EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.3.02

УДК 539.126

Р.-К. ЛОЙДЕ

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ МАССЫ

1. Задача релятивистски-инвариантного уравнения заключается в описании частиц с различными массами и спинами. Так как в общем такие уравнения описывают несколько частиц, то для выделения одной из них требуются добавочные условия. Однако квантование уравнений с добавочными условиями связано с трудностями и поэтому в этом смысле больший интерес представляет получение уравнений без добавочных условий. Если раньше в основном рассматривали уравнения первого порядка [1], то в последнее время стали исследовать и уравнения высшего порядка [2]. Надо отметить, что в принципе для описания одной частицы можно получать уравнения без добавочных условий только из уравнений первого или второго порядка. Остальные уравнения всегда описывают несколько частиц.

В случае высших спинов ($s \geqslant 1$) представляет интерес нахождение конкретных уравнений без добавочных условий. Для некоторых представлений такие уравнения приведены в работах [3, 4]. В данной статье мы рассмотрим общие уравнения для одной массы и применим некоторые идеи работы [3] для выяснения структуры характеристического уравнения, знание которой при этом необходимо. Определим проекционные операторы для выделения состояний с определенным спином.

2. Запишем общее инвариантное уравнение порядка r в виде

$$p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_r} \beta^{\mu_1 \ldots \mu_r} \Psi(p) = \varkappa^r \Psi(p), \tag{1}$$

где $\varkappa > 0$ и $\Psi(p)$ преобразуется по некоторому конечномерному представлению группы Лоренца.

В системе покоя ($\mathbf{p} = 0$, $p_0 \equiv \hat{p}_0$) получим

$$(\hat{p}_0)^r \beta^{0 \ldots 0} \Psi(0) = \varkappa^r \Psi(0).$$

Так как $\hat{p}_0 = \varepsilon m$, где m — масса покоя, ε — знак энергии, то для каждого ненулевого собственного значения b оператора $\beta^{0 \cdots 0}$ получим $b = \left(\frac{\varkappa}{\varepsilon m}\right)^r$ или $\hat{p}_0 = \varkappa b^{-\frac{1}{r}}$, т. е. r различных значений массы. Поэтому одну частицу можно описывать только уравнениями первого порядка, если β^0 имеет не больше и не меньше двух ненулевых собственных значений $\pm b$, или уравнениями второго порядка, если β^{00} имеет только одно ненулевое собственное значение b.

Далее рассмотрим уравнения, описывающие частицы с одной фиксированной массой покоя m. Операторы β^0 и β^{00} удобно выбрать в таком виде, чтобы соответствующие собственные значения были равны ± 1 и $+1$. Тогда $\varkappa = m$ и уравнения принимают вид

$$(p_\mu \beta^\mu - m)\psi(p) = 0, \tag{2}$$

$$(p_\mu p_\nu \beta^{\mu\nu} - m^2)\psi(p) = 0. \tag{3}$$

В случае одной массы покоя m функция $\psi(p)$ должна удовлетворять уравнению Клейна—Гордона

$$(p^2 - m^2)\psi(p) = 0. \tag{4}$$

Это значит, что существует оператор $d(p)$, удовлетворяющий условию [5, 6]

$$d(p)\,(p_\mu \beta^\mu - m) = p^2 - m^2. \tag{5}$$

Аналогичный оператор $d(p)$ будем рассматривать и для уравнений второго порядка. В этом случае

$$d(p)\,(p_\mu p_\nu \beta^{\mu\nu} - m^2) = p^2 - m^2. \tag{6}$$

Оператор $d(p)$ важен при квантовании полей, так как с его помощью выражаются перестановочные соотношения операторов полей.

