой на $R_1 = U/0 \times X \times H''$ и обладающей свойствами (ω_*) на $R = X \times H''$ и $R' = X' \times H''$ вида:

$$L_2(u \,|\, x, x'') = l(x, x'') L_1(u \,|\, x, x''); \text{ в } R \; l(x, x'') > 0 \text{ либо } l(x, x'') \equiv 0; \tag{1.6}$$

$$L_0(x, x'') \geqslant 0; \; l(x, x'') + L_0(x, x'') > 0 \text{ в } R'; \; l, L_0 \in C^1 \text{ на } R; \tag{1.7}$$

функция $L_1(u \,|\, x, x'')$ от u — $L_1(u)$ обладает в U всеми свойствами (W_*) равномерно по R. (1.8)

Далее для упрощения параметр $x''_0 = x''[t] = x''[0]$ опущен. На множестве $\hat{u}$ при связях (1.4) поставлена задача определить регулятор $\hat{u}^*(z)$ так, чтобы перевести вектор z на X^0 и минимизировать функционал (1.5). Она эквивалентна, очевидно, задаче нахождения регулятора $\hat{u}_*(y)$, переводящего y на $Y^0 : y_\alpha = 0$ при сохранении свойств (1.6) — (1.8) для суперпозиции $z = Ty$ в ω_0. Используя метод Беллмана в форме [1], предположим для системы (1.4) с критерием (1.5) наличие свойств, при которых производящая функция S не зависит от x'. Это аналогично для систем Атанса [1]. Тогда гамильтониан задачи для системы (1.4) с критерием (1.5) представляется выражением [5, 2, 1, 3] $B(u, x, x' | S)$

$$B = H_1(u \,|\, x, x', p) + L_0(x), \tag{1.9}$$

$$H_1 = L_2(u \,|\, x) + p_s w_{si}(x, x') u_i; \quad p_s = \partial S / \partial x_s; \quad a_j b_j = \sum_{j=1}^{N} a_j b_j \tag{1.10}$$

$$(s = \overline{1,k}; \; i = \overline{1,m}).$$

Используя свойства (W_*) и (1.6) — (1.8), можно показать, что $\inf B(u)$ на регулярном выпуклом компакте (1.3) достигается либо в стационарных точках $u^0 \in \Omega$ функции $H_1(u)$, если их множество $\{u^0\}$ непусто в Ω, либо в единичной граничной точке u^1, если $\{u^0\} = \varnothing$ (случай, когда $\inf H_1(u)$ достигается только в $u = 0$, соответствует вырожденным [1] режимам, которые здесь не рассматриваются). Предполагается, что для всех точек $z \in G'$ имеет место один из двух случаев — свойство «равномерности». Будем говорить, что первый вариант определяет стационарные режимы, второй — (μ) — строго граничный режим, при котором экстремальный регулятор u^1 определяется единственным существующим решением $u^1(x, x', p)$ системы

$$\nabla H_1(u) + \mu \nabla W(u) = 0 \qquad (\mu = \mu(x, x', p) > 0), \tag{1.11}$$

$$W(u) = W^0. \tag{1.12}$$

В стационарном случае экстремальные регуляторы u^0 должны удовлетворять уравнению

$$\nabla H_1(u) = 0, \tag{1.13}$$

решения которого образуют в Ω выпуклый компакт $Q(z)$, если $H_1(u^0) < 0$ ($\{u^0\} \neq \varnothing$ по определению). Каждому $u^0 \in Q(z)$ соответствует стационарный экстремальный режим. Выражения B после подстановки $u = u^1(x, x', p)$; $u = u^0(x, x', p)$ ($u^0 \in \{u^0\}$) обозначены B^1, B^0; равенства $B^1 = 0$, $B^0 = 0$ есть уравнения Беллмана—Якоби. Для выполнения предположения об x'-автономности $S : (S_a)$ — $\partial S^1/\partial x' = 0$, $\partial S^0/\partial x' = 0$ соответственно достаточно, чтобы $\partial B^1/\partial x' \equiv 0$ и $\partial B^0/\partial x' \equiv 0$. Составим уравнение Беллмана—Якоби для μ-случая, использовав преобразование Лежандра. Рассмотрим функцию R и переменные v_i $(i = \overline{1, m})$, определяемые равенствами

