EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.3.01

УДК 519.21

*Т. ТОБИАС*

# ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С ВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ ДИФФУЗИИ

Цена оптимальной остановки вырожденного диффузионного процесса построена как предел решений невырожденных задач.

1. Рассмотрим следующую задачу статистического последовательного анализа. Пусть $x_t$ — случайный процесс и $c(x,t)$ — функция выигрыша. Среди всевозможных марковских моментов $\tau$ требуется найти $\tau^*$ так, чтобы

$$u(x,t)=\sup_{\tau} E_{x,t}c(x_\tau,\tau)=E_{x,t}c(x_{\tau^*},\tau^*). \tag{1}$$

Общая теория подобных задач об оптимальной остановке развита в [1]. Пусть $x_t$ — диффузионный процесс на конечном отрезке времени. Если производящий дифференциальный оператор $L$ процесса $x_t$ строго параболичен, то согласно [2], цена $u(x,t)$ будет решением определенного вариационного неравенства. На практике, однако, часто встречаются процессы с вырожденным оператором $L$. Пусть, например, мы имеем процесс $x_t$, часть компонентов которого ненаблюдаема. Иногда неизвестные компоненты можно оценивать и заменять процесс $x_t$ эквивалентной, полностью наблюдаемой системой. Но производящий дифференциальный оператор полученной системы оказывается, как правило, вырожденным.

Рассмотрим пример. Пусть $x_t$ — одномерный диффузионный процесс, определяемый уравнением

$$dx_t=a(x_t,t)\theta\,dt+dw_t,\qquad x(0)=x_0. \tag{2}$$

Неизвестный параметр $\theta$ пусть является нормальной случайной величиной, $E\theta=\theta_0$, $D\theta=\gamma_0$. Обозначим $y_t=E(\theta|x_s,\ 0\leqslant s\leqslant t)$ и $\gamma_t=E[(\theta-y_t)^2|x_s,\ 0\leqslant s\leqslant t]$. В [3] показано, что

$$dx_t=a(x_t,t)y_t\,dt+d\widehat{w}_t, \tag{3}$$

$$dy_t=\gamma_t a(x_t,t)\,d\widehat{w}_t, \tag{4}$$

где $x(0)=x_0$, $y(0)=\theta_0$, $\gamma_t=[1+\gamma_0\int\limits_0^t a^2(x_s,s)\,ds]^{-1}\gamma_0$, а $\widehat{w}_t$ — винеровский процесс. Пусть задача состоит в оптимальной остановке процесса $(x_t,\ y_t)$. Производящий оператор процесса $(x_t,\ y_t)$ имеет вид: $L=\dfrac{\partial}{\partial t}+ay\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+2\gamma a\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+\gamma^2a^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$. Оператор $L$ — вырожденный параболический оператор, так как определитель матрицы вторых производных равен тождественно нулю.

Цель данной заметки — изучение задачи об оптимальной остановке вырожденных диффузионных процессов.

2. Пусть $\Omega \subset R_n$ — ограниченная область с гладкой границей и $Q = \Omega \times (0, T)$. Если $A \subseteq Q$, то через $\Sigma(A)$ обозначим параболическую часть границы области $A$.

Пусть $L = -\dfrac{\partial}{\partial t} + \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x,t) \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, где $a_{ij} \in$ $\in C^{2,1}(\bar{Q})$, $b_i \in C^1(\bar{Q})$ и $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant 0$ при всех $(x,t) \in Q$ и $\xi \in R_n$.

Допустим, что оператор $L$ строго монотонен в соболевском пространстве $W = W_q^{2,1}(Q)$ $(q > n+2)$, т. е. $(Lu - Lv, u - v)_A = \iint\limits_A (Lu - Lv)(u - v)\,dx\,dt < 0$ для всех $A \subseteq Q$ и функций $u \neq v$, $u|_{\Sigma(A)} = v|_{\Sigma(A)}$. Задачи об оптимальной остановке процессов с немонотонным оператором $L$ можно привести к рассмотренному случаю (см. [2]).