3. Рассмотрим уравнения первого порядка. Оператор $d(p)$ запишем в виде

$$d(p) = \alpha + p_\mu \alpha^\mu + \ldots + p_{\mu_1} \ldots p_{\mu_k} \alpha^{\mu_1 \ldots \mu_k} + \ldots . \tag{7}$$

Использовав условие (5), матрицы $\alpha^{\mu_1 \ldots \mu_k}$ можно представить через β^μ:

$$\begin{aligned} &\alpha = mI, \\ &\alpha^\mu = \beta^\mu, \\ &\alpha^{\mu\nu} = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{2}(\beta^\mu\beta^\nu + \beta^\nu\beta^\mu) - g^{\mu\nu}\right], \\ &\alpha^{\mu_1 \ldots \mu_k} = \frac{1}{k!\,m^{k-1}} \sum_{\Pi} (\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2} - g^{\mu_1\mu_2})\,\beta^{\mu_3} \ldots \beta^{\mu_k}, \qquad k > 2, \end{aligned} \tag{8}$$

(Π — сумма по всем перестановкам индексов). Следовательно, $d(p)$ выразится через β^μ следующим образом

$$\begin{aligned} d(p) = m + p_\mu \beta^\mu + \frac{1}{m}((p_\mu \beta^\mu)^2 - p^2) + \ldots + \\ + \frac{1}{m^{k-1}}((p_\mu \beta^\mu)^2 - p^2)\,(p_\nu \beta^\nu)^{k-2} + \ldots . \end{aligned} \tag{9}$$

Согласно Хариш—Чандра [7], матрицы β^μ удовлетворяют при некотором конечном $k+1$ условию

$$\sum_{\Pi} (\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2} - g^{\mu_1\mu_2})\,\beta^{\mu_3} \ldots \beta^{\mu_{k+1}} = 0, \tag{10}$$

а поэтому $\alpha^{\mu_1 \ldots \mu_{k+1}} = 0$ и порядок $d(p)$ по степеням p_μ равен k. Принимая в формуле (10) $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{k+1} = 0$, получаем для β^0 характеристическое уравнение

$$(\beta^0)^{k-1}({\beta^0}^2 - I) = 0. \tag{11}$$

Из (11) видно, что собственные значения β^0 могут быть равны $\pm 1, 0$.

Если $\psi(p)$ записать в виде прямой суммы неприводимых представлений группы Лоренца, то матрицу β^0 можно выразить через проекционные операторы спина $t^{(s)}_{(a)(b)}$, выделяющие одинаковые спины s в неприводимых представлениях (a) и (b) [2]. Уравнения первого порядка содержат проекционные операторы всех спинов, одинаковых в связанных между собой неприводимых представлениях. Допустим, что β^0 содержит проекционные операторы $t^{(s)}$ следующих спинов — $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Тогда β^0 можно записать в виде

$$\beta^0 = \beta^{(s_1)} + \beta^{(s_2)} + \ldots + \beta^{(s_m)}, \tag{12}$$

где $\beta^{(s_i)}$ содержит только проекционные операторы спина s_i. Поскольку $t^{(s)}$ удовлетворяют соотношениям

$$t^{(s)}_{(a)(b)}\, t^{(s')}_{(b)(c)} = \delta_{ss'}\, t^{(s)}_{(a)(c)}, \tag{13}$$

то $\beta^{(s_i)}$ — соотношениям

$$\beta^{(s_i)}\beta^{(s_j)} = \delta_{s_i s_j}\,(\beta^{(s_i)})^2. \tag{14}$$

Операторы $\beta^{(s_i)}$ не являются проекционными операторами, поскольку в общем $(\beta^{(s_i)})^2 \neq \beta^{(s_i)}$.