$$R(u, x, \mu) = L_2(u, x) + \mu W(u), \tag{1.14}$$

$$v_i = \partial R/\partial u_i = V_i(u, x, \mu). \tag{1.15}$$

Если в области $R_1 \times \mu (\mu > 0)$ определитель $D_0(u, x, \mu)$ матрицы $[r_{ij}] = [\partial^2 R/\partial u_j \ \partial u_i]$ отличен от нуля, то существует функция K на $G_1 \times \mu (G_1 \leftrightarrow R_1,\ j = \overline{1, m})$ и функции U_i, удовлетворяющие равенствам [6]

$$K(v, x, \mu) = v_i U_i(v, x, \mu) - R[U(v, x, \mu), x, \mu], \tag{1.16}$$

$$u_i = \partial K/\partial v_i = U_i(v, x, \mu). \tag{1.17}$$

Из уравнения (1.11) следует

$$V_i(u^1, x, \mu) = \overset{1}{v_i} = -p_s w_{si}. \tag{1.18}$$

Экстремальный регулятор u^1 как функция $U(v^1, x, \mu)$, полученная из (1.17), придает B^1 согласно (1.14) и (1.16) вид

$$B^1(\mu) = -K(v^1, x, \mu) - W^0 \mu + L_0(x). \tag{1.19}$$

Для получения уравнения Беллмана—Якоби в выражении (1.19) необходимо заменить μ на функцию $M^*(x, x', p)$, удовлетворяющую в силу (1.12) уравнению

$$W[\partial K(v, x, \mu)/\partial v^1] = W^0, \tag{1.20}$$

которое определяет M^*, если якобиан $d = \dfrac{\partial W}{\partial u_i^1} \dfrac{\partial U_i(v^1, x, \mu)}{\partial \mu} \neq 0$.

В силу теоремы Донкина [6] имеем $\partial K/\partial \mu = -\partial R/\partial \mu = -W(u)$.

Тогда из равенств (1.17) следует

$$d = -\left(\frac{\partial^2 K}{\partial v_i \partial v_j}\frac{\partial W}{\partial u_i}\frac{\partial W}{\partial u_j}\right)v^1. \tag{1.21}$$

Ввиду свойств (ω_*), (W_*) функция $R(u)$ выпуклая и строго выпуклая на отрезке, не лежащем на луче из нуля в U; в силу $D_0 \neq 0$ на $R_1 \times \mu$ не является однородной первой степени (hom 1). Поэтому $R(u)$ строго выпукла на Ω, следовательно, $[r_{ij}]_{v^1} > 0$. Тогда матрица $[k_{ij}] = [\partial^2 K/\partial v_i \partial v_j]_{v^1}$, обратная к $[r_{ij}]_{v^1}$, положительно определенная — $[k_{ij}]_{v^1} > 0$. Вследствие (W_*) на Ω' справедливо неравенство $0 < W(u) \leqslant (u, \nabla W(u))$, показывающее, что на Ω' верно $\|\nabla W(u)\| \neq \neq 0$. Поэтому $d \neq 0$. Итак, если $R(u) \,\overline{\in}\, \mathrm{hom}\, 1$ в $R_1 \times \mu$, что здесь равносильно $D_0 \neq 0$, то преобразование Лежандра позволяет получить B^1

$$B^1 = -K[v^1, x, M^*(x, x', p)] - W^0 M^*(x, x', p) + L_0(x), \tag{1.22}$$

где $M^*(z, p)$ — решение уравнения (1.20), $v^1(z, p)$ — задано равенствами (1.18); согласно формуле (1.17) экстремальный регулятор $u^1 = \partial K/\partial v^1$. Учет предположения (S^1_a) приводит согласно (1.22) к условиям $(\partial K/\partial v_i)_{v^1}(\partial v^1/\partial x') \equiv 0$ для z и p, которые выполняются при $\partial w_{si}/\partial x' = 0$ тогда и только тогда, когда $\partial M^*/\partial x' \equiv 0$. Поэтому если решение уравнения (1.20) выражается функцией $M_a{}^*(x, p)$, то x'-автономная S^1 может служить решением уравнения Беллмана—Якоби:

$$B^1_a = L_0(x) - K[v^1, x, M^*_a] - W^0 M^*_a = 0, \tag{1.23}$$

ибо B^1—x'-автономно на M^*_a при $w_{si} = w_{si}(x)$.