Пусть $c(x,t) \in C^{2,1}(\bar{Q})$ и $K = \{u : u \in W, u \geqslant c,\ u|_{\Sigma(Q)} = c|_{\Sigma(Q)}\}$. Рассмотрим вариационное неравенство

$$(Lu, u - v)_Q \geqslant 0. \tag{5}$$

Если оператор $L$ строго параболичен (т. е. $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \nu|\xi|^2$, $\nu > 0$), то в [2] доказано, что существует единственное $u \in K$, при котором (5) выполняется для всех $v \in K$. Это решение и является ценой оптимальной остановки диффузионного процесса $x_{T-t}$ с производящим оператором $L$. Оно имеет следующую структуру: в области $E = \{(x,t) : u > c\}$ выполняется уравнение $Lu = 0$, в области $Q \setminus E : u = c$, на границе $\Sigma(E)$:

$$u|_{\Sigma(E)} = c|_{\Sigma(E)}, \quad u_{x_i}|_{\Sigma(E)} = c_{x_i}|_{\Sigma(E)}. \tag{6}$$

3. Для исследования вырожденного случая воспользуемся известным способом приближения оператора $L$ невырожденными операторами. При изучении вырожденных уравнений этот метод использовался, например, в [4, 5].

Пусть $L^\varepsilon = L + \varepsilon\Delta$, где $\varepsilon > 0$, а $\Delta$ — оператор Лапласа. Рассмотрим неравенство

$$(L^\varepsilon u, u - v)_Q \geqslant 0, \tag{7}$$

которое имеет в конусе $K$ единственное решение $u^\varepsilon$.

Теорема 1. *Последовательность* $\{u^\varepsilon\}$, $\varepsilon \downarrow 0$ *компактна в пространстве* $C(\bar{Q})$.

Очевидно, что $\{u^\varepsilon\}$ ограничена (например, константой $c = \max\limits_{(x,t)\in\bar{Q}} c(x,t)$). Докажем равностепенную непрерывность этой последовательности.

Пусть $E^\varepsilon = \{(x,t) : u^\varepsilon > c\}$ и $\sum(E^\varepsilon) = \sum^\varepsilon$. Внутри $E^\varepsilon$ $L^\varepsilon u^\varepsilon = 0$. Ввиду (6) $u^\varepsilon_{x_i}\big|_{\Sigma^\varepsilon} = c_{x_i}\big|_{\Sigma^\varepsilon}$. Поэтому на границе производные $u^\varepsilon_{x_i}$ оцениваются равномерно (независимо от $\varepsilon$) константой $\max\limits_i \max\limits_{(x,t)\in\bar{Q}} |c_{x_i}|$. Из [4] следует, что тогда можно оценивать $u^\varepsilon_{x_i}$ независимо от $\varepsilon$ во всей области $E^\varepsilon$ (а тем самым и в $Q$, так как $u^\varepsilon \equiv c$ в области $Q \setminus E^\varepsilon$).

Поэтому $|u^\varepsilon_{x_i}|\leqslant M$, где $M$ зависит только от модуля коэффициентов $a_{ij}$ и $b_i$, а не от собственных значений матрицы $(a_{ij})$.

Покажем, что $|u^\varepsilon(x,t)-u^\varepsilon(x,t')|\leqslant N|t'-t|^{1/2}$, где $N$ не зависит от $\varepsilon$. Достаточно установить эту оценку внутри области $E^\varepsilon$. При этом воспользуемся известным результатом [6], что $E_{x,t}\{|x^\varepsilon_{it'}-x_{it}|^m\}\leqslant A|t'-t|^{m/2}$, где процесс $x^\varepsilon_t=(x^\varepsilon_{1t},\ \dots,\ x^\varepsilon_{nt})$ соответствует оператору $L^\varepsilon$, причем $A$ можно выбирать не зависящим от $\varepsilon$.