Условие (5) (или (4)), накладываемое на уравнение, гарантирует, что (2) описывает частицы с определенной массой покоя m, т. е. одну массу покоя. Поэтому уравнение в общем описывает несколько частиц с одним или различными спинами. Пусть массе m соответствует h спинов $s_1, s_2, \ldots, s_h$. Это значит, что собственные значения соответствующих $\beta^{(s_i)}$ должны быть $\pm 1, 0$ и матрицы $\beta^{(s_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ должны удовлетворять характеристическим уравнениям

$$(\beta^{(s_i)})^{a_i}((\beta^{(s_i)})^2 - I) = 0, \tag{15}$$

где $a_i \geqslant 1$ $\left(a_i = 0 \text{ только для представления } \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)\right)$. Операторы $\beta^{(s_i)}$ остальных спинов s_i $(i = h+1, \ldots, m)$ могут иметь только нулевые собственные значения и удовлетворять характеристическим уравнениям

$$(\beta^{(s_i)})^{b_i} = 0, \tag{16}$$

где $b_i \geqslant 2$ $(i = h+1, \ldots, m)$. Это значит, что эти матрицы нильпотентные.

Из соотношений (15) и (16), учитывая (12) и (14), видно, что β^0 удовлетворяет характеристическому уравнению (11) и

$$k - 1 = \max\{a_i, b_j\}. \tag{17}$$

Так как операторы $t^{(s)}_{(a)(a)}$ удовлетворяют еще соотношению

$$\sum_s t^{(s)}_{(a)(a)} = I, \tag{18}$$

где сумма по всем спинам в представлении (a), то степень характеристического уравнения может быть и меньше значения, данного соотношением (17)

$$k - 1 \leqslant \max\{a_i, b_j\}. \tag{19}$$

Когда уравнение описывает одну частицу со спином s_i, то $\beta^{(st)}$ удовлетворяет характеристическому уравнению (15), остальные — уравнениям (16). Надо отметить, что в общем это требование необходимое, но недостаточное.

Для выделения решений с определенным спином удобно ввести соответствующие операторы проектирования. Когда $\beta^{(st)}$ удовлетворяет характеристическому уравнению (15), операторы проектирования собственных значений ± 1 имеют вид [8]

$$\begin{aligned} P^{st}_{\pm 1} &= \frac{1}{2}(\beta^{(st)})^{a_i}(\beta^{(st)} \pm I), \quad a_i \text{ — нечетный}, \\ P^{st}_{\pm 1} &= \frac{1}{2}(\beta^{(st)})^{a_i}(I \pm \beta^{(st)}), \quad a_i \text{ — четный}, \end{aligned} \tag{20}$$

а собственного значения 0 — вид

$$P^{st}_0 = I - (\beta^{(st)})^{a_i+1}, \quad a_i \text{ — нечетный},$$
$$P^{st}_0 = I - (\beta^{(st)})^{a_i}, \quad a_i \text{ — четный}.$$

Используя уравнение (15), нетрудно убедиться, что операторы P_u ($u = +1, -1, 0$) удовлетворяют соотношениям $P_u P_v = \delta_{uv} P_u$, т. е. являются операторами проектирования.

Если P_u — оператор проектирования собственного значения u некоторого оператора β, то P_u удовлетворяет соотношению [9]

$$\beta P_u = P_u \beta = P_u \beta P_u = u P_u + D_u, \tag{21}$$

где D_u — собственный нильпотент оператора β, соответствующий собственному значению u.

В данном случае, используя (15) и (20), получаем

$$\beta^{(st)} P^{st}_{\pm 1} = P^{st}_{\pm 1} \beta^{(st)} = \pm P^{st}_{\pm 1}, \tag{22}$$

т. е. $D^{st}_{\pm 1} = 0$, и

$$\beta^{(st)} P^{st}_0 = P^{st}_0 \beta^{(st)} = D^{st}_0,$$

где

$$D^{st}_0 = \beta^{(st)} - (\beta^{(st)})^{a_i}, \quad a_i \text{ — нечетный},$$
$$D^{st}_0 = \beta^{(st)} - (\beta^{(st)})^{a_i+1}, \quad a_i \text{ — четный}.$$

В обоих случаях $(D^{st}_0)^{a_i} = 0$.

