10. Замышляев Б. В., Яковлев Ю. С., Динамические нагрузки при подводном взрыве, Л., 1967.
11. Эхо-сигналы от упругих объектов в воде, Ред. У. К. Нигул, Таллин, 1973 (в печати).
12. Shanks D., J. Math. and Phys., 34, 1 (1955).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
9/II 1973

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 22. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1973, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 22
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1973, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.1973.3.13

УДК 518 : 517.392

М. ЛЕВИН

ОБ УТОЧНЕНИИ НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

M. LEVIN. PARIMATE KVADRATUURVALEMITE TÄPSUSTAMISEST

M. LEVIN. ÜBER EINE VERSCHÄRFUNG DER BESTEN QUADRATURFORMELN

Для практики численного интегрирования важна следующая задача: задана квадратурная формула, требуется построить другую квадратурную формулу с бо́льшим числом узлов, среди которых были бы все узлы заданной формулы. Для формул Гаусса эта задача решалась в [1], для наилучших (по определению [2]) на множествах функций формул — в [3]. Г. М. Вайникко поставил задачу рассмотреть вопрос продолжения процесса уточнения формул, начатого в [3]. Решению этой задачи и посвящена настоящая заметка.

По [2] квадратурная формула с остатком $R(f)$ называется наилучшей на множестве H функций $f(x)$ среди квадратурных формул заданного вида (определяемых конкретными значениями параметров), если для нее величина $\sup\limits_{f\in H}|R(f)|$ имеет наименьшее значение.

Говоря об узлах x_k $(k=1,2,\ldots,N)$ квадратурной формулы, будем иметь в виду, что они удовлетворяют условию $0\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_N\leqslant 1$.

Ниже мы используем следующие обозначения:

$M>0$, $1<q\leqslant\infty$, целые n, r — заданные числа; $p=q/(q-1)$;

$R_{2r,p}(x)$ — многочлен степени $2r$ со старшим коэффициентом, равным единице, наименее уклоняющийся от нуля в L_p на отрезке $[-1;1]$;

$S_{2r,p}(x)$ — многочлен вида $x^r(x^r+a_1x^{r-1}+a_2x^{r-2}+\ldots+a_r)$, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[0;1]$ в метрике L_p;

$$\delta=\left[\frac{R_{2r,p}(1)}{S_{2r,p}(1)}\right]^{\frac{1}{2r}},\quad h=\frac{1}{2(n-1+\delta)},\quad \gamma=\delta/(2+\delta),\quad v=\gamma(2\gamma)^{2rp};$$

$W^{(s)}_{L_q}$ — множество функций $f(x)$, у которых на отрезке $[0; 1]$ производная порядка $s-1$ абсолютно непрерывна и $\|f^{(s)}(x)\|_{L_q} \leqslant M$.

$W^{(2r)}_{01L_q}$ — множество функций $f(x)$ таких, что

$$f(x) \in W^{(2r)}_{L_q} \quad \text{и} \quad f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, r-1).$$

Для значений $k = 0, 1, 2, \ldots$ рассмотрим формулы

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{2^k(n+1)-1} \sum_{l=0}^{2r-1} p_{i,l} f^{(l)}(x_i) + R_{n,k}(f(x)). \tag{1}$$

Наилучшую на множестве H формулу (1) при $k = 0$ будем называть формулой $R_{n,0}(H)$, а узлы этой наилучшей формулы обозначим через $x_{i,0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Через $R_{n,1}(H)$ обозначим наилучшую на множестве H формулу среди тех формул (1) при $k = 1$, у которых часть узлов фиксирована, а именно $x_{2i} = x_{i,0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; узлы этой наилучшей формулы обозначим через $x_{i,1}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n+1)$. Продолжая этот процесс, мы получим последовательность формул

$$R_{n,0}(H);\ R_{n,1}(H);\ \ldots;\ R_{n,m-1}(H);\ R_{n,m}(H);\ \ldots,$$

где $R_{n,s}(H)$ означает наилучшую на H формулу среди тех формул (1) при $k = s$, у которых $x_{2i} = x_{i,s-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2^{s-1}(n+1)-1)$; $x_{i,s-1}$ — обозначают узлы формулы $R_{n,s-1}(H)$ $(s = 1, 2, \ldots)$.