Пусть $(x,t)\in E^\varepsilon$ и $u^\varepsilon(x,t')>u^\varepsilon(x,t)+nMA(t'-t)^{1/2}$. Рассмотрим стратегию $\delta$, согласно которой из точки $(x,t)$ нужно продолжать движение в течение $\delta t=t'-t$, а затем по оптимальной стратегии $(\tau^\varepsilon)^*$ (т. е. до момента первого выхода процесса $x^\varepsilon_t$ из области $E^\varepsilon$). Соответствующая цена

$$u^\varepsilon_\delta(x,t)=E_{x,t}u^\varepsilon(x_{t'},t')=u^\varepsilon(x,t')+E_{x,t}\sum_{i=1}^n u^\varepsilon_{x_i}(x,t')(x^\varepsilon_{it'}-x_i)+o(t'-t)^{1/2}>$$

$>u^\varepsilon(x,t)$, что противоречит условию $(x,t)\in E^\varepsilon$.

Пусть найдется $t'$ такое, что $u^\varepsilon(x,s)+nAM(s-t)^{1/2}<u^\varepsilon(x,t)$, где $s\in(t,t')$, и пусть $\zeta=\min((\tau^\varepsilon)^*,t')$. Так как $\zeta\leqslant(\tau^\varepsilon)^*$, то $u^\varepsilon(x,t)=$ $=E_{x,t}u^\varepsilon(x^\varepsilon_\zeta,\zeta)$. Поэтому $u^\varepsilon(x,\ t)=E_{x,t}u^\varepsilon(x^\varepsilon_\zeta,\ \zeta)=E_{x,t}u^\varepsilon(x,\ \zeta)+$

$$+E_{x,t}\sum_{i=1}^n u^\varepsilon_{x_i}(x,\zeta)(x^\varepsilon_{i\zeta}-x_i)+o(t'-t)^{1/2}\leqslant E_{x,t}[u^\varepsilon(x,\zeta)+nM|x^\varepsilon_{j\zeta}-x_j|]+$$

$+o(t'-t)^{1/2}<u^\varepsilon(x,t)$. Поэтому в приведенном выше неравенстве можно принять $N=nAM$, что и завершит доказательство компактности $\{u^\varepsilon\}$, $\varepsilon\downarrow 0$.

Возьмем сходящуюся подпоследовательность $u^{\varepsilon_k}$ и пусть $u=\lim\limits_{\varepsilon_k\to 0}u^{\varepsilon_k}$.

Теорема 2. *Пусть* $E=\{(x,t):u>c\}$. *Тогда* $u=E_{x,t}c(x_{\tau(E)},\ \tau(E))$.

Рассмотрим последовательность областей $D_m$ с гладкими границами $\Sigma(D_m)=\Sigma_m$ так, чтобы $D_m\uparrow E$. В каждой области $D_m$ рассмотрим уравнение $L^{\varepsilon_k}v^{\varepsilon_k}=0$, $v^{\varepsilon_k}|_{\Sigma_m}=u|_{\Sigma_m}$. Из [5] следует, что $v=\lim\limits_{\varepsilon_k\to 0}v^{\varepsilon_k}$ существует и является единственным обобщенным непрерывным решением уравнения $Lv=0$, $v|_{\Sigma_m}=u|_{\Sigma_m}$. При этом $v=E_{x,t}u(x_{\tau_m},\tau_m)$, где $\tau_m=\tau(D_m)$ — момент первого выхода $x_t$ из $D_m$.

При больших $k$ $u^{\varepsilon_k}>c$ в области $D_m$, поэтому $L^{\varepsilon_k}u^{\varepsilon_k}=0$ в $D_m$ и $u^{\varepsilon_k}=E_{x,t}u^{\varepsilon_k}(x_{\tau^{\varepsilon_k}_m},\tau^{\varepsilon_k}_m)$, где $\tau^{\varepsilon_k}_m$ — первый момент выхода $x^{\varepsilon_k}_t$ из $D_m$.

Так как $v^{\varepsilon_k}=E_{x,t}u(x_{\tau^{\varepsilon_k}_m},\tau^{\varepsilon_k}_m)$,

то $|u^{\varepsilon_k}-v^{\varepsilon_k}|\leqslant E_{x,t}|u^{\varepsilon_k}(x_{\tau^{\varepsilon_k}_m},\tau^{\varepsilon_k}_m)-u(x_{\tau^{\varepsilon_k}_m},\tau^{\varepsilon_k}_m)|\to 0$.

Тем самым $v^{\varepsilon_k}\to u$ и $u=E_{x,t}u(x_{\tau_m},\tau_m)$.