В подслучае $D_0 = 0$ на $R_1 \times \mu$ $R(u) \in \mathrm{hom}\, 1$ и преобразование Лежандра не эффективно. Ввиду свойств (ω_*) и (W_*) следует, что $W(u)$, $L_2(u) \in \mathrm{hom}\, 1$ одновременно. В силу $D_0 = 0$ величины v_i из (1.15) должны удовлетворять связи $P(v) = 0$. Используя свойства $R(u)$, можно показать, что $P(v) \,\overline{\in}\, \mathrm{hom}\, 1$ и удовлетворяет на $\xi : P(\xi) = 0$ уравнению

$$\xi_i \frac{\partial P}{\partial \xi_i} - R\left(\frac{\partial P}{\partial \xi_1}, \frac{\partial P}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{\partial P}{\partial \xi_m}\right) = 0, \tag{1.24}$$

а u_i выражаются через R, v_i в «потенциальной» форме

$$u_i = \frac{n_i}{R(\partial P/\partial v)} = n_i(v_i \cdot \partial P/\partial v_i)^{-1} \tag{1.25}$$
$$(n_i = R \cdot \partial P/\partial v_i).$$

Выражение B, обозначенное для подслучая B^*, на решении системы (1.11), (1.12)

$$B^* = -\mu^1_* W^0 + L_0(x) \tag{1.26}$$

содержит величину μ^1_*, которую необходимо заменить функцией $m^*(x, x', p)$. Она удовлетворяет системе (1.11), (1.12) для подслучая $D_0 = 0$. Используя формулы (1.25) с учетом соотношения (1.24) и свойств $L_2(u)$, $W(u) \in \mathrm{hom}\, 1$ в уравнениях (1.12), (1.14), получаем выражение m^*:

$$m^*(x, x', p) = \left[v^1_i \frac{\partial P}{\partial v^1_i} - L_2\left(\frac{\partial P}{\partial v^1}\,\middle|\, x\right)\right]^{-1} W^0 W^{-1}\left(\frac{\partial P}{\partial v^1}\right), \tag{1.27}$$

где v^1 определяется равенством (1.18). Подставляя его значения в формулу (1.25), находим выражение экстремального регулятора u^1 с величиной R, для которой имеем $R = W^0 R(\psi^1) W^{-1}(\psi^1)$, где $\psi^1 = \partial P/\partial v^1$. Функция $P(v)$ предполагается известной. Для простоты используется запись $\psi^1 = (\partial P/\partial v)_{v=v^1}$. Выражение (1.26) не зависит от x' одновременно с x'-автономностью величины m^*. Если последнее условие выполнено, уравнение Беллмана—Якоби для подслучая $\mu : D_0 = 0$ имеет следующий вид:

$$B^{1*}_a = \left[L_2\left(\frac{\partial P}{\partial v^1} \middle| x \right) - v^1_i \frac{\partial P}{\partial v^1_i} \right] W^{-1}\left(\frac{\partial P}{\partial v^1} \right) + L_0(x) = 0. \tag{1.28}$$

Для функции $R(u)$ типа Атанса $R(u) = \|Au\|$, $A = \text{const}$, $\det A \neq 0$, $u = (u_1, \ldots, u_m)'$, функция $P(v)$ для величины $v = \partial R_a/\partial u$ запишется в виде

$$P_a(v) = W^0 \| (A^{-1})^T v \| - 1. \tag{1.29}$$

Уравнения (1.23) и (1.28) упрощаются для случаев (1) $L_2(u|x) = L_2(W|x)$, (2) $W(u) \in \hom \nu_0 (\nu_0 \geqslant 1)$, (3) $L_2(u) \in \hom \lambda_0 (\lambda_0 \geqslant 1)$, (4) $l(x) \equiv 0$, а также их комбинаций. Рассмотрим комбинацию случаев (1) (2, $\nu_0 > 1$) при $D_0 \neq 0$, подслучай $D_0 = 0$ при (1), (2) ($\nu_0 = 1$) и комбинацию (2), (4).