Из (22) видно, что P^{st}_{+1} выделяет решение со спином s_i и положительной энергией $\psi_{st, \epsilon=+1} = P^{st}_{+1}\psi$, а P^{st}_{-1} — решение со спином s_i и отрицательной энергией $\psi_{st, \epsilon=-1} = P^{st}_{-1}\psi$. Используя (12) и (14), легко убедиться, что $\psi_{st, \epsilon=+1}$ и $\psi_{st, \epsilon=-1}$ — собственные функции и оператора β^0, т. е. решения уравнения (2) в системе покоя ($\mathbf{p} = 0$). Решение со спином s_i в произвольной системе с импульсом p^μ можно получить из решений в системе покоя с помощью буст-преобразования

$$U = \exp(-v_i S^{0i}),$$

где $\frac{v_i}{v} = \frac{p_i}{|\mathbf{p}|}$, $\operatorname{th} v = \frac{|\mathbf{p}|}{p^0}$ и S^{0i} — генераторы группы Лоренца.

Выпишем еще спектральное представление оператора β^0 [9]. Матрицы $\beta^{(st)}$ ($i = 1, 2, \ldots, h$) можно записать в виде

$$\beta^{(st)}=P^{st}_{+1}-P^{st}_{-1}+D^{st}_{0}$$

и β^0 в виде

$$\beta^0=P+D, \tag{23}$$

где

$$P=\sum_{i=1}^{h}\left(P^{st}_{+1}-P^{st}_{-1}\right)$$

и

$$D=\sum_{i=1}^{h}D^{st}_{0}+\sum_{i=h+1}^{m}\beta^{(st)}\,.$$

Оператор P — диагонализируемый (диагональные элементы $+1$, -1 и 0), оператор D — нильпотентный и $D^r=0$, где $r=\max\{a_i, b_i\}$.

4. В качестве примера рассмотрим уравнение Паули-Фирца для спина $^3/_2$. Соответствующее представление группы Лоренца: $\left(1, \frac{1}{2}\right)\oplus\left(0, \frac{1}{2}\right)\oplus\left(\frac{1}{2}, 0\right)\oplus\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Обозначив представления $(a)=\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $(b)=\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $(c)=\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ и $(d)=\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, β^0 можно записать в следующем общем виде [2]:

$$\beta^0=\begin{vmatrix} 0 & 0 & at_{(a)(c)} & t_{(a)(d)} \\ 0 & 0 & ct_{(b)(c)} & bt_{(b)(d)} \\ bt_{(c)(a)} & ct_{(c)(b)} & 0 & 0 \\ t_{(d)(a)} & at_{(d)(b)} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{24}$$

где $t_{(a)(d)}=\overset{(^3/_2)}{t}_{(a)(d)}+\frac{1}{2}\overset{(^1/_2)}{t}_{(a)(d)}$, $t_{(d)(a)}=\overset{(^3/_2)}{t}_{(d)(a)}+\frac{1}{2}\overset{(^1/_2)}{t}_{(d)(a)}$, а остальные $t=t^{(^1/_2)}$; a, b, c — постоянные, подлежащие определению.

Запишем β^0 в виде $\beta^0=\beta^{(^3/_2)}+\beta^{(^1/_2)}$. Тогда

$$\beta^{(^3/_2)}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \overset{(^3/_2)}{t}_{(a)(d)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overset{(^3/_2)}{t}_{(d)(a)} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\beta^{(^1/_2)}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & a\overset{(^1/_2)}{t}_{(a)(c)} & \frac{1}{2}\overset{(^1/_2)}{t}_{(a)(d)} \\ 0 & 0 & c\overset{(^1/_2)}{t}_{(b)(c)} & b\overset{(^1/_2)}{t}_{(b)(d)} \\ b\overset{(^1/_2)}{t}_{(c)(a)} & c\overset{(^1/_2)}{t}_{(c)(b)} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\overset{(^1/_2)}{t}_{(d)(a)} & a\overset{(^1/_2)}{t}_{(d)(b)} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Используя (13), получаем, что $\beta^{(^3/_2)}$ удовлетворяет характеристическому уравнению $\beta^{(^3/_2)}\left(\left(\beta^{(^3/_2)}\right)^2-I\right)=0$ $(a_1=1)$. Поскольку уравнение Паули-Фирца описывает только одну частицу со спином $^3/_2$, то оператор $\beta^{(^1/_2)}$ должен быть нильпотентным. Требуя $\left(\beta^{(^1/_2)}\right)^2=0$ $(b_2=2)$, получаем