В работе [3] для $H = W^{(2r)}_{01L_q}$ построены формулы $R_{n,0}(H)$ и $R_{n,1}(H)$. Обобщением этого результата является следующая

Теорема 1. *Единственная квадратурная формула* $R_{n,m}(W^{(2r)}_{01L_q})$ *имеет*

а) узлы

$$\left.\begin{aligned}
&x_{1,m} = \delta\gamma^m h;\\
&x_{k_j,m} = x_{2^{j-1},m} + (k_j - 2^{j-1})\, 2^{-j+1}\delta(1-\gamma)\gamma^{m-j} h\\
&(j = 1, 2, \ldots, m;\ k_j = 2^{j-1}+1,\ 2^{j-1}+2, \ldots, 2^j);\\
&x_{\mu,m} = \delta h + (\mu - 2^m)\, h \cdot \frac{1}{2^{m-1}}\\
&(\mu = 2^m+1,\ 2^m+2, \ldots, 2^m \cdot n);\\
&x_{2^m(n+1)-\nu,m} = 1 - x_{\nu,m}\ \ (\nu = 1, 2, \ldots, 2^m - 1);
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

б) веса

$$\left.\begin{aligned}
&p_{1\,l} = (-1)^l p_{2^m(n+1)-1,l} = \frac{1}{(2r)!}\left[h_1^{l+1} R^{(2r-l-1)}_{2r,p}(1) - (-x_1)^{l+1} S^{(2r-l-1)}_{2r,p}(1)\right],\\
&p_{k,l} = \frac{1}{(2r)!}\left[h_k^{l+1} - (-h_{k-1})^{l+1}\right] R^{(2r-l-1)}_{2r,p}(1)\ \ (k = 2, 3, \ldots, 2^m(n+1)-2)\\
&(l = 0, 1, \ldots, 2r-1),
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где

$$h_j = \frac{1}{2}(x_{j+1,m} - x_{j,m}) \quad (j = 1, 2, \ldots, 2^m(n+1)-2);$$

в) оценку остатка

$$\sup_{f\in W^{(2r)}_{01L_q}} |R_{n,m}(f(x))| = \frac{MR_{2r,p}(1)}{(2r)!\sqrt[p]{2rp+1}} \cdot \left(\frac{h}{2^m}\right)^{2r} \cdot (1+s_n)^{1/p}, \qquad (4)$$

где

$$s_n = \frac{1}{n-1+\delta} \cdot \frac{(2+\delta)(v^m-1)(v-\gamma)}{v-1}.$$

Доказательство. Покажем сначала справедливость формул (2) и (3). Для этого воспользуемся методом полной математической индукции. Для значений $m=0$ и 1 теорема доказана в [3]. Пусть она справедлива для $m=t$, покажем, что тогда она справедлива и для $m=t+1$.

Рассмотрим формулы (1) при $k=t+1$, у которых часть узлов задана: $x_{2i}=x_{i,t}$ $(i=1,2,\ldots,2^t(n+1)-1)$, где $x_{i,t}$ вычислены по (2) при $m=t$. Для этих формул по аналогии с [2, 4, 3] получаем оценку в виде

$$\sup_{f\in W^{(2r)}_{01L_q}} |R_{n,t+1}(f(x))| = \frac{M}{(2r)!}\{\int\limits_0^1 |K(u)|^p\,du\}^{1/p}. \qquad (5)$$