Для случая (1), (2) $D_0 \neq 0$ уравнение Беллмана—Якоби имеет вид

$$-\nu_0 \left[\frac{\partial L_2}{\partial W^0} + M^*_a(x, p) W^0 \right] + L_2(W^0 | x) + L_0(x) = 0, \tag{1.30}$$

где $M^*_a(x, p)$ — x'-автономное μ (если существует!) решение уравнения (1.20). Выражения $u^1_i(z, p)$ получаются из формул (1.17) при $v^1_i(z, p)$, определенных равенствами (1.18). В подслучае $D_0 = 0$, (1), (2) ($\nu_0 = 1$) получаем уравнение

$$[L_2(W^0 | x) + L_0(x)] W\left(\frac{\partial P}{\partial v^1} \right) - W^0 v^1_i \frac{\partial P}{\partial v^1_i} = 0. \tag{1.31}$$

Экстремальный регулятор $u^1(z, p)$ находим из формул (1.25) подстановкой $v^1(z, p)$ по формулам (1.18) для этого случая. Величина m^* здесь определяется формулой

$$m^* = R\left(\frac{\partial P}{\partial v^1} \right) W^{-1}\left(\frac{\partial P}{\partial v^1} \right) - \overset{-1}{W^0} L_2(W^0 | x),$$

правая часть которой не должна содержать x'. В случае (2), (4) ($\nu_0 > 1$) вводится сопряженная к $W(u)$ функция $N(v)$, однородная с показателем $n_0 = \nu_0(\nu_0 - 1)^{-1}$, равенствами:

$$N(v) = v_i u_i(v) - W[u(v)] = (\nu_0 - 1) W[u(v)], \tag{1.32}$$
$$v_i = \partial W/\partial u_i, \qquad u_i = \partial N/\partial v_i.$$

С их помощью уравнение Беллмана—Якоби получается в виде

$$L_0(x) - \nu_0 W^0 [(\nu_0 - 1) W^0]^{-1/n_0} [N(-p_s w_{s1}, \ldots, -p_s w_{sm})]^{1/n_0} = 0. \tag{1.33}$$

Предполагается

$$\partial N/\partial x' = 0. \tag{1.34}$$

Экстремальный регулятор задан формулой

$$u^1_i = \partial N/\partial v^1_i, \tag{1.35}$$

где $$v^1_i = -[(\nu_0 - 1)W^0]^{1/n_0}[N(-p_s w_{si})]^{-1/n_0} p_s w_{si}.$$

Рассмотрение стационарного случая ограничим двумя простейшими подслучаями, предположив, что свойства (W_*), (ω_*) и функций $w_{si}(z)$ в G' обеспечивают существование только одного из них.

Пусть функция $H_1(u)$, определяемая равенством (1.10) на Ω, минимальна в единственной стационарной точке, отличной от нуля, так что решение системы (1.13) — экстремальный регулятор u^0 ($\|u^0\| \neq 0$) — существует и единственно. Если ввести сопряженную функцию $K(v\,|\,x) = u_i(v, x)v_i - L_2[u(v, x)\,|\,x]$ и переменные $v_i = \partial L_2/\partial u_i$ (это возможно ввиду свойств (ω_*), ибо здесь матрица $[l_{ij}] = [\partial^2 L_2/\partial u_i \partial u_j]$ положительно определена в R_1), то уравнение Беллмана—Якоби согласно выражениям (1.9), (1.10) и в силу уравнений (1.13) имеет вид

$$B^0_1 = -K(v^0_1\,|\,x) + L_0(x). \tag{1.36}$$

Экстремальный регулятор этого стационарного режима определен формулами

$$u^0_{i1} = (\partial K/\partial v_i)_{v=v^0_1}; \quad v^0_{1i} = -p_s w_{si}. \tag{1.37}$$

Если свойства (ω_*) и функций $w_{si}(z)$ таковы, что уравнение (1.36) x'-автономно, то должны выполняться условия

$$-\partial K(v^0_1\,|\,x)/\partial x' = p_s(u^0_{1i}\,\partial w_{si}/\partial x') \equiv 0. \tag{1.38}$$