$c=-\frac{1}{2}$ и $ab=-\frac{1}{4}$. Так как $\max\{a_1, b_2\}=2$, то β^0 удовлетворяет характеристическому уравнению

$$(\beta^0)^2((\beta^0)^2-I)=0. \tag{25}$$

Исходя непосредственно из (24) и требуя выполнения соотношения (25), находим для a, b и c еще следующие решения:

1) $c=+\frac{1}{2}$, $ab=\frac{1}{4}$; 2) $c=-\frac{3}{2}$, $ab=-\frac{3}{4}$ и 3) $c=-\frac{1}{2}$, $ab=\frac{3}{4}$.

Нетрудно проверить, что $\beta^{(1/2)}$ удовлетворяет характеристическому уравнению $\beta^{(1/2)}((\beta^{(1/2)})^2-I)=0$, а (2) описывает и частицы со спином $1/2$. Прямое вычисление показывает, что первые два решения дают уравнения, которые описывают одну частицу со спином $3/2$ и одну частицу со спином $1/2$, причем β^0 удовлетворяет характеристическому уравнению $\beta^0((\beta^0)^2-I)=0$, поскольку $a_1=1$, $a_2=1$ и $\max\{a_1, a_2\}=1$. Третье решение дает уравнение Рариты—Швингера без добавочных условий. Так как $\overset{(3/2)}{t}_{(a)(a)}+\overset{(1/2)}{t}_{(a)(a)}=I$ и $\overset{(3/2)}{t}_{(d)(d)}+\overset{(1/2)}{t}_{(d)(d)}=I$, то β^0 удовлетворяет уже характеристическому уравнению $(\beta^0)^2=I$ и поэтому описывает одну частицу со спином $3/2$ и две частицы со спином $1/2$.

Из этого примера видно, что характеристическое уравнение (11) не определяет, какие частицы данное инвариантное уравнение описывает. Нам нужно знать еще и характеристические уравнения отдельно для каждого спина. Но оказывается, что и этого может быть недостаточно и нужны еще некоторые другие критерии. В данном примере во всех трех случаях $\beta^{(1/2)}((\beta^{(1/2)})^2-I)=0$, но первые два решения описывают одну, последнее — две частицы.

5. Для уравнений второго порядка имеют место аналогичные соображения. Оператор $d(p)$ можно выбрать в виде

$$d(p)=\alpha+p_\mu p_\nu\alpha^{\mu\nu}+\ldots+p_{\mu_1}\ldots p_{\mu_{2k}}\alpha^{\mu_1\ldots\mu_{2k}}+\ldots \tag{26}$$

Из условия (6) получим

$$\begin{aligned} &\alpha=I,\\ &\alpha^{\mu\nu}=\frac{1}{m^2}(\beta^{\mu\nu}-g^{\mu\nu}),\\ &\alpha^{\mu_1\ldots\mu_{2k}}=\frac{1}{(2k)!\,m^{2k}}\sum_{\Pi}(\beta^{\mu_1\mu_2}-g^{\mu_1\mu_2})\beta^{\mu_3\mu_4}\ldots\quad\beta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}},\quad k>1, \end{aligned} \tag{27}$$

и $d(p)$ выразится через $\beta^{\mu\nu}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} d(p)=I&+\frac{1}{m^2}(p_\mu p_\nu\beta^{\mu\nu}-p^2)+\ldots+\\ &+\frac{1}{m^{2k}}(p_\mu p_\nu\beta^{\mu\nu}-p^2)(p_\rho p_\sigma\beta^{\rho\sigma})^{k-1}+\ldots \end{aligned} \tag{28}$$

Из требования конечности порядка $d(p)$ находим, что начиная с некоторого k $\alpha^{\mu_1\ldots\mu_{2k+2}}=0$.