Известно [7], что $\tau(D_m)\uparrow\tau(E)$. Из непрерывности $u(x,t)$ вплоть до границы $\Sigma(E)$ вытекает, что

$$u=\lim_m E_{x,t}u(x_{\tau_m},\tau_m)=E_{x,t}\lim_m u(x_{\tau_m},\tau_m)=E_{x,t}u(x_{\tau(E)},\tau(E))=$$

$=E_{x,t}c(x_{\tau(E)},\tau(E))$.

Теорема 3. *Пусть* $D\subseteq Q$ *и* $\bar u=E_{x,t}c(x_{\tau(D)},\tau(D))$. *Тогда* $u\geqslant\bar u$.

Пусть $D$ — область с гладкой границей $\Sigma(D)$. Определим $\bar u^{\varepsilon_k}$ в $D$ как решение краевой задачи $L^{\varepsilon_k}\bar u^{\varepsilon_k}=0$, $\bar u^{\varepsilon_k}|_{\Sigma(D)}=c|_{\Sigma(D)}$ и $\bar u^{\varepsilon_k}=c$ в $Q\backslash D$.

Как и выше, здесь можно убедиться, что равномерно $\lim\limits_{\varepsilon_k\to 0}\bar{u}^{\varepsilon_k}=\bar{u}$. Согласно [2], $u^{\varepsilon_k}\geqslant\bar{u}^{\varepsilon_k}$, поэтому $u=\lim u^{\varepsilon_k}\geqslant\lim\bar{u}^{\varepsilon_k}=\bar{u}$. Переход к областям с негладкой границей осуществляется, как и в [2].

Теорема 4. *Пусть* $u_1=\lim\limits_{\varepsilon_k\to 0}u^{\varepsilon_k}$ *и* $u_2=\lim\limits_{\varepsilon_l\to 0}u^{\varepsilon_l}$. *Тогда* $u_1\equiv u_2$.

Действительно, пусть $E_i=\{(x,t):u_i>c\}$, $i=1,2$. Возьмем произвольную точку $(\bar{x},\bar{t})$. Согласно теореме 3

$$u_2(\bar{x},\bar{t})=E_{\bar{x},\bar{t}}c(x_{\tau(E_2)},\tau(E_2))\geqslant E_{\bar{x},\bar{t}}c(x_{\tau(E_1)},\tau(E_1))=u_1(\bar{x},\bar{t});$$

аналогично $u_1(\bar{x},\bar{t})\geqslant u_2(\bar{x},\bar{t})$, поэтому $u_1(\bar{x},\bar{t})=u_2(\bar{x},\bar{t})$.

Доказательство теоремы 4 завершает построение оптимальной стратегии $\tau^*$ и цены $u(x,t)$ для диффузионного процесса с вырожденной матрицей диффузии.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1969.
2. Тобиас Т., Оптимальная остановка диффузионных процессов и параболические вариационные неравенства, Дифференциальные уравнения, **IX**, 702—708 (1973).
3. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов, Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **CIV**, 135—181 (1968).
4. Олейник О. А., О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой, Матем. сб., **69** (111), 111—139 (1966).
5. Фрейдлин М. И., О гладкости решений вырождающихся эллиптических уравнений, Изв. АН СССР, сер. матем., **32**, 1391—1413 (1968).
6. Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения, Киев, 1968.
7. Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963.


*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
3/XII 1973

*T. TOBIAS*

## KÕDUNUD DIFUSIOONIMAATRIKSIGA DIFUSIOONIPROTSESSIDE OPTIMAALSEST PEATAMISEST

Artiklis näidatakse, et kõdunud difusiooniprotsesside optimaalse peatusreegli hinnafunktsiooniks on mittekõdunud ülesannete lahendite piirväärtus. Mittekõdunud ülesannete hinnafunktsioonid leitakse teatud paraboolset tüüpi variatsioonivõrratuste lahenditena.

*T. TOBIAS*

## OPTIMAL STOPPING RULES FOR DEGENERATED DIFFUSION PROCESSES

It is shown that the cost function of optimal stopping of degenerated diffusion process is the limit of the solutions of nondegenerated problems. The cost functions of these nondegenerated problems are the solutions of certain parabolic variational inequalities.