Для этого достаточно принять тождества

$$u^0_{i1}\partial w_{si}/\partial x' \equiv 0. \tag{1.39}$$

Второй случай определяется тем, что множество стационарных точек функции $H_1(u)$ — решений системы (1.13) составляют «луч»: однопараметрическое множество $\{u_0(\tau, u^1)\} = \tau u^1$, где $0 < \tau \leqslant 1$, $W(u^1) = W^0$. Можно показать, что для существования этого случая необходимо, чтобы $L_2(u) \in \hom 1$ и

$$H_1[u_0(\tau, u^1)] = \inf_{u \in \Omega} H_1(u) = 0. \tag{1.40}$$

Исходя из уравнений (1.13) на экстремальный регулятор в стационарном случае, записанных скалярно

$$\partial L_2/\partial u_i = -p_s w_{si}, \tag{1.41}$$

и учитывая однородность L_2

$$L_2[u_1, \ldots, u_m\,|\,x] = \|u\|\,L_2[e_1, \ldots, e_m\,|\,x] \tag{1.42}$$

для величин $e_i = u_i\,\|u\|^{-1}$ можно получить уравнения, определяющие экстремальное направление

$$\partial L_2/\partial e^0_i = -p_s w_{si}. \tag{1.43}$$

Выражение $B^0_2 = \|u_0\|\{L_2(e^0_1, \ldots, e^0_m\,|\,x) + p_s w_{si} e^0_i\} + L_0(x)$ обращается в силу (1.42) и (1.43) в $L_0(x)$. Поэтому в рассматриваемом случае для соблюдения формализма Беллмана необходимо положить $L_0(x) \equiv 0$. Уравнение Беллмана—Якоби для этого случая отсутствует.

Уравнения (1.43) относятся к типу $D_0 = 0$, если положить в (1.14), (1.15) $\mu = 0$ и заменить u_i на e_i. Аналогично случаю $D_0 = 0$ следует, что функции $v_i(e \mid x) = \partial L_2/\partial e_i$ должны удовлетворять связям $P_1(v_1, \ldots, v_m) = 0$, $P_1 \in \hom 1$, функция $P_1(\xi)$ обращает для $\xi : P_1(\xi) = 0$ выражение

$$\xi_i \frac{\partial P_1}{\partial \xi_i} - L_2\left(\frac{\partial P_1}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial P_1}{\partial \xi_m}\right) \tag{1.44}$$

в нуль, а величины e_i выражаются через L_2, v_i следующим образом:

$$e_i = L_2(e \mid x) \frac{\partial P_1/\partial v_i}{L_2(\partial P_1/\partial v \mid x)} = L_2(e \mid x) \frac{\partial P_1/\partial v_i}{v_i(\partial P_1/\partial v_i)}. \tag{1.45}$$

Из условия $\|e\| = 1$ и выражений (1.45) следует равенство

$$L_2(e \mid x) = \left\| \frac{\partial P_1}{\partial v} \right\|^{-1} L_2\left(\frac{\partial P_1}{\partial v} \middle| \, x\right). \tag{1.46}$$

В силу уравнений (1.43) $v_i^0 = -p_s w_{si}$. Это позволяет получить из формул (1.45) ввиду (1.46) для $e^0{}_i$ выражения $e_i^0 = \left\| \frac{\partial P_1}{\partial v} \right\|^{-1} (\partial P_1/\partial v_i^0)$.

Функция связи P_1 считается известной.

2. Ограничим рассмотрение уравнений Беллмана—Якоби, определенных в области R' равенствами (1.23), (1.28), (1.30), (1.31), (1.33), (1.36), обозначив каждое из них как $\tilde{B} = 0$, а всю совокупность — $\{\tilde{B} = 0\}$. Приняв решение какого-либо из перечисленных здесь $\tilde{B}[S] = 0$ уравнений в области R' в виде $S(x, x'')$, можно убедиться, что если $S(x, x'') \in C^1$ в R', то соответствующий экстремальный регулятор $\tilde{u}(z, \partial\tilde{S}/\partial x)$ — непрерывная вектор-функция от $z \in G'$ определяет на траекториях системы (1.4) в G' непрерывное по t экстремальное управление $\tilde{u}[t] = \tilde{u}\left(z[t], \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x}[t]\right)$. Следовательно, $d\tilde{S}/dt$ определена и непрерывна по t вдоль траекторий системы (1.4) в G'. Используя результаты и обозначения работ [5, 3, 7, 1], можно сформулировать т е о р е м у.

1° *Пусть решения $z[t]$ системы* (1.4) *существуют и единственны в G', а x' $[t]$ неограниченно-продолжаемы для и из класса любых кусочно-непрерывных $u[t]$ на области Ω* (1.3).