Тогда

$$\sum_{\Pi}(\beta^{\mu_1\mu_2}-g^{\mu_1\mu_2})\beta^{\mu_3\mu_4}\ldots\beta^{\mu_{2k+1}\mu_{2k+2}}=0. \tag{29}$$

Принимая $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{2k+2} = 0$, получаем для β^{00} следующее характеристическое уравнение

$$(\beta^{00})^k (\beta^{00} - I) = 0. \tag{30}$$

Собственные значения β^{00} равны $+1$ и 0.

Разложим β^{00} по операторам $\beta^{(s_t)}$. Пусть массе m соответствуют спины $s_1, s_2, \ldots, s_h$, тогда $\beta^{(s_t)}$ должны удовлетворять характеристическим уравнениям

$$(\beta^{(s_t)})^{a_t} (\beta^{(s_t)} - I) = 0. \tag{31}$$

Операторы $\beta^{(s_t)}$ остальных спинов $s_{h+1}, \ldots, s_m$ должны быть нильпотентными

$$(\beta^{(s_t)})^{b_t} = 0. \tag{32}$$

Операторы проектирования $P^{s_t}_{+1}$ и $P^{s_t}_{0}$ имеют вид

$$P^{s_t}_{+1} = (\beta^{(s_t)})^{a_t}, \quad P^{s_t}_{0} = I - (\beta^{(s_t)})^{a_t}. \tag{33}$$

Из соотношения (31) получим $\beta^{(s_t)} P^{s_t}_{+1} = P^{s_t}_{+1} \beta^{(s_t)} = P^{s_t}_{+1}$ и $\beta^{(s_t)} P^{s_t}_{0} = P^{s_t}_{0} \beta^{(s_t)} = 0$.

Примерами уравнений второго порядка служат уравнения с представлением $(a) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ для спина 0 и спина 1. В этом случае соответственно $\beta^{00} = t^{(0)}_{(a)(a)}$ и $\beta^{00} = t^{(1)}_{(a)(a)}$ и поэтому в обоих случаях $\beta^{00}(\beta^{00} - I) = 0$. Второе уравнение — это уравнение Прока для спина 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Corson E. M., Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations, Glasgow, Scotland, 1953.
2. Loide R.-K., Some Remarks on Relativistically Invariant Equations, Preprint FAI-10, Tartu, 1972.
3. Capri A. Z., Phys. Rev., **178**, 2427 (1969).
4. Shamaly A., Capri A. Z., Nuovo Cimento, **2B**, 235 (1971).
5. Umezawa H., Progr. Theor. Phys., **7**, 551 (1952).
6. Umezawa H., Visconti A., Nucl. Phys., **1**, 348 (1956).
7. Harish-Chandra, Phys. Rev., **71**, 793 (1947).
8. Федоров Ф. И., ЖЭТФ, **35**, 493 (1958).
9. Като Т., Теория возмущений линейных операторов, М., 1972.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 18/I 1974

R.-K. LOIDE

VÕRRANDID ÜHE MASSI JAOKS

Käsitletakse lisatingimusteta võrrandeid, mis kirjeldavad ühte seisumassi m. Avaldades maatriksid β° ja β^{∞} spinni s_i projektsioonioperaatoreid sisaldavate operaatorite $\beta^{(s_i)}$ kaudu, on antud operaatorite $\beta^{(s_i)}$ karakteristikud võrrandid. Välja on kirjutatud projektsioonioperaatorid, mis eraldavad lahendeid massiga m ja spinniga s_i.

R.-K. LOIDE

EQUATIONS FOR SINGLE MASS

Equations without subsidiary conditions describing a single rest mass m are considered. Matrices β° and β^{∞} are written as a sum of operators $\beta^{(s_i)}$ containing spin projection operators for spin s_i. The structure of characteristic equations of $\beta^{(s_i)}$ is clarified. Projection operators which separate the solutions with mass m and spin s_i are written out.