Таким образом, задача построения наилучшей формулы (1) при рассматриваемых ограничениях сводится к минимизации величины

$$\int\limits_0^1 |K(u)|^p\,du \qquad (6)$$

по переменным x_{2i-1}, $p_{i,l}$. Повторяя рассуждения работ [3, 4] (которые, в свою очередь, используют идеи работ [1, 5]), мы получим значения

$$x_{1,t+1} = 1 - x_{2^{(t+1)}(n+1)-1,t+1} = \delta\gamma^{t+1}h, \qquad x_{2i+1,t+1} = \frac{1}{2}(x_{i,t}+x_{i+1,t})$$

$(i=1,2,\ldots)$ и веса в виде (3), где надо взять $m=t+1$. Это доказывает формулы (2) и (3). Оценку (4) мы получим по (5), если в (6) возьмем $t+1=m$, узлы (2) и вычислим последний интеграл, заменяя функцию $K(u)$ на каждом отрезке $[0;x_{1,m}]$, $[x_{1,m};x_{2,m}]$, ... соответствующими многочленами наименьшего уклонения (см. [5, 4, 3]), что и доказывает теорему.

Теперь рассмотрим формулы вида

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{2^k(n+1)-1}\sum_{l=0}^{2r-1}\lambda_{il}f^{(l)}(u_i) + \sum_{l=0}^{r-1}[\alpha_l f^{(l)}(0)+\beta_l f^{(l)}(1)] + R^*_{n,k}(f(x)). \qquad (7)$$

Так же, как и выше, построим последовательность уточняющих друг друга формул (7)

$$R^*_{n,0}(H);\ R^*_{n,1}(H);\ \ldots;\ R^*_{n,m-1}(H);\ R^*_{n,m}(H);\ \ldots,$$

где $R^*_{n,0}(H)$ означает наилучшую на множестве H формулу (7) при $k=0$, а $R^*_{n,s}(H)$ — наилучшую на множестве H формулу среди тех формул (7) при $k=s$, у которых часть узлов фиксирована: $u_{2i}=u_{i,s-1}$ $(i=1,2,\ldots,2^{s-1}(n+1)-1)$; здесь $u_{i,s-1}$ означают узлы формулы $R^*_{n,s-1}(H)$ $(s=1,2,\ldots)$.

С помощью предыдущей теоремы и теоремы 1 из [6] мы приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Единственная квадратурная формула* $R^{*}_{n,m}(W^{(2r)}_{L_q})$ *имеет узлы* $u_{i,m} = x_{i,m}$, *веса* $\lambda_{il} = p_{i,l}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2^m(n+1) - 1;$ $l = 0, 1, \ldots, 2r-1)$, *где значения* $x_{i,m}$ *и* $p_{i,l}$ *вычислены по* (2) *и* (3), *а также веса* α_l *и* β_l, *являющиеся решением системы*

$$\tilde{R}^{*}_{n,m}(x^j) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, 2r-1),$$

где $\tilde{R}^{*}_{n,m}(f(x))$ *означает ошибку формулы (7) со значениями* $u_i = x_{i,m}$, $\lambda_{il} = p_{i,l}$ *для функции* $f(x)$.

Для этой формулы величина

$$\sup_{f \in W^{(2r)}_{L_q}} \left| R^{*}_{n,m}(f(x)) \right|$$

совпадает со значением (4).

В заключение отметим, что совершенно аналогично проводится дальнейшее уточнение наилучших формул в классах $W^{(r)}_{0L_q}$ и $W^{(r)}_{L_q}$, начало которого рассматривалось в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кронрод А. С., ДАН СССР, 154, № 2, 283 (1964).
2. Никольский С. М., УМН, V, вып. 2(36), 165 (1950).
3. Левин М. И., Шац Э. М., Изв. ВУЗов, Матем., № 10, 46 (1972).
4 Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 19, 407 (1970).
5. Аксень М. Б., Турецкий А. Х., Изв. АН БССР, Физ. Матем., № 1, 14 (1966).
6 Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 21, 449 (1972).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
16/II 1973