2° *Пусть в силу свойств функций w_{si}, ω_0, W выполнены условия x^I-автономности и «равномерности» экстремального режима в G'.*

3° *Подынтегральная функция $\omega_0(u \mid x, x'')$ функционала* (1.5) *удовлетворяет системе свойств* (ω_*), *функция $W(u)$ — системе свойств* (W^*).

4° *В качестве регулятора системы* (1.4) *в G' избрана однозначная, непрерывная ввиду условий 2°, 3° вектор-функция $\tilde{u}(z, p)$, доставляющая минимум выражению $\tilde{B}$ по $u \in \Omega$ (экстремальный регулятор).*

5° *Существует функция $\tilde{S}(x, x_0'')$, удовлетворяющая на R условиям:*
5°1 *$\tilde{S}(x, x_0'')$ — решение уравнения Беллмана—Якоби $\tilde{B}[\tilde{S}] = 0$ на R';*
5°2 *$\tilde{S}(x, x_0'') \in C^1$ на R'; для всякого $x_0'' \in H'' : \tilde{S}(x \mid x_0'')$ непрерывна в $x = 0$; $\tilde{S}(0 \mid x_0'') = 0$; $\tilde{S}(x \mid x_0'') > 0$ при $x \neq 0$;*
5°3 *$\tilde{S}(x, x_0'') \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$ для всякого $x_0'' \in H''$;*

5°4 *на экстремальном регуляторе* $\tilde{u}$ *функция* ω_0 *является x-определенно-положительной* [3]: *для всякого* $x_0'' \in H''$ *существует* $\omega(x) \in C$ *на* X; *в* X' $\omega(x) > 0$, *удовлетворяющая в* G' *неравенству*

$$\omega_0\left[\tilde{u}\left(z, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x}\right)\middle| x, x_0''\right] \geqslant \omega(x).$$

Тогда экстремальное управление $\tilde{u}[t]$ *будет оптимальным:* $u^*[t]$ — *вектор-функция* $\tilde{u}[t]$ *переводит каждую точку* $z[0]$ *в* $x = 0$, *а функционал* (1.5) *достигает минимума, причем выполняются равенства*

$$\inf_{\hat{u}} I[z(0) \mid \hat{u}] = I[z(0) \mid \tilde{u}] = \tilde{S}[x(0), x_0'']. \tag{2.1}$$

Выполнение первого из условий в 2° необходимо для существования уравнения Беллмана—Якоби вида $\tilde{B}[S] = 0$, допускающего решение $S = \tilde{S}(x, x_0'')$, а выполнение второго условия в 2° определяет задание вида экстремального режима. Доказательство управляемости аналогично работам [7] (теорема VIII) и [3] (теорема 3.1). Согласно условиям 1°, 5°1, 5°2 и оценке 5°4 величина $\tilde{S}[t] > 0$ монотонно убывает вдоль экстремальных траекторий с ростом t, не оставаясь больше $\varepsilon_0 > 0$, а решение $\tilde{x}[t]$ в силу 5°3 принадлежит ограниченной области $\tilde{X} < X'$. Тогда ввиду 5°4 и согласно теоремам VIII [7] и 3.1 [3] для всякого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $\tilde{t}(\varepsilon_1) > 0$ такое, что $\|\tilde{x}[t]\| < \varepsilon_1$ для $t > \tilde{t}(\varepsilon_1)$. Следовательно, экстремальное управление $\tilde{u}[t] = \tilde{u}\left(z[t], \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x}[t]\right)$ переводит каждую точку $z[0] \in G'$ за конечный или бесконечный интервал $t^*(z[0])$ на множество цели $X^0 : \|x\| = 0$. Вследствие управляемости системы (1.4) и ввиду условий 4°, 5°, 5°1, 5°2 выполняются все условия теоремы Калмана [1], из которой следует вторая часть утверждения, выражаемая равенствами (2.1).

Рассмотрим выражение

$$\tilde{\omega}_0(z) = L_2\left[\tilde{u}\left(z, \frac{\partial S}{\partial x}\right)\middle| x, x''\right] + L_0(x, x''). \tag{2.2}$$

Можно заметить, что в случаях $L_2 = L_2(W \mid x, x'')$, $W(u) \in \hom \nu_0 > 1$ или $W(u) \in \hom 1$, когда уравнения Беллмана—Якоби $\tilde{B}(S) = 0$ имеют вид (1.30) и (1.31), условие x'-автономности совпадает с независимостью L_2 от x' на соответствующем экстремальном регуляторе. Для них правая часть в (2.2) не зависит от x' и оказывается функцией $\omega(x)$ в оценке (5.4) для всякого $x'' \in H''$.

Аналогично [3] получаем утверждение, обратное к приведенной здесь теореме и близкое к задаче обращения проблемы аналитического конструирования регуляторов [2].

Пусть задана функция $S(x, x'')$ на области R, удовлетворяющая условиям 5°2, 5°3 теоремы. Пусть для нее найдутся: число W^0, функция $W(u)$ со свойствами (W_*), дифференцируемая функция $L_2(u \mid x, x'')$ со свойствами (1.6) и (1.8) на R_1 такие, что для всех точек $z \in G'$ $\inf H_1(u)$ достигается на Ω (1.3) либо в единственной стационарной точке $H_1(u^0)$, отличной от нуля, либо в единственной граничной точке $W(u^1) = W^0$. Выберем в качестве регулятора системы (1.4) вектор-функцию $\tilde{u}(z, \partial S/\partial x)$, полученную заменой p на $\partial S/\partial x$ в формулах, определяющих экстремальный регулятор $\tilde{u}(z, p)$ для функции $H_1(u)$, соответствующей рассматриваемому выражению $\tilde{B}$ (он определяется из систем (1.17), (1.18), (1.20); (1.25), (1.27); (1.35); (1.37)). Пусть на G' выражение $\tilde{H}_1\left[\tilde{u}\left(z, \frac{\partial S}{\partial x}\right)\middle| z\right]$ не содержит x'. Определим функции $\tilde{L}(x, x'')$, $\omega_0(z)$ в G' равенствами

$$\tilde{L}_0(x, x'') = -\tilde{H}_1\left[\tilde{u}\left(z, \frac{\partial S}{\partial x}\right)\middle| z\right], \tag{2.3}$$

$$\omega_0(z) = -w_{si}\tilde{u}_i\left(z, \frac{\partial S}{\partial x}\right)\frac{\partial S}{\partial x_s}. \tag{2.4}$$

Пусть функция $\omega_0(z)$, определенная равенством (2.4), удовлетворяет в G' оценке 5°4. При выполнении перечисленных условий получаем утверждение: регулятор $\tilde{u}\left(z, \frac{\partial S}{\partial x}\right)$ оптимален для системы (1.4) со множеством цели $x^0 : \|x\| = 0$ относительно функционала

$$J[z(0)\,|\,\hat{u}] = \int\limits_0^{t^*} \{L_2(u\,|\,x, x'') + \tilde{L}_0(x, x'')\}\,d\tau.$$

Здесь $\tilde{L}_0$ задана равенством (2.3), $\hat{u} \in \Omega$ (1.3), $\hat{u}[t]$ — кусочно-непрерывная вектор-функция времени. Равенства (2.1) выполняются.

3. Примеры. Рассмотрим систему, управляемую кусочно-непрерывной вектор-функцией $u[t]$:

$$dy/d\tau = g[y, t] + u, \qquad dt/d\tau = 1, \tag{3.1}$$

обладающую свойствами: размерность $\dim y = \dim u = n$; $\|y[t]\| = \|y(0)\|$ при $u \equiv 0$; $\|u\| \leqslant W^0$; $g(y, t) \in C^1$ на $t \geqslant 0$, $y \in R^n (g(0, t) \equiv 0)$ и названную в [1] норм-инвариантной. Пусть критерием качества являются функционалы:

$$I_1 = \int\limits_0^{t^*} 1 \cdot d\tau, \qquad I_2 = \int\limits_0^{t^*} (\|u\| + k)\,d\tau \qquad (k = \mathrm{const} > 0), \tag{3.2}$$

t^* не задано, а множество цели $Y^0 : \|y[t^*]\| = 0$. Задачи Атанса состоят в том, чтобы перевести y на Y^0, минимизируя I_1 или I_2. Введем переменные $x = \|y\|$, $x'_i = y_i\|y\|^{-1}$, $x'_0 = t$ $(i = \overline{1, n};\ \|x'_i\| = 1)$. Поскольку при $\|u\| \equiv 0$ x — инвариант системы (3.1), имеем [1,2] уравнение

$$\dot{x} = x'_i u_i. \tag{3.3}$$

Выполнение условия 3° теоремы для ω_{0j} $(j = 1, 2)$ у функционалов (3.2) и функции $W_a = \|u\|$ очевидно. Выражение H_{11} согласно равенству (1.10) имеет вид $px'_i u_i$ и достигает минимума на $\|u\| \leqslant w^0$ при $\underset{1}{u^1} = -w^0 x' p\,|p|^{-1}$, так что этот случай — строго граничный. Ввиду $l(x) \equiv 0$, $W_a \in \mathrm{hom}\,1$, $D_0 = 0$ должна существовать функция связи $P(v)$ переменных $v_i = \mu \nabla W_a(u) = \mu u_i\,\|u\|^{-1}$. По формуле (1.29) имеем $P_a(v) = W^0\|v\| - 1$. Выражая u_i через R, v_i согласно формуле (1.25), получаем равенства $u^1_{i1} = w^0 v^1_{i1}\|v^1\|^{-1}$, где в силу формул (1.18) $v^1_{i1} = -x'_i p$, отсюда

$$u^1_{i1} = -w^0 x'_i. \tag{3.4}$$

Уравнение Беллмана—Якоби имеет здесь согласно (1.31) вид

$$w^0(1 - w^0\|\underset{1}{v^1}\|) = 0. \tag{3.5}$$

Величина $\underset{1}{\mu^*} = \|\underset{1}{v^1}\| = {w^0}^{-1}$ не зависит от t, x'_i, т. е. условия теоремы 2° выполняются. Уравнение (3.5) имеет решение $S_1 = {w^0}^{-1}\|y\|$, которое удовлетворяет всем условиям 5° теоремы, поскольку $\dot{S}_1 = -1$. Результаты совпадают с соответствующими результатами Атанса [1]. Аналогичным образом для критерия I_2, используя выражение $H_{12} = \|u\| + px'_i u_i$, формулы (1.18), (1.25), (1.31) и выражение функции μ_2^*, получаем формулы

$$u^1_{i2} = -w^0 x'_i; \qquad \mu_2^* = k w^{0^{-1}}; \qquad S_2 = (1 + k w^{0^{-1}}) \|y\|,$$

на основании которых для системы (3.1) с критерием качества I_2 заключаем, что все условия теоремы выполняются, а результаты тождественны результатам, известным в [1] для этого случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атанс М., Фалб П., Оптимальное управление, М., 1968.
2. Летов А. М., Динамика полета и управление, М., 1969.
3. Румянцев В. З., Об оптимальной стабилизации управляемых систем, **34**, вып. 3, 1970.
4. Неймарк Ю. И., Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний, М., 1972.
5. Красовский Н. Н., Проблемы стабилизации управляемых движений, В кн.: Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, доп. 4, М., 1969.
6. Гантмахер Ф. Р., Лекция по аналитической механике, М., 1966.
7. Ла-Салль Ж., Левшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, М., 1964.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
25/XII 1973

I. KEIS

INVARIANTIDEGA SÜSTEEMIDE OPTIMAALNE JUHTIMINE

Vaadeldakse autonoomsete süsteemide liikumiste optimaalset stabiliseerimist ainult osa muutujate suhtes. Vastava kriteeriumi integraalialune funktsioon on kumeras kompaktses piirkonnas asuvate juhtivjõudude järgi kumer. Artiklis leitakse Bellmani-Jacoby võrrandi kujud erinevate ekstremaalsete režiimide puhuks. Tõestatake teoreem, mis selgitab juhtivuse piisavaid tingimusi osa muutujate järgi, ja antakse funktsionaali kuju, mis on minimaalne mingi funktsiooni poolt tekitatud juhtimisel.

I. KEIS

ON OPTIMAL CONTROL OF THE SYSTEM WITH INVARIANTS

The problem of optimal stabilization of some phase components is considered in the article. Different forms of Bellman-Jacoby's equations are obtained for convex performance index over controls. The conditions of optimal controllability of some phase components are proved in the theorem. The expression of an integral performance index obtaining its minimum value on controls corresponding to some Bellman's functions, is put